

---

# ESTUDO DA CONDIÇÃO DE TRANSVERSALIDADE EM SISTEMAS DE UMA MÁQUINA VERSUS BARRAMENTO INFINITO

**Luís F. C. Alberto**  
luis@sel.eesc.sc.usp.br

**Newton G. Bretas**  
ngbretas@sel.eesc.sc.usp.br

Departamento de Engenharia Elétrica - Escola de Engenharia de São Carlos  
Universidade de São Paulo

---

**RESUMO** – O principal objetivo deste artigo é a aplicação do método de Melnikov ao cálculo de órbitas heteroclínicas em sistemas de potência compostos por uma máquina versus barramento infinito e o teste da condição de transversalidade requerida pelo método BCU de análise de estabilidade transitória. Primeiramente, o método de Melnikov é utilizado para obter-se uma primeira aproximação para o amortecimento mínimo, ou alternativamente a potência mecânica máxima, que deveria estar associada ao sistema de forma a garantir a satisfação da condição de transversalidade. Esta aproximação é obtida sem resolver qualquer equação diferencial. Em seguida, esta aproximação é utilizada como condição inicial para um processo iterativo monotonicamente convergente o qual é muito simples de implementar e não requer o conhecimento da trajetória do sistema em falta.

**Palavras Chaves** : Estabilidade Transitória, Métodos Energéticos, Estimativa de Amortecimento.

**ABSTRACT** – The main concern of this paper is the application of the Melnikov's method for computing heteroclinic orbits in a classical SMIB power system model and testing the one-parameter transversality condition required in the BCU method for transient stability analysis. First of all, the Melnikov's method is used to give a first approximation for the minimum damping coefficient, or alternatively for the maximum input mechanical power, that should be associated to the system, so that the transversality condition is satisfied. This first approximation is obtained without solving any differential equation. After that, this approximation is used as an initial condition for a monotonically convergent process which is very easy to implement and does not require knowledge of fault trajectory at all.

**Keywords** : Transient Stability Analysis, Energy Methods, Damping Estimation.

## 1 INTRODUÇÃO

Muitos avanços têm ocorrido no desenvolvimento de metodologias para análise de estabilidade transitória em sistemas elétri-

cos de potência. Dentre estas metodologias, os métodos diretos são adequados para aplicações em tempo real uma vez que estes são capazes de prever estabilidade sem requerer a solução das respectivas equações diferenciais. Dentre os métodos diretos existentes, o método BCU (Boundary Controlling Unstable Equilibrium Point) (Chiang, Wu & Varaya 1994) vem sendo aceito, pela comunidade científica, como sendo o método energético mais eficiente para o estudo da estabilidade transitória. Entretanto, este apresenta alguns problemas que ainda não foram resolvidos. Llamas, Lopez, Mili, Phadke & Thorp (1995) mostraram exemplos no qual o BCU prediz estabilidade mas o sistema torna-se instável logo após o primeiro "swing". Em verdade, este tipo de predição errônea de estabilidade ocorre para um grande número de casos e Llamas et al. associaram-no a não satisfação da condição de transversalidade requerida na teoria do método BCU. Recentemente, Paganini & Lesieutre (1999) mostraram que a condição de transversalidade não é satisfeita genericamente, portanto a validade do método BCU não pode ser justificada teoricamente.

Assim como o método BCU, todos os métodos baseados no conceito de ponto de equilíbrio de controle são adequados apenas para análises de estabilidade de primeiro "swing" e estes não podem garantir nada a respeito da manutenção da estabilidade nos "swings" subsequentes. Isto ocorre porque os métodos até então implementados não testam se o sistema satisfaz a condição de transversalidade.

