
NOVOS RESULTADOS SOBRE A ESTABILIDADE E CONTROLE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES UTILIZANDO MODELOS FUZZY E LMI

**Marcelo Carvalho Minhoto
Teixeira***

marcelo@dee.feis.unesp.br

Hilton Cleber Pietrobon**

hilton@ele.ita.cta.br

Edvaldo Assunção*

edvaldo@dee.feis.unesp.br

*Universidade Estadual Paulista, DEE/FEIS/UNESP
CP 31, 15.385-000 Ilha Solteira – SP – Brasil

**Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA/IEE/IEES
12.228-900 - São José dos Campos - SP

RESUMO São apresentadas condições relaxadas para o estudo da estabilidade de sistemas não-lineares, contínuos e discretos no tempo, descritos por modelos fuzzy. Uma análise teórica demonstra que o método proposto fornece resultados melhores ou iguais que os outros métodos descritos na literatura. Simulações digitais ilustram este fato. Estes resultados são também utilizados no projeto de reguladores fuzzy. Para isso sistemas não-lineares são representados pelos modelos fuzzy propostos por Takagi-Sugeno. Além disso, as análises de estabilidade e problemas de projetos de sistemas de controle são descritos como problemas de Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, Linear Matrix Inequalities (LMI)), que podem ser resolvidos eficientemente na prática por técnicas de programação convexa. As técnicas de projeto também permitem a especificação do transiente através da taxa de decaimento e a especificação de restrições nos sinais de controle e nas saídas. O projeto e a simulação do controle de um pêndulo invertido ilustram o sistema de controle estudado.

Keywords: Fuzzy control, nonlinear systems, stability, regulators, LMIs.

ABSTRACT Relaxed conditions for the stability study of nonlinear, continuous and discrete-time systems given by fuzzy models are presented. A theoretical analysis shows that the proposed method provides better or at least the same results of the methods presented in the literature. Digital simulations exemplify this fact. These results are also used for the fuzzy regulators design. The nonlinear systems are represented by the fuzzy models proposed by Takagi and Sugeno. The stability analysis and the design of controllers are described by LMIs (Linear Matrix Inequalities), that can be solved efficiently by convex programming techniques. The specification of the decay rate, constraints on control input and output are also described by LMIs. Finally,

the proposed design method is applied in the control of an inverted pendulum.

1 INTRODUÇÃO

O primeiro passo no projeto de um sistema de controle é a construção de um “modelo verdadeiro” do sistema dinâmico que será controlado. O modelo verdadeiro será utilizado nas simulações para verificar o desempenho do controlador projetado e deve incluir todas as características relevantes do processo. Normalmente o modelo verdadeiro é muito complicado para o projeto de sistemas de controle. Assim, necessita-se de um modelo simplificado, denominado “modelo de projeto”, vide (Friedland, 1996) para maiores detalhes. O modelo de projeto deve capturar as características essenciais do processo. A técnica mais comum para a obtenção de um modelo de projeto para plantas não-lineares é sem dúvida a linearização da planta em um ponto de operação de interesse. Com este método o modelo de projeto é em geral um sistema linear invariante no tempo e o projeto de controladores é relativamente simples em muitos casos. Entretanto, este modelo de projeto descreve bem a dinâmica do sistema somente em uma certa vizinhança em torno do ponto de operação no qual o sistema foi linearizado. Assim, nos casos onde o sistema pode operar em regiões distantes do ponto de operação, este modelo de projeto não é, em geral, adequado. Neste caso deve-se adotar um modelo de projeto mais sofisticado, que considere adicionalmente a dinâmica da planta em regiões distantes do ponto de operação mencionado. Uma possível solução para este problema é a representação da planta não-linear por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) ou Takagi-Sugeno-Kang (T-S-K) (Takagi and Sugeno, 1985), (Sugeno and Kang, 1988). A idéia destes modelos consiste da descrição aproximada de um sistema não-linear como a combinação de um certo número de modelos lineares invariantes no tempo locais, que descrevem aproximadamente o comportamento deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Desta forma, pode-se interpretar a técnica tradicional de linearização em apenas um ponto de operação

⁰Artigo submetido em 07/12/1998

1a. Revisão em 23/04/1999; 2a. Revisão em 04/10/1999

Aceito sob recomendação da Eda. Consa. Profa. Dra. Sandra Aparecida Sandri

como um caso particular dos modelos fuzzy T-S-K, consistindo apenas de um modelo local. Esta classe de modelos de projeto permite que o engenheiro utilize o seu conhecimento sobre o sistema que vai ser controlado, na definição do número dos modelos locais e dos pontos ou regiões nas quais estes modelos locais serão definidos.

O modelo global do sistema é obtido através da combinação fuzzy destes modelos lineares locais. A idéia é que para cada modelo linear local seja projetado um controle de realimentação linear. O controlador global resultante, que é não-linear em geral, é uma combinação fuzzy de cada controlador linear individual.

Mais significativamente, as análises de estabilidade e o projeto de controle são reduzidos a problemas descritos por LMIs (Boyd et al., 1994). Numericamente, os problemas de LMIs podem ser resolvidos muito eficientemente por meio de algumas ferramentas poderosas disponíveis na literatura de programação matemática (Boyd et al., 1994). Portanto, a interpretação das análises de estabilidade e problemas de projeto de controle como problemas descritos por LMIs é equivalente a encontrar soluções para os problemas originais.

Durante a última década o controle fuzzy tem atraído grande atenção e muitas aplicações têm sido feitas, por exemplo, na análise de novos sistemas de controle para automóveis (Will et al., 1997) e controle de elevadores de alta velocidade (Tanaka, Nishimura and Wang, 1998).

A análise da estabilidade de sistemas de controle fuzzy é um dos conceitos mais importantes em sistemas de controle fuzzy. É possível projetar teoricamente um controlador fuzzy se for disponível um bom critério para a análise da estabilidade adequado a estes sistemas. Recentemente muitos esforços têm sido feitos nesta área (Tanaka and Sugeno, 1992), (Tanaka and Sano, 1994), (Cao et al., 1997b), (Cao et al., 1997a), (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998).

Este artigo trata das questões de estabilidade e projeto de controladores fuzzy. São apresentados estudos e novas condições suficientes sobre a estabilidade de sistemas fuzzy utilizando o método direto de Lyapunov, mais relaxadas que aquelas existentes até o momento.

Novos métodos de projeto baseados em LMIs para reguladores fuzzy são construídos usando a Compensação Distribuída Paralela (CDP) (Tanaka and Sugeno, 1992), (Wang et al., 1996) e as novas condições para estabilidade. Exemplos de projeto para sistemas não-lineares demonstram a utilidade das novas condições de estabilidade e os métodos de projeto baseados em LMIs.

A Seção 2 apresenta o modelo fuzzy proposto por Takagi-Sugeno. A Seção 3 introduz o regulador fuzzy e suas questões de estabilidade utilizando o modelo fuzzy Takagi-Sugeno. São apresentados também novos resultados para a estabilidade e projetos descritos por LMIs para reguladores fuzzy contínuos no tempo, enfocando a estabilidade do sistema, a taxa de decaimento e restrições na entrada e saída de controle. É apresentado um exemplo de aplicação. Na Seção 4 são discutidos os resultados apresentados. No Apêndice são apresentados os novos resultados obtidos para sistemas discretos no tempo.