A condição de transversalidade está intimamente relacionada com os parâmetros do sistema. Neste trabalho, uma metodologia é desenvolvida na qual calcula-se, para o sistema de uma máquina versus barramento infinito, um amortecimento mínimo, ou alternativamente a potência máxima, que deve estar associado à máquina de tal forma que a estabilidade seja garantida de forma absoluta, isto é, para todo tempo após a ocorrência do defeito. O amortecimento assim calculado pode ser utilizado apenas para testar a condição de transversalidade ou como parâmetro de projeto dos reguladores; alternativamente a potência mecânica máxima pode ser utilizada como restrição ao despacho de potência do gerador.

## 2 REVISÃO DO MÉTODO BCU

O método BCU foi originalmente desenvolvido para estimar a área de atração de um sistema de potência utilizando a informa-

---

<sup>0</sup>Artigo submetido em 19/11/99

1a. Revisão em 20/03/00; 2a. Revisão em 22/11/00; 3a. Revisão em 24/01/01

Aceito sob recomendação do Ed. Cons. Prof. Dr. José Luiz Resende Pereira

ção contida no seu sistema gradiente associado que possui menor dimensão. Seja o sistema de potência descrito pelo seguinte sistema de equações, onde as máquinas são modeladas como sendo uma força eletromotriz constante em série com sua reatância transitória:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -M^{-1}D\omega - \frac{\partial V_p}{\partial \delta}\end{aligned}\quad (1)$$

Seu sistema gradiente associado é descrito por:

$$\dot{\delta} = -\frac{\partial V_p}{\partial \delta}\quad (2)$$

A variável  $\delta$  é o ângulo do rotor da máquina,  $\omega$  é o desvio de frequência angular do rotor,  $D$  e  $M$  são matrizes diagonais compostas respectivamente pelos coeficientes de amortecimento e de inércia da máquina. A função  $V = \sum_i \frac{1}{2}\omega_i^2 + V_p$  é uma função de Liapunov associada a (1) e  $V_p$  corresponde à parte de energia potencial. Observe também que  $V_p$  é uma função de Liapunov associada a (2).

Para estudar a relação entre os dois sistemas dinâmicos anteriores, a seguinte deformação é feita (Chiang, Wu & Varaya 1988), (Paganini & Lesieutre 1999):

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= (1-\lambda)\omega - \lambda \frac{\partial V_p}{\partial \delta} \\ \dot{\omega} &= -M^{-1}D\omega - (1-\lambda) \frac{\partial V_p}{\partial \delta}\end{aligned}\quad (3)$$

Observe que  $\lambda = 0$  gera (1) enquanto  $\lambda = 1$  gera um sistema produto que contém (2).

#### Condição de Transversalidade:

O método BCU requer que os pontos de equilíbrio instáveis de controle pertençam à fronteira da área de atração  $\partial(\delta^s, 0)$  do ponto de equilíbrio estável pós-falta  $(\delta^s, 0)$  de (3) para todo  $\lambda \in [0, 1]$ . Formalmente esta hipótese é atendida impondo-se a seguinte condição de transversalidade:

**Condição  $\mathcal{T}$**  : todas as variedades estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio instáveis que pertencem à fronteira da área de atração  $\partial A(\delta^s, 0)$  interceptam-se transversalmente (Paganini & Lesieutre 1999).

Se a condição  $\mathcal{T}$  é satisfeita para  $\lambda \in [0, 1]$  então tem-se o seguinte resultado extraído de (Chiang et al. 1994):

**Theorem 1** *Suponha que o sistema dinâmico (3) satisfaz as seguintes hipóteses para todo  $\lambda \in [0, 1]$ :*

(i) *Condição  $\mathcal{T}$  é satisfeita;*

(ii) *o número de pontos de equilíbrio na fronteira da área de atração é finito.*

*Então, o ponto de equilíbrio instável  $(\bar{\delta})$  pertence à fronteira da área de atração de (2) se e somente se  $(\bar{\delta}, 0)$  pertence à fronteira da área de atração de (1).*

Sob estas hipóteses, o método BCU prediz corretamente a estabilidade do sistema. Entretanto a hipótese (i) é muito forte e não é satisfeita para um grande número de casos. A verificação desta condição é o principal objetivo desta pesquisa.

### 3 A CONDIÇÃO DE TRANSVERSALIDADE EM SISTEMAS DE UMA MÁQUINA VERSUS BARRAMENTO INFINITO

Considere o sistema de uma máquina versus barramento infinito da Figura 1.

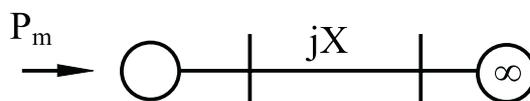


Figura 1: Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito

Este sistema é descrito pelo seguinte par de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega \\ M \dot{\omega} &= P_m - P_{max} \sin \delta - D\omega\end{aligned}\quad (4)$$

onde  $P_m$  é a potência mecânica líquida injetada no gerador e  $P_{max}$  é a capacidade de transmissão de potência ativa máxima da linha.

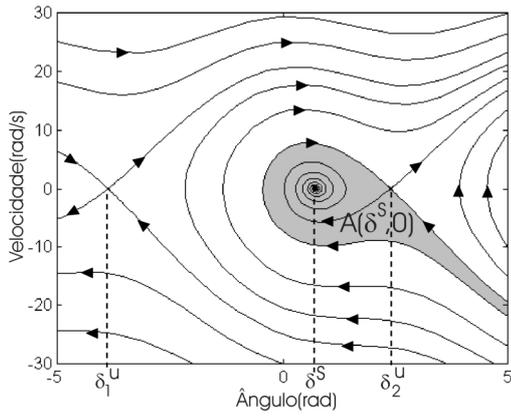
Para escrever (4) na forma de (1) basta escolher

$$V_p = -\frac{P_m}{M}\delta - \frac{P_{max}}{M} \cos \delta + cte$$

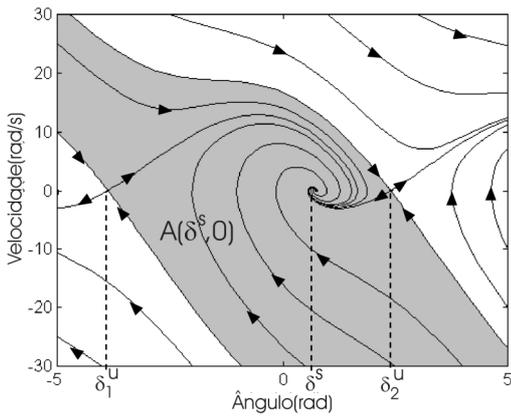
Seja  $(\delta^s, 0)$  o ponto de equilíbrio estável pós falta do sistema (4), e sejam  $(\delta_2^u, 0) = ((\pi - \delta^s), 0)$  e  $(\delta_1^u, 0) = ((-\pi - \delta^s), 0)$  os pontos de equilíbrio instáveis mais próximos de  $(\delta^s, 0)$ .

Dependendo do valor dos parâmetros do sistema, duas situações podem ocorrer. Na primeira situação, o ponto de equilíbrio instável  $(\delta_2^u, 0)$  pertence à fronteira  $\partial A(\delta^s, 0)$ , enquanto que o ponto de equilíbrio instável  $(\delta_1^u, 0)$  não pertence. Logo, a condição de transversalidade não é satisfeita e a fronteira da área de atração é composta apenas pela variedade estável do ponto de equilíbrio  $(\delta_2^s, 0)$  conforme apresentado no retrato de fase da Figura 2a.

Por outro lado, se por exemplo o coeficiente de amortecimento for suficientemente grande, o comportamento global do sistema será diferente do caso anterior como pode ser visto na Figura 2b. Nesta situação, ambos os pontos de equilíbrio instáveis pertencem à fronteira  $\partial A(\delta^s, 0)$  e a condição de transversalidade é satisfeita. Observe que a fronteira da área de atração, neste caso, é composta pela união das variedades estáveis de ambas as selas.