Neste artigo, M^T é a transposta da matriz M , $S > 0$ ($S \geq 0$)

significa que S é uma matriz simétrica positiva definida (semi-definida), $S > T$ ($S \geq T$) significa que $S - T > 0$ ($S - T \geq 0$), e $W = 0$ significa que W é uma matriz nula, isto é, seus elementos são todos iguais a zero. É utilizada a seguinte notação: $\sum_{i < j}^r$, que significa, para $r = 3$,

$$\sum_{i < j}^3 a_{ij} \Leftrightarrow a_{12} + a_{13} + a_{23}.$$

2 MODELO FUZZY TAKAGI-SUGENO

No método de projeto proposto, uma dada planta não-linear é representada pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno (Takagi and Sugeno, 1985). Este método de modelagem fuzzy é simples e natural. As dinâmicas do sistema são capturadas por um conjunto de implicações fuzzy que caracterizam relações locais no espaço de estados. A principal característica de um modelo Takagi-Sugeno é a descrição das dinâmicas locais de cada implicação fuzzy (regra) por um modelo de sistema linear. O modelo fuzzy global do sistema é obtido pela combinação fuzzy dos modelos do sistema linear.

Especificamente, o sistema fuzzy Takagi-Sugeno é descrito pelas regras fuzzy SE-ENTÃO, que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema.

A descrição local da planta dinâmica a ser controlada está disponível nos termos dos modelos lineares locais:

Sistema Fuzzy Contínuo (SFC):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$, o vetor estado $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, o vetor entrada $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, o vetor saída $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$. A informação acima é então fundida com as regras SE-ENTÃO disponíveis, onde a i -ésima regra pode ter a forma:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i &: \text{ SE } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ \text{ENTÃO } &\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Tem-se que \mathcal{M}_j^i , $j = 1, 2, \dots, p$ é o conjunto fuzzy j da regra i e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ são as variáveis premissas. Seja $\mu_j^i(z_j(t))$ a função de pertinência do conjunto fuzzy \mathcal{M}_j^i , e seja

$$w^i(\mathbf{z}(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_j(t)), \quad \mathbf{z}(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)].$$

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$ tem-se, para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$w^i(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t)) > 0.$$

Uma escolha natural para a obtenção de um modelo fuzzy Takagi-Sugeno para sistemas não-lineares é adotar $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t)$,

sendo $\mathbf{x}(t)$ o vetor de estado do sistema não-linear. Um exemplo na Seção 3.7 ilustra esta idéia.

Desta forma, dado um par $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, o sistema fuzzy resultante é tido como a média ponderada dos modelos locais, e tem a forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t))(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)) \quad (2) \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{B}_i \right) \mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\alpha) \mathbf{u}(t).\end{aligned}$$

O sistema não forçado ($\mathbf{u}(t) = 0$) é definido como segue:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t).\end{aligned} \quad (3)$$

A saída para ambos os casos, forçado e não forçado, é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{C}(\alpha) \mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$\alpha_i(\mathbf{z}(t)) = \frac{w^i(\mathbf{z}(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))}.$$

Note que, para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$\alpha_i(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) = 1. \quad (4)$$

Os modelos fuzzy Takagi-Sugeno têm sido úteis na descrição aproximada de sistemas não-lineares. Na Seção 3.7 este fato é ilustrado no controle de um pêndulo invertido. É bem conhecido que sistemas fuzzy aditivos $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, como o modelo fuzzy TSK, podem aproximar uniformemente qualquer função contínua $\mathbf{f} : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em um domínio compacto (fechado limitado) \mathbf{U} (Kosko, 1997). No caso do modelo fuzzy TSK, quanto maior o número de modelos locais, melhor será a aderência do modelo à equação diferencial não-linear da planta.

3 PROJETO DE REGULADORES COM MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

Utilizou-se o conceito de Compensação Distribuída Paralela (CDP) para projetar controladores fuzzy para estabilizar sistemas não-lineares descritos por modelos fuzzy. A idéia é projetar

um compensador para cada regra do modelo fuzzy. Para cada regra, são utilizadas técnicas de projeto de controle linear. O controlador fuzzy global resultante, que é não-linear em geral, é uma combinação fuzzy de cada controlador linear individual. A CDP oferece um procedimento para projetar um controlador para o modelo fuzzy Takagi-Sugeno, onde cada regra de controle é projetada a partir da correspondente regra de um modelo Takagi-Sugeno da planta. O controlador fuzzy projetado compartilha os mesmos conjuntos de regras com o modelo fuzzy nas partes premissas. Para o modelo fuzzy (1), sendo $i = 1, 2, \dots, r$, o regulador fuzzy via CDP tem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}\text{Regra } i &: \text{ SE } z_1(t) \in \mathcal{M}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \in \mathcal{M}_p^i, \\ &\text{ ENTÃO } \mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}_i \mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Portanto, de forma análoga à efetuada na obtenção de (2), o controlador fuzzy é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= -\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(t) \quad (5) \\ &= -\mathbf{F}(\alpha) \mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

O objetivo do projeto do regulador fuzzy é determinar os ganhos de realimentação locais \mathbf{F}_i nas partes conseqüentes. Para a lei de controle (5), a equação (2) é dada por (6) (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998), tendo em vista (4):

Sistema Controlado Fuzzy Contínuo (SCFC):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \{ \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \} \mathbf{x}(t) \quad (6) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(t) + \\ &\quad + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right\} \mathbf{x}(t); \end{aligned}$$

sendo

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j.$$

3.1 Condições para a Estabilidade de Reguladores Fuzzy

As condições suficientes para a estabilidade de sistemas fuzzy contínuos e discretos no tempo são derivadas usando funções Lyapunov quadráticas do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$ (Tanaka and Sugeno, 1992). Os principais resultados para o SCFC estão descritos abaixo. No Apêndice são apresentados resultados similares para sistemas fuzzy discretos no tempo.

Lema 1 *O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema fuzzy contínuo descrito por (3) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum \mathbf{P} tal que*

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < 0$$

para $i = 1, 2, \dots, r$; isto é, para todos os subsistemas.

Prova: Segue diretamente da aplicação da função de Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$.

Para a apresentação dos resultados para a estabilidade do sistema forçado, será utilizada a definição do número de regras ativas: o sistema fuzzy (6) possui r regras e para um certo $z(t) = z_0$ o número de regras ativas é igual ao número de termos $\alpha_1(z_0), \dots, \alpha_r(z_0)$ não nulos. Por exemplo, na Figura 1 as regras ativas para $z_1(t) \leq a$, $z_1(t) \in (a, b)$, $z_1(t) = b$, $z_1(t) \in (b, c)$, $z_1(t) = c$, $z_1(t) \in (c, d)$, $z_1(t) \geq d$ são respectivamente as regras 1; 1 e 2; 2; 2 e 3; 3; 3 e 4; 4. Assim o número de regras ativas é menor ou igual a dois.

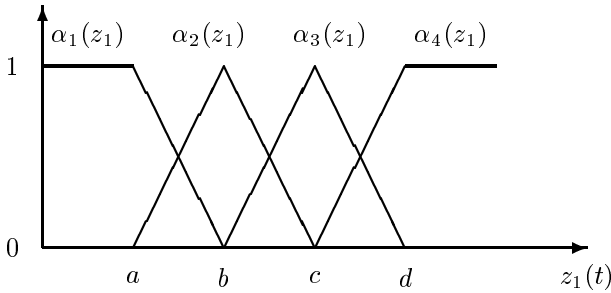


Figura 1: Exemplo de um conjunto de 4 regras fuzzy: $\alpha_1(z_1(t)), \alpha_2(z_1(t)), \alpha_3(z_1(t)), \alpha_4(z_1(t)) \in [0, 1]$ e $\alpha_1(z_1(t)) + \alpha_2(z_1(t)) + \alpha_3(z_1(t)) + \alpha_4(z_1(t)) = 1$.