(a)



(b)

Figura 2: Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito: (a) Retrato de Fase -  $D=0.05$ , (b) Retrato de Fase -  $D=0.28$

Esta mudança de comportamento global ocorre devido a uma bifurcação global que ocorre na forma de uma conexão de selas degenerada (órbita heteroclínica), portanto a identificação destas conexões é fundamental para o estudo da condição de transversalidade.

#### 4 MÉTODO DE MELNIKOV: PERTURBAÇÕES DE ÓRBITAS HETEROCLÍNICAS PLANARES

Das análises anteriores verifica-se a importância da condição de transversalidade e sua relação com bifurcações globais em sistemas de potência. O principal objetivo desta seção é o estudo das bifurcações globais devido a conexões de selas degeneradas. O método de Melnikov (Guckenheimer & Holmes 1983) é adequado para estudar esta classe de problemas, pois pode-se obter informações a respeito dos sistemas perturbados utilizando-se a informação contida nas soluções do sistema não perturbado.

Considere os sistemas descritos segundo a equação a seguir:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x) \quad (5)$$

onde  $x = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  e  $g(x) =$

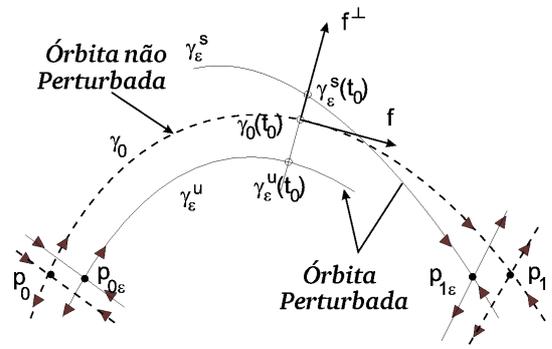


Figura 3: Órbitas do sistema perturbado e não perturbado

$(g_1(x), g_2(x))$  são funções  $C^r$  ( $r \geq 2$ ) limitadas em conjuntos limitados.

O termo  $\varepsilon g(x)$  é uma pequena perturbação e o sistema não-perturbado é Hamiltoniano com

$$f_1(x) = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad f_2(x) = -\frac{\partial H}{\partial u}.$$

Admite-se que, para  $\varepsilon = 0$ , o sistema apresenta uma órbita heteroclínica  $\gamma_0(t)$  a qual conecta duas selas  $p_0$  e  $p_1$  (veja Figura 3).

Sob as hipóteses anteriores e lembrando que as selas são pontos de equilíbrio hiperbólicos, os seguintes resultados de perturbação são válidos:

**Lema 1** Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, (5) apresenta uma única sela hiperbólica  $\varepsilon$ -próxima de  $p_0$  e uma única sela hiperbólica  $\varepsilon$ -próxima de  $p_1$ .

**Lema 2** As variedades locais estáveis e instáveis  $W_{loc}^s(p_1)$  e  $W_{loc}^u(p_1)$  do sistema perturbado são  $C^r$  próximas daquelas do sistema não perturbado ( $\gamma_0(t)$ ). Além disso, as órbitas  $\gamma_\varepsilon^s(t)$  e  $\gamma_\varepsilon^u(t)$  pertencentes respectivamente a  $W^s(p_1)$  e  $W^u(p_0)$  podem ser expressas como a seguir, com validade uniforme nos intervalos indicados.

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon^s(t) &= \gamma_0(t) + \varepsilon \eta_1^s(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad t \in [t_0, \infty); \\ \gamma_\varepsilon^u(t) &= \gamma_0(t) + \varepsilon \eta_1^u(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad t \in (-\infty, t_0] \end{aligned}$$

As demonstrações dos Lemas 1 e 2 serão omitidas, maiores detalhes podem ser encontrados em Guckenheimer & Holmes (1983). Estes Lemas garantem a existência dos pontos de sela e a proximidade entre as variedades dos sistemas perturbado e não perturbado sob a influência de pequenas perturbações. A Figura 3 mostra as órbitas do sistema perturbado e não perturbado.