Observe que na Figura 1, $\alpha_1(z_1(t))\alpha_3(z_1(t)) = \alpha_1(z_1(t))\alpha_4(z_1(t)) = \alpha_2(z_1(t))\alpha_4(z_1(t)) = 0, \forall z_1(t) \in \mathbb{R}$. A existência deste fato também foi explorada no estudo da estabilidade, como será visto nos Lemas 2 e 3.

Lema 2 O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (6) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum \mathbf{P} tal que

$$\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} < 0$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad i < j$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t)$.

Prova: Segue diretamente do Lema 1.

Essas condições para estabilidade, em geral, são robustas (Tanaka and Sano, 1994) e conservativas. Foram propostas em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) novas condições relaxando as condições descritas anteriormente.

Lema 3 Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s , sendo $1 < s \leq r$. O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (6) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz

simétrica positiva definida comum \mathbf{P} e uma matriz simétrica semidefinida positiva comum \mathbf{Q} tais que

$$\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} + (s - 1)\mathbf{Q} < 0 \quad (7)$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) - \mathbf{Q} \leq 0, \quad i < j \quad (8)$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t)$.

Prova: Vide (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998).

3.2 Novos Resultados para a Estabilidade de Reguladores Fuzzy

Para analisar a estabilidade do sistema de controle fuzzy é preciso encontrar uma matriz simétrica positiva definida comum \mathbf{P} que satisfaça as condições de um dos Lemas 1-3. Portanto, quanto mais conservativas forem as condições de estabilidade, mais difícil será encontrar a matriz \mathbf{P} , se não impossível. Nesta seção são obtidas novas condições de estabilidade, mais relaxadas que as descritas na Seção 3.1. O Teorema 1 apresenta novas condições para os sistemas contínuos no tempo.

Teorema 1 Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s , sendo $1 < s \leq r$. Considere $i, j = 1, \dots, r$, sendo $i < j$ e defina

$$\mathbf{Q}_j = \mathbf{G}_{jj}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{jj}, \quad (9)$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right), \quad (10)$$

$$\mathbf{Q}t_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t), \\ \mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Q} + \mathbf{P}_{ij}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (11)$$

Então, o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (6) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum \mathbf{P} , uma matriz simétrica positiva semidefinida comum \mathbf{Q} e matrizes simétricas semidefinidas positivas \mathbf{P}_{ij} tais que

$$\mathbf{Q}t = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 + (s-1)\mathbf{Q} & \mathbf{Q}t_{12} & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Q}t_{12} & \mathbf{Q}_2 + (s-1)\mathbf{Q} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{Q}t_{1r} & \mathbf{Q}t_{2r} & \dots & \mathbf{Q}t_{1r} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{Q}t_{2r} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{Q}_r + (s-1)\mathbf{Q} & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

Prova: Considere uma candidata a função Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, onde $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$. De (6) e das condições (9) e (10) tem-se

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i < j}^r 2\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_{ij}\mathbf{x}(t) \quad (13) \\
& = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_i\mathbf{x}(t) + \\
& + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \\
& + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t).
\end{aligned}$$

No Corolário 4 de (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) foi demonstrado que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) - \frac{1}{s-1} \sum_{i < j}^r 2\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) \geq 0.$$

Desta forma, tendo em vista as equações (11) e (13),

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) & \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{Q}_i + (s-1)\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \\
& + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Q})\mathbf{x}(t) \\
& \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{Q}_i + (s-1)\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \\
& + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \\
& = \mathbf{x}^T(t) \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} & & & \\ & \alpha_2\mathbf{I} & & \\ & & \dots & \\ & & & \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix} \\
& \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 + (s-1)\mathbf{Q} & \mathbf{Q}\mathbf{t}_{12} & \dots & \\ \mathbf{Q}\mathbf{t}_{12} & \mathbf{Q}_2 + (s-1)\mathbf{Q} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{Q}\mathbf{t}_{1r} & \mathbf{Q}\mathbf{t}_{2r} & \dots & \\ \dots & \mathbf{Q}\mathbf{t}_{1r} & & \\ \dots & \mathbf{Q}\mathbf{t}_{2r} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \dots & \mathbf{Q}_r + (s-1)\mathbf{Q} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbf{I} \\ \alpha_2\mathbf{I} \\ \vdots \\ \alpha_r\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),
\end{aligned}$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então, da equação (12), $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ para $\mathbf{x}(t) \neq 0$.

Corolário 1 Se $r = s$, então pode-se adotar $\mathbf{Q} = 0$ nas condições do Teorema 1.

Prova: Como $s=r$, então existe $\mathbf{z}(t)$ tal que todas as r regras estão ativas, ou seja,

$$\alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) \neq 0, \forall i, j = 1, 2, \dots, r.$$

Nesta situação, de (11) e (12) tem-se

$$\mathbf{Q}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_{12} + \mathbf{P}_{12} & \dots & \mathbf{Q}_{1r} + \mathbf{P}_{1r} \\ \mathbf{Q}_{12} + \mathbf{P}_{12} & \mathbf{Q}_2 & \dots & \mathbf{Q}_{2r} + \mathbf{P}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}_{1r} + \mathbf{P}_{1r} & \mathbf{Q}_{2r} + \mathbf{P}_{2r} & \dots & \mathbf{Q}_r \end{bmatrix} + \mathbf{Q}\mathbf{t}', \quad (14)$$

sendo

$$\mathbf{Q}\mathbf{t}' = \begin{bmatrix} (s-1)\mathbf{Q} & -\mathbf{Q} & \dots & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q} & (s-1)\mathbf{Q} & \dots & -\mathbf{Q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{Q} & \dots & (s-1)\mathbf{Q} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Agora será demonstrado que, se $r = s$, então $\mathbf{Q}\mathbf{t}' \geq 0$ e desta forma $\mathbf{Q}\mathbf{t}'$ pode ser removida para a obtenção da condição $\mathbf{Q}\mathbf{t} < 0$. Como $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$, então existe \mathbf{L} tal que $\mathbf{Q} = \mathbf{L}^T\mathbf{L}$. De (15), obtém-se (16). Então cada matriz do lado direito de (16) é semidefinida positiva e assim, $\mathbf{Q}\mathbf{t}' \geq 0$, o que conclui a prova.

Observação 1 É conveniente registrar que o caso $r = s = 2$ é o mais abordado nos exemplos de aplicação de sistemas de controle com modelos TSK, por exemplo (Teixeira and Žak, 1999), (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998), (Ma et al., 1998), (Cao et al., 1997b), (Cao et al., 1997a).

O teorema a seguir e o Exemplo 1 mostrarão que os resultados apresentados neste trabalho são mais gerais do que os disponíveis na literatura.

Teorema 2 Se as condições do Lema 3 são satisfeitas, então as condições do Teorema 1 também serão.

Prova: Das condições do Lema 3, equações (9) e (10), então quando $\mathbf{Q}\mathbf{t}_{ij} = \mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Q} + \mathbf{P}_{ij}$ pode-se escolher $\mathbf{P}_{ij} = -\mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{Q} \geq 0$. Então, da equação (11), $\mathbf{Q}\mathbf{t}_{ij} = 0$. Desta forma, de (12),

$$\mathbf{Q}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 + (s-1)\mathbf{Q} & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{Q}_2 + (s-1)\mathbf{Q} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \\ \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ \dots & \mathbf{Q}_r + (s-1)\mathbf{Q} & \end{bmatrix} < 0$$

e a prova está concluída.

Observação 2 O resultado descrito no Corolário 1 resulta em simplificação das LMIs propostas no Teorema 1. Estas simplificações não produzem um ganho significativo no procedimento numérico da solução das LMIs consideradas. As justificativas para a apresentação deste Corolário, foi a demonstração que para $r = s$ o método proposto não necessita da variável \mathbf{Q} , sendo que esta variável foi acrescentada seguindo as idéias expostas em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998). Assim, para $r = s$, o método proposto é totalmente independente dos resultados expostos em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998). Estas observações são válidas para o caso discreto apresentado no Apêndice, trocando-se \mathbf{Q} por \mathbf{Y} .

Os exemplos a seguir comparam o critério de estabilidade proposto neste trabalho com o proposto em (Tanaka, Ikeda and

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}t' &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & -\mathbf{Q} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\mathbf{Q} & \mathbf{Q} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 & -\mathbf{Q} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\mathbf{Q} & 0 & \mathbf{Q} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{Q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{Q} & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Q} & -\mathbf{Q} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mathbf{Q} & \mathbf{Q} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Q} & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{Q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\mathbf{Q} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{Q} & -\mathbf{Q} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\mathbf{Q} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \\
e \quad \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T \\ -\mathbf{L}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T \\ -\mathbf{L}^T \end{bmatrix}^T.
\end{aligned} \tag{16}$$

Wang, 1998). Para os dois exemplos abaixo, os ganhos de realimentação \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , para cada valor de a e b , são determinados selecionando-se $[-2 \ -2]$ como autovalores para os dois modelos locais na CDP no caso contínuo e $[1/2 \ 1/2]$ no caso discreto. As LMIs foram solucionadas com o software LMISol, vide (Oliveira et al., 1997). As Figuras 2 e 3 mostram as áreas factíveis para o caso contínuo e discreto, respectivamente.

Exemplo 1: Caso Contínuo

Considere o SFC onde $r = s = 2$. Neste caso utilizou-se os resultados do Corolário 1.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} a & -10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

A Fig. 2 mostra a área factível para os dois métodos, variando-se a e b na região coberta pela figura.

Exemplo 2: Caso Discreto

Considere o SFD onde $r = s = 2$. Neste caso utilizou-se os resultados do Corolário 2 (vide Apêndice).

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} a & -10 \\ 1 & 0,65 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

A Fig. 3 mostra a área factível para os dois métodos, variando-se a e b na região coberta pela figura.

É observado nestas figuras que as condições apresentadas por (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) levam a resultados mais conservativos para ambos os casos contínuo e discreto pois sua área factível é menor. Estes resultados, aliados aos Teoremas 2 e 4, mostram que os critérios de estabilidade propostos neste trabalho são mais gerais do que os apresentados em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998).

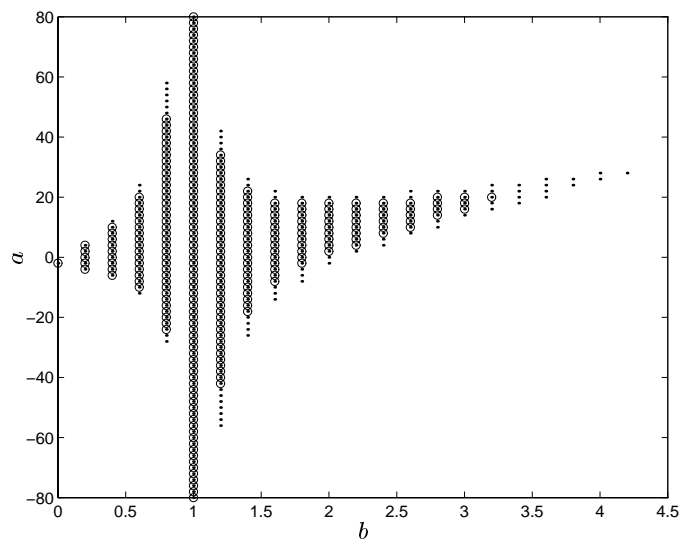


Figura 2: Área factível do método proposto em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) indicada por (“o”) e área factível do método proposto neste artigo indicada por (“.”).

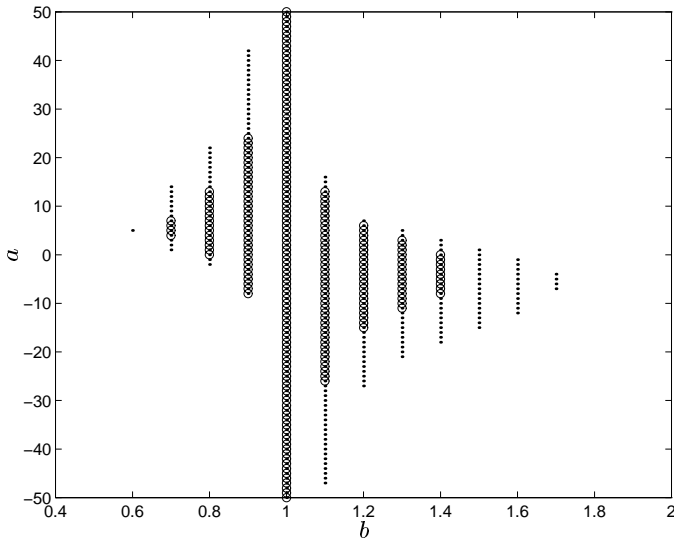


Figura 3: Área factível do método proposto em (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) indicada por (“o”) e área factível do método proposto neste artigo indicada por (“.”).

3.3 Novos Resultados para o Projeto de Reguladores Fuzzy Utilizando LMIs

Para as novas condições de estabilidade propostas neste trabalho, o problema de projeto para determinar os ganhos de realimentação F_i , para $i = 1, \dots, r$, pode ser definido por meio de LMIs como segue:

Encontre X , Y , P_{ij} e M_i para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $X > 0$, $Y \geq 0$, $P_{ij} \geq 0$ e

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1r} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1r} & C_{2r} & \dots & C_{rr} \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

sendo

$$C_{jj} = A_j X - B_j M_j + X A_j^T - M_j^T B_j^T + (s - 1) Y,$$

$$C_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ \frac{1}{2} (A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i + X A_i^T + \\ -M_j^T B_i^T + X A_j^T - M_i^T B_j^T) - Y + P_{ij}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As condições acima são LMIs com respeito às variáveis X , Y , P_{ij} e M_i e são obtidas diretamente do Teorema 1. Pode-se encontrar uma matriz simétrica positiva definida X , uma matriz simétrica semidefinida positiva Y , matrizes simétricas semidefinidas positivas P_{ij} e M_i satisfazendo as LMIs ou determinar que X , Y , P_{ij} e M_i não existem. Este é um problema de factibilidade. Se existe solução, os ganhos de realimentação F_i , uma P comum e uma Q comum podem ser obtidas da seguinte forma:

$$P = X^{-1}, \quad F_i = M_i X^{-1} \quad \text{e} \quad Q = P Y P,$$

a partir das soluções X , Y e M_i .

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq s$. Quando $r = s$, levando-se em conta os resultados do Corolário 1, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se $Y = 0$.

3.4 Taxa de Decaimento

É importante considerar não somente a estabilidade, mas também outros desempenhos do sistema controlado tais como velocidade de resposta, restrições no controle da entrada e saída. A velocidade de resposta está relacionada com a taxa de decaimento, isto é, o maior expoente Lyapunov.

Do Teorema 1, para uma candidata da função Lyapunov $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$ então $\dot{V}(x(t)) < 0$ se $Q t < 0$, sendo $Q t$ dada em (12). Agora, utilizando-se o resultado da equação (4) tem-se que

$$P = [\alpha_1 I \quad \alpha_2 I \quad \dots \quad \alpha_r I] \begin{bmatrix} P & P & \dots & P \\ P & P & \dots & P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P & P & \dots & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 I \\ \alpha_2 I \\ \vdots \\ \alpha_r I \end{bmatrix}.$$

Logo, a condição que $\dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma V(x(t))$ (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998) para toda trajetória é satisfeita para

$$Q t + 2\gamma \begin{bmatrix} P & P & \dots & P \\ P & P & \dots & P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P & P & \dots & P \end{bmatrix} < 0,$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} Q_1 + (s - 1)Q + 2\gamma P & Q t_{12}^* & \dots \\ Q t_{12}^* & Q_2 + (s - 1)Q + 2\gamma P & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ Q t_{1r}^* & Q t_{2r}^* & \dots \\ \dots & Q t_{1r}^* & \dots \\ \dots & Q t_{2r}^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & Q_r + (s - 1)Q + 2\gamma P & \dots \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

sendo

$$Q t_{ij}^* = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ Q_{ij} - Q + P_{ij} + 2\gamma P, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e $\gamma > 0$. Portanto, o maior limite inferior para a taxa de decaimento que pode ser encontrado usando uma função Lyapunov quadrática é obtido resolvendo-se o seguinte problema de otimização dos autovalores generalizado (GEVP) (Boyd et al., 1994) em P e γ :

Maximize γ e encontre X , Y , P_{ij} , M_1, \dots, M_r sujeito a $X > 0$, $Y \geq 0$, $P_{ij} \geq 0$ e

$$\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & \dots & C'_{1r} \\ C'_{12} & C'_{22} & \dots & C'_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C'_{1r} & C'_{2r} & \dots & C'_{rr} \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

sendo

$$C'_{jj} = A_j X - B_j M_j + X A_j^T - M_j^T B_j^T + (s-1)Y + 2\gamma X,$$

$$C'_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t)) = 0, \forall z(t), \\ \frac{1}{2} (A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i + X A_i^T + \\ -M_j^T B_i^T + X A_j^T - M_i^T B_j^T) - Y + 2\gamma X + P_{ij}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Novamente, os ganhos de realimentação F_i , uma P comum e uma Q comum podem ser obtidas da seguinte forma:

$$P = X^{-1}, \quad F_i = M_i X^{-1} \quad \text{e} \quad Q = PYP,$$

a partir das soluções X , Y e M_i .

3.5 Restrição da Entrada

Assuma que a condição inicial $x(0)$ é conhecida. A restrição $\|u(t)\|_2 \leq \mu$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (20)$$

e

$$\begin{bmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (21)$$

forem satisfeitas (vide (Boyd et al., 1994) e (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998)), sendo $X = P^{-1}$ e $M_i = F_i X$.

Um problema de projeto de reguladores fuzzy estáveis satisfazendo a restrição da entrada pode ser definido como segue:

Encontre X , Y , P_{ij} e M_i para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $X > 0$, $Y \geq 0$ (se $r \neq s$), $P_{ij} \geq 0$, (17), (20) e (21).

Para ambos os casos contínuo e discreto (veja Apêndice), se $r = s$, pelos Corolários 1 e 2, pode-se adotar $Y = 0$.

3.6 Restrição da Saída

Assuma que a condição inicial $x(0)$ é conhecida. A restrição $\|y(t)\|_2 \leq \lambda$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (22)$$

e

$$\begin{bmatrix} X & X C_i^T \\ C_i X & \lambda^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (23)$$

forem satisfeitas (vide (Boyd et al., 1994) e (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998)), sendo $X = P^{-1}$.

Um problema de projeto de reguladores fuzzy estáveis satisfazendo a restrição da saída pode ser definido como segue:

Encontre X , Y , P_{ij} e M_i para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $X > 0$, $Y \geq 0$ (se $r \neq s$), $P_{ij} \geq 0$, (17), (22) e (23).

Para ambos os casos contínuo e discreto (veja Apêndice), se $r = s$, pelos Corolários 1 e 2, pode-se adotar $Y = 0$.

3.7 Exemplos de Aplicação

Considere o problema do equilíbrio e balanço de um pêndulo invertido sobre um carro. As equações de movimento para o pêndulo invertido, de acordo com (Ma et al., 1998), são

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1,0}{[(M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2 \cos^2 x_1]} [-f_1(M+m)x_2 \\ &\quad - m^2 l^2 x_2^2 (\sin x_1) \cos x_1 + f_0 m l x_4 \cos x_1 + \\ &\quad + (M+m)mg l \sin x_1 - ml(\cos x_1)u] \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1,0}{[(M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2 \cos^2 x_1]} [f_1 m l x_2 \cos x_1 \\ &\quad + (J+ml^2)ml x_2^2 \sin x_1 - f_0(J+ml^2)x_4 + \\ &\quad - m^2 g l^2 (\sin x_1) \cos x_1 + (J+ml^2)u] \end{aligned} \quad (24)$$

sendo que x_1 é o ângulo (rad) do pêndulo com relação ao eixo vertical, x_2 é a velocidade angular (rad/s), x_3 é o deslocamento (m) do carro, e x_4 é a velocidade (m/s) do carro, $g=9,8 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade, m é a massa (kg) do pêndulo, M é a massa (kg) do carro, f_0 é o coeficiente de atrito (N/(m/s)) do carro, f_1 é o coeficiente de atrito (N/(rad/s)) do pêndulo, l é o comprimento (m) do centro de massa da haste até a sua base, J é o momento de inércia (kgm^2) do pêndulo em torno do seu centro de massa, e u é a força (N) aplicada no carro. Escolheu-se $M=1,3282 \text{ kg}$, $m=0,22 \text{ kg}$, $f_0=22,915 \text{ N/(m/s)}$, $f_1=0,007056 \text{ N/(rad/s)}$, $l=0,304 \text{ m}$, $J=0,004963 \text{ kgm}^2$.

Para projetar o controlador fuzzy deve-se ter um modelo fuzzy que represente as dinâmicas da planta não-linear. Portanto, primeiro representa-se o sistema pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno. Aqui aproximou-se o sistema através das seguintes duas regras do modelo fuzzy, como efetuado em (Ma et al., 1998):

$$\begin{aligned} \text{Regra 1 (Planta)} : & \quad \text{SE } x_1(t) \text{ está em torno de } 0, \\ & \quad \text{ENTÃO } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) \\ y(t) = C_1 x(t). \end{cases} \\ \text{Regra 2 (Planta)} : & \quad \text{SE } x_1(t) \text{ está em torno de } \pm \pi/3, \\ & \quad \text{ENTÃO } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) \\ y(t) = C_2 x(t). \end{cases} \end{aligned}$$

A lei de controle resultante é

$$\begin{aligned} \text{Regra 1 (Controlador)} : & \quad \text{SE } x_1(t) \text{ está em torno de } 0, \\ & \quad \text{ENTÃO } u(t) = -F_1 x(t). \\ \text{Regra 2 (Controlador)} : & \quad \text{SE } x_1(t) \text{ está em torno de } \pm \pi/3, \\ & \quad \text{ENTÃO } u(t) = -F_2 x(t), \end{aligned}$$

sendo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ a_{21} & a_{22} & 0,0 & a_{24} \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \\ a_{41} & a_{42} & 0,0 & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0,0 \\ b_2 \\ 0,0 \\ b_4 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0,0 \quad 0,0 \quad 1,0 \quad 0,0],$$

$$a_{21} = \frac{(M+m)mg l}{a}, \quad a_{22} = \frac{-f_1(M+m)}{a}, \quad a_{24} = \frac{f_0 m l}{a},$$

$$a_{41} = \frac{-m^2 g l^2}{a}, \quad a_{42} = \frac{f_1 m l}{a}, \quad a_{44} = \frac{-f_0(J+ml^2)}{a},$$

$$b_2 = \frac{-ml}{a}, \quad b_4 = \frac{J + ml^2}{a},$$

$$a = (M + m)(J + ml^2) - m^2l^2,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0,0 & a'_{24} \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \\ a'_{41} & a'_{42} & 0,0 & a'_{44} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0,0 \\ b'_2 \\ 0,0 \\ b'_4 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [0,0 \quad 0,0 \quad 1,0 \quad 0,0],$$

$$a'_{21} = \frac{3\sqrt{3}(M+m)mg l}{2\pi a'}, \quad a'_{22} = \frac{-f_1(M+m)}{a'},$$

$$a'_{24} = \frac{f_0 ml \cos(\pi/3)}{a'}, \quad a'_{41} = -\frac{3\sqrt{3} m^2 gl^2 \cos(\pi/3)}{2\pi a'},$$

$$a'_{42} = \frac{f_1 ml \cos(\pi/3)}{a'}, \quad a'_{44} = \frac{-f_0(J + ml^2)}{a'},$$

$$b'_2 = \frac{-ml \cos(\pi/3)}{a'}, \quad b'_4 = \frac{J + ml^2}{a'},$$

$$a' = (M + m)(J + ml^2) - m^2l^2[\cos(\pi/3)]^2.$$

Um procedimento metódico para a determinação dos modelos locais é apresentado em (Teixeira and Žak, 1999).

As funções de pertinência para as regras da planta 1 e 2 são respectivamente:

$$\alpha_1(x_1(t)) =$$

$$\left\{ 1,0 - \frac{1,0}{1,0 + e^{-7,0[x_1(t) - \pi/6]}} \right\} \left\{ \frac{1,0}{1,0 + e^{-7,0[x_1(t) + \pi/6]}} \right\}$$

e

$$\alpha_2(x_1(t)) = 1 - \alpha_1(x_1(t)).$$

Como $r = s = 2$, os projetos descritos a seguir consideram os resultados do Corolário 1. Estes projetos foram realizados utilizando o software LMISol (Oliveira et al., 1997). Todas simulações apresentadas nos próximos exemplos empregaram o modelo não-linear do pêndulo descrito em (24) e foram feitas com o MATLAB.

Exemplo 3 - Estabilidade: Primeiro projetou-se um regulador fuzzy estável considerando-se a taxa de decaimento nula, utilizando-se os resultados descritos na Seção 3.3, para o SCFC. O problema de projeto do sistema fuzzy contínuo neste caso é definido como segue:

Encontre \mathbf{X} , \mathbf{P}_{12} , \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 sujeito a $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{P}_{12} \geq 0$ e (17), sendo $\mathbf{Y} = 0$.

O software LMISol forneceu as matrizes \mathbf{X} , \mathbf{P}_{12} , \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 que solucionam as LMIs acima. Então foram obtidas as matrizes do controlador ($\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1}$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1}$):

$$\mathbf{F}_1 = [-96,4207 \quad -16,0122 \quad -4,8356 \quad -32,6352],$$

$$\mathbf{F}_2 = [-153,5370 \quad -25,9934 \quad -7,8314 \quad -38,5572].$$

Para ilustrar a validade da lei de controle projetada, que visou apenas a estabilidade, foi feita a simulação digital do sistema original (24) com a lei de controle (5) para $r = 2$, empregando F_1 e F_2 projetados acima. A Fig. 4 apresenta os resultados

obtidos. Para efeito de comparação a Fig. 4 apresenta também outros resultados de simulações referentes aos próximos exemplos.

Exemplo 4 - Taxa de Decaimento: Pode ser visto no Exemplo 3 que o tempo de estabilização do sistema é $t \cong 6s$. Na prática, é importante especificar a resposta transitória. O problema de projeto que considera a taxa de decaimento neste caso é definido como segue:

Maximize γ e encontre \mathbf{X} , \mathbf{P}_{12} , \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 sujeito a $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{P}_{12} \geq 0$ e (19), sendo $\mathbf{Y} = 0$.

Quando $\gamma = 1,5 < \gamma_{max}$, obtém-se pelo LMISol as matrizes \mathbf{X} , \mathbf{P}_{12} , \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 que solucionam as LMIs acima. Então foram obtidas as matrizes do controlador:

$$\mathbf{F}_1 = [-1587,4244 \quad -315,4873 \quad -466,1611 \quad -413,3526],$$

$$\mathbf{F}_2 = [-2874,8561 \quad -572,7537 \quad -846,8954 \quad -732,0994].$$

As linhas contínuas na Fig. 4 mostram as respostas de $x_1(t)$ e $u(t)$, sendo que o tempo de estabilização é $t \cong 2,7s$. O controlador projetado diminuiu o tempo de estabilização do sistema, mas exigiu uma alta amplitude da entrada de controle.

Neste exemplo não foi utilizado $\gamma_{max} = 2,03$ pois os ganhos de realimentação obtidos neste caso praticamente não são implementáveis.

Exemplo 5 - Taxa de Decaimento+Restrição na Entrada de Controle: Pode ser verificado no Exemplo 4 que $max_t \|u(t)\|_2 = 2704,01$. Na prática existe uma limitação da entrada de controle. É importante considerar não somente a taxa de decaimento mas também a restrição na entrada de controle. O problema de projeto que considera a taxa de decaimento e a restrição na entrada de controle é definido como segue:

Maximize γ e encontre \mathbf{X} , \mathbf{P}_{12} , \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 sujeito a $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{P}_{12} \geq 0$, (19), (20) e (21), sendo $\mathbf{Y} = 0$, $\mu = 200$ e $\mathbf{x}(0) = [0,96 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Note que 0,96 rad corresponde a 55° .

Quando $\gamma = \gamma_{max} = 0,85$, a partir das matrizes obtidas pelo LMISol foram calculadas as matrizes do controlador:

$$\mathbf{F}_1 = [-100,4075 \quad -19,4875 \quad -12,0272 \quad -36,3688],$$

$$\mathbf{F}_2 = [-191,6522 \quad -38,7406 \quad -23,0668 \quad -49,0006].$$

A linha pontilhada na Fig. 4 mostra a resposta $x_1(t)$ e $u(t)$, onde o tempo para estabilizar o sistema é $t \cong 4,3s$. O controlador projetado também realizou a restrição da entrada pois $max_t \|u(t)\|_2 = 180,03 < \mu$.

Exemplo 6 - Estabilidade+Restrição na Entrada de Controle: Também é possível projetar um regulador fuzzy estável satisfazendo a restrição da entrada de controle, para a restrição na entrada $\mu = 200$ e $\mathbf{x}(0) = [0,96 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Encontre \mathbf{X} , \mathbf{P}_{12} , \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 sujeito a $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{P}_{12} \geq 0$, (17), (20) e (21), sendo $\mathbf{Y} = 0$, $\mu = 200$ e $\mathbf{x}(0) = [0,96 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

A solução encontrada foi

$$\mathbf{F}_1 = [-68,3823 \quad -13,2795 \quad -9,0490 \times 10^{-6} \quad -25,5947],$$

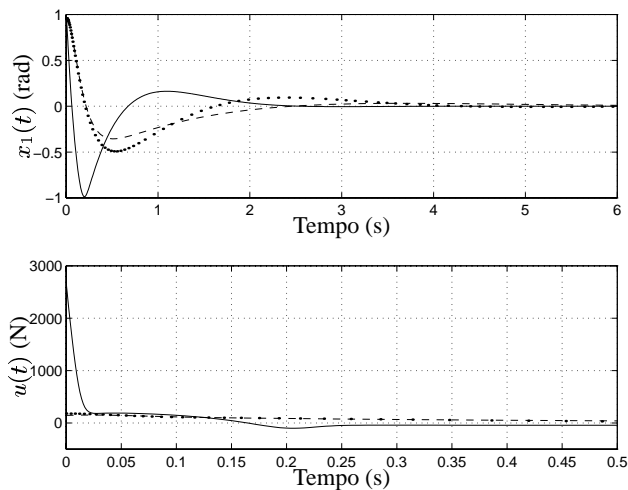


Figura 4: Respostas de $x_1(t)$ e $u(t)$ para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0,96 \ 0 \ 0]^T$ e considerando-se os casos: apenas estabilidade (linha tracejada); apenas taxa de decaimento (linha contínua); taxa de decaimento e restrição na entrada (linha pontilhada).

$$\mathbf{F}_2 = [-106,1515 \quad -21,5707 \quad 1,3709 \times 10^{-5} \quad -27,0206].$$

A linha tracejada na Fig. 5 mostra as respostas de $x_3(t)$ e $u(t)$. Pode ser verificado nesta figura que $\max_t \|u(t)\|_2 = 101,47 < \mu$.

A variável $x_3(t)$ possui um tempo de estabilização muito superior a 15 s. Esse tempo não é mostrado na Fig. 5, sendo mostrado na figura apenas o valor máximo que $x_3(t)$ atinge.

Exemplo 7 - Estabilidade+Restrição na Entrada de Controle+Restrição na Saída de Controle: A resposta do sistema de controle no Exemplo 6 tem um grande valor de saída ($\max_t \|x_3(t)\|_2 = 7,65$) visto que a restrição na saída não é considerada no projeto de regulador fuzzy. Para melhorar a resposta, pode-se projetar um regulador fuzzy adicionando-se a restrição na saída.

Encontre \mathbf{X} , \mathbf{P}_{12} , \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 sujeito a $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{P}_{12} \geq 0$, (17), (20), (21) e (23), sendo $\mathbf{Y} = 0$, $\mu = 200$, $\lambda = 3,6$ e $\mathbf{x}(0) = [0,96 \ 0 \ 0]^T$.

A solução é obtida foi

$$\mathbf{F}_1 = [-107,5916 \quad -21,3158 \quad -22,7633 \quad -36,7818],$$

$$\mathbf{F}_2 = [-178,0852 \quad -36,1143 \quad -40,4190 \quad -45,9869].$$

A linha contínua na Fig. 5 mostra a resposta de $x_3(t)$ e $u(t)$. Note que a resposta do sistema de controle satisfaz as restrições $\max_t \|u(t)\|_2 = 167,90 < \mu$ e $\max_t \|x_3(t)\|_2 = 1,88 < \lambda$.

Em outras simulações, com condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0 \ x_2(0) \ 0 \ 0]^T$ e ainda com o mesmo controlador, foi verificado que o sistema é assintoticamente estável para $-5,5\pi \leq x_2(0) \leq 5,5\pi$.

Os resultados das simulações dos exemplos acima atestam o bom desempenho dos sistemas de controle projetados.

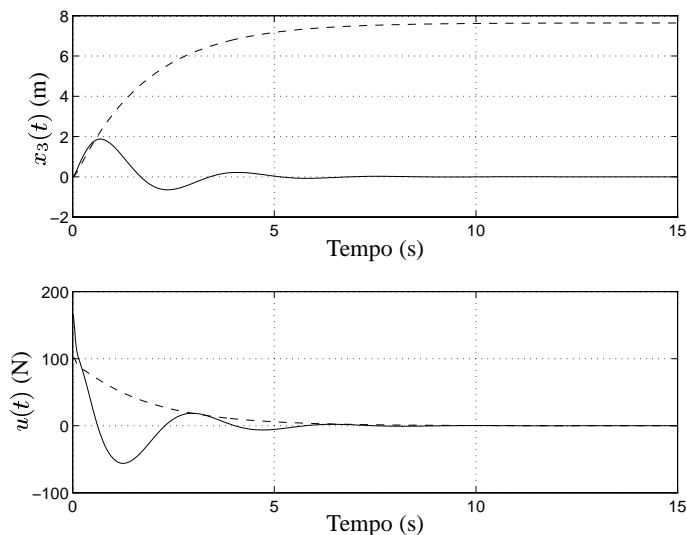


Figura 5: Respostas de $x_3(t)$ e $u(t)$ para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0,96 \ 0 \ 0]^T$ e considerando-se os casos: estabilidade e restrição na entrada (linha tracejada); estabilidade, restrição na entrada e restrição na saída (linha contínua).

4 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou novas condições para o estudo da estabilidade e projeto de reguladores, adequadas a sistemas não-lineares descritos por modelos fuzzy de Takagi-Sugeno. Os novos resultados concebidos permitem uma descrição direta em termos de LMIs e desta forma, podem ser facilmente resolvidas com softwares que solucionam problemas de programação semi-definida, que apresentam característica polinomial de convergência (Boyd et al., 1994). No projeto de reguladores fuzzy abordado é possível especificar além da estabilidade, a taxa de decaimento, restrições na entrada e na saída. São apresentadas provas teóricas e simulações digitais para validar os métodos propostos e finalmente, o controle completo de um pêndulo invertido. Um prosseguimento natural deste trabalho é o projeto de observadores e de reguladores com observadores, com condições mais relaxadas do que as descritas na literatura. Atualmente os autores deste trabalho já estão estudando este problema.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos revisores anônimos pelos comentários úteis e construtivos e também à FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro na execução deste trabalho.

Referências

- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, USA.
- Cao, S. G., Rees, N. W. and Feng, G. (1997a). Further Results About Quadratic Stability of Continuous-Time Fuzzy Control Systems, *International Journal of Systems Science* **28**(4): 397–404.
- Cao, S. G., Rees, N. W. and Feng, G. (1997b). Lyapunov-Like Stability Theorems for Discrete-Time Fuzzy Control Systems, *International Journal of Systems Science* **28**(3): 297–308.

- Friedland, B. (1996). *Advanced Control Systems Design*, Prentice-Hall, New Jersey 07632.
- Kosko, B. (1997). *Fuzzy Engineering*, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice-Hall, USA.
- Ma, X. J., Sun, Z. Q. and He, Y. Y. (1998). Analysis and Design of Fuzzy Controller and Fuzzy Observer, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(1): 41–51.
- Oliveira, M. C., Farias, D. P. and Geromel, J. C. (1997). *LMISol, User's guide*, UNICAMP, Campinas-SP, Brasil.
- Petrobom, H. C. (1999). *Controle de Sistemas Não-lineares Baseados em LMI Utilizando Modelos Fuzzy*, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, Ilha Solteira-SP. Tese de Mestrado.
- Sugeno, M. and Kang, G. T. (1988). Structure Identification of Fuzzy Model, *Fuzzy Sets and Systems* **28**: 15–33.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **15**(1): 116–132.
- Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1998). Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(2): 250–265.
- Tanaka, K., Nishimura, M. and Wang, H. O. (1998). Multi-Objective Fuzzy Control of High Rise/High Speed Elevators Using LMIs, *Proceedings of the American Control Conference*, Philadelphia, PA, pp. 3450–3454.
- Tanaka, K. and Sano, M. (1994). A Robust Stabilization Problem of Fuzzy Control Systems and Its Application to Backing up Control of a Truck-Trailer, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **2**(2): 119–134.
- Tanaka, K. and Sugeno, M. (1992). Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems, *Fuzzy Sets and Systems* **45**(2): 135–156.
- Teixeira, M. C. M. and Žak, S. H. (1999). Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(2): 133–142.
- Wang, H. O., Tanaka, K. and Griffin, M. F. (1996). An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **4**(1): 14–23.
- Will, A. B., Teixeira, M. C. M. and Žak, S. H. (1997). Four Wheel Steering Control Systems Design Using Fuzzy Models, *Sixth IEEE Conference on Control Applications*, Hartford CT USA, pp. 73–78.

APÊNDICE A: REGULADORES FUZZY PARA SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO

De forma análoga à efetuada na Seção 2, pode-se representar sistemas discretos no tempo não-lineares por modelos fuzzy TSK

(Tanaka, Ikeda and Wang, 1998):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)) = \\ &= \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\alpha) \mathbf{u}(t), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) = \mathbf{C}(\alpha) \mathbf{x}(t). \quad (26)$$

sendo que foi utilizada a notação $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(KT)$ e $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(KT+T)$, T é o período de amostragem, e $\alpha_i(\mathbf{z}(t))$, $i = 1, 2, \dots, r$ satisfazem (4).

Utilizando-se a lei de controle (5), sendo que $\mathbf{u}(t)$ representa $\mathbf{u}(KT)$, de (25) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(t) + \\ &+ 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right\} \mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (27)$$

sendo

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j.$$

As condições mais gerais, disponíveis na literatura, objetivando o projeto de reguladores fuzzy para sistemas discretos no tempo foram propostas por (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998):

Lema 4 Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s , sendo $1 < s \leq r$. O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (27) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum \mathbf{P} e uma matriz simétrica semipositiva definida comum \mathbf{Q} tais que

$$\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} - \mathbf{P} + (s-1) \mathbf{Q} < 0 \quad (28)$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) - \mathbf{P} - \mathbf{Q} \leq 0, \quad i < j, \quad (29)$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$ excetuando-se os pares (i, j) tais que $\alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t)$.

O Teorema 3 apresenta novas condições para o projeto de reguladores fuzzy para sistemas discretos no tempo.

Teorema 3 Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s , sendo $1 < s \leq r$. Considere $i, j = 1, \dots, r$, sendo $i < j$ e defina

$$\mathbf{M}_{jj} = \mathbf{G}_{jj} = \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_j, \quad (30)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} = \frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i}{2}, \quad (31)$$

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ij} & \mathbf{W}_{ij}^T \\ \mathbf{W}_{ij} & \mathbf{S}_{ij} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (32)$$

$$\mathbf{N}_{jj} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} - (s-1)\mathbf{Y} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{jj}^T \\ \mathbf{M}_{jj}\mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} e \quad (33)$$

$$\mathbf{N}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t), \\ \begin{bmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{Y} - \mathbf{R}_{ij} & \mathbf{X}\mathbf{M}_{ij}^T - \mathbf{W}_{ij}^T \\ \mathbf{M}_{ij}\mathbf{X} - \mathbf{W}_{ij} & \mathbf{X} - \mathbf{S}_{ij} \end{bmatrix}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (34)$$

Então, o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema de controle fuzzy discreto descrito por (27) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, uma matriz simétrica positiva semidefinida comum \mathbf{Y} e matrizes semidefinidas positivas \mathbf{T}_{ij} tais que

$$\mathbf{Nt} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} & \dots & \mathbf{N}_{1r} \\ \mathbf{N}_{12} & \mathbf{N}_{22} & \dots & \mathbf{N}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{N}_{1r} & \mathbf{N}_{2r} & \dots & \mathbf{N}_{rr} \end{bmatrix} > 0. \quad (35)$$

Prova: É análoga à prova do Teorema 1 e utiliza o complemento de Schur (Boyd et al., 1994). Detalhes podem ser encontrados em (Pietrobom, 1999).

Corolário 2 Se $r = s$, então pode-se adotar $\mathbf{Y} = 0$ nas condições do Teorema 3.

Prova: Similar à prova do Corolário 1.

Teorema 4 Se as condições do Lema 4 são satisfeitas, então as condições do Teorema 3 também serão.

Prova: Similar à prova do Teorema 2.

Para as novas condições de estabilidade propostas neste trabalho, para sistemas fuzzy discretos no tempo, o problema de projeto para determinar os ganhos de realimentação \mathbf{F}_i , para $i = 1, \dots, r$, pode ser definido por meio de LMIs, como segue:

Encontre \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{R}_{ij} , \mathbf{S}_{ij} , \mathbf{W}_{ij} e \mathbf{M}_i para $i, j = 1, 2, \dots, r$, sendo $i < j$, satisfazendo $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{Y} \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \dots & \mathbf{D}_{1r} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{22} & \dots & \mathbf{D}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{1r} & \mathbf{D}_{2r} & \dots & \mathbf{D}_{rr} \end{bmatrix} > 0 \quad \text{e} \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ij} & \mathbf{W}_{ij}^T \\ \mathbf{W}_{ij} & \mathbf{S}_{ij} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (37)$$

sendo

$$\mathbf{D}_{jj} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} - (s-1)\mathbf{Y} & \mathbf{X}\mathbf{A}_j^T - \mathbf{M}_j^T\mathbf{B}_j^T \\ \mathbf{A}_j\mathbf{X} - \mathbf{B}_j\mathbf{M}_j & \mathbf{X} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha_i(\mathbf{z}(t))\alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 0, \forall \mathbf{z}(t), \\ \begin{bmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{Y} - \mathbf{R}_{ij} & \dots \\ \frac{1}{2}(\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_j + \mathbf{A}_j\mathbf{X} - \mathbf{B}_j\mathbf{M}_i) - \mathbf{W}_{ij} & \dots \\ \dots \frac{1}{2}(\mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_j^T\mathbf{B}_i^T + \mathbf{X}\mathbf{A}_j^T - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_j^T) - \mathbf{W}_{ij}^T & \\ \dots & \mathbf{X} - \mathbf{S}_{ij} \end{bmatrix}, \\ \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As condições acima seguem diretamente do Teorema 3.

Se existe solução, os ganhos de realimentação \mathbf{F}_i e uma \mathbf{P} comum podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}, \quad \text{e } \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1},$$

a partir das soluções \mathbf{X} e \mathbf{M}_i .

As condições acima são LMIs que devem ser aplicadas quando $r \neq s$. Quando $r = s$, levando-se em conta os resultados do Corolário 2, pode-se por simplicidade utilizar as mesmas condições descritas acima, considerando-se agora $\mathbf{Y} = 0$. De forma análoga à apresentada na Seção 3.3, pode-se incorporar nas LMIs acima especificações da taxa de decaimento e restrições na entrada e na saída da planta (Pietrobom, 1999).