A partir dos resultados clássicos de perturbação acima é possível demonstrar o Teorema 2, o qual será enunciado a seguir. Este aplica-se ao estudo de órbitas heteroclínicas planares sob a influência de pequenas perturbações, fornecendo condições nas quais a órbita heteroclínica é preservada sob a influência destas pequenas perturbações. Com isto em mente defina o número de Melnikov

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_0(t)) \wedge g(\gamma_0(t)) dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle f^{\perp}(\gamma_o(t)), g(\gamma_o(t)) \rangle dt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 g_2 - f_2 g_1) dt = \int_{\gamma_o} (g_2 du - g_1 dv)$$

onde  $\wedge$  denota o produto vetorial,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno usual e  $f^{\perp}$  denota o vetor normal ao vetor  $f$  conforme indicado na Figura 3. Observe que  $L$  é uma medida de distância entre a variedade instável  $W^u(\delta_1, 0)$  e a variedade estável  $W^s(\delta_2, 0)$ . De uma outra maneira, pode-se interpretar o número de Melnikov como sendo uma medida de quanto perpendicular é a perturbação  $g(x)$  ao campo vetorial  $f(x)$  ao longo da órbita heteroclínica  $\gamma_o(t)$ .

**Theorem 2** Se  $L = 0$  independentemente de  $\varepsilon$ , então para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, a órbita heteroclínica é preservada. Se  $L \neq 0$  então  $W^u(p_{0\varepsilon}) \cap W^s(p_{1\varepsilon}) = \emptyset$ .

A demonstração deste teorema será omitida uma vez que esta é um caso particular dos resultados demonstrados em Gukenheimer & Holmes (1983).

## 5 DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO CRÍTICO

De forma a aplicar o Método de Melnikov ao estudo da condição de transversalidade, é conveniente reescrever a equação (3) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= (1 - \lambda)\omega - \varepsilon\lambda \left( -\frac{P_m}{M} + \frac{P_{max}}{M} \sin \delta \right) \\ \dot{\omega} &= -(1 - \lambda)\frac{P_{max}}{M} \sin \delta + \varepsilon \left( (1 - \lambda)\frac{P_m}{M} - \frac{D}{M}\omega \right) \end{aligned} \quad (6)$$

onde  $\varepsilon \left( \frac{\lambda \left( \frac{P_m}{M} - \frac{P_{max}}{M} \sin \delta \right)}{(1 - \lambda)\frac{P_m}{M} - \frac{D}{M}\omega} \right)$  é considerada ser uma pequena perturbação. Observe que o sistema não perturbado é Hamiltoniano com

$$H = (1 - \lambda) \left[ \frac{\omega^2}{2} + \frac{P_{max}}{M}(1 - \cos \delta) \right]$$

e este apresenta uma órbita heteroclínica que conecta duas selas que possuem o mesmo valor de energia. Observe também que o sistema original (3) é obtido tomando-se  $\varepsilon = 1$ . O método de Melnikov será utilizado para estudar a relação entre os parâmetros do sistema de tal forma que a órbita heteroclínica seja preservada para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Por razões de simplicidade admitir-se-á que  $P_{max}$  e  $M$  são constantes fixas e que apenas  $D$  e  $P_m$  são parâmetros a serem analisados.

Neste exemplo em particular, o número de Melnikov é dado por

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma_o} (g_2 du - g_1 dv) = \\ &= \frac{1}{M} \int_{\gamma_o} [(1 - \lambda)P_m - D\omega] d\delta - \lambda [P_m - P_{max} \sin \delta] d\omega \end{aligned} \quad (7)$$

Para entender o significado físico do número de Melnikov, admita que  $H$  seja uma função de Liapunov do sistema perturbado. Ao longo de uma trajetória  $\Gamma$ , a energia do sistema varia com uma taxa de crescimento dada por:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \varepsilon \left[ \left( \frac{P_m}{M}(1 - \lambda) - \frac{D}{M}\omega \right) (1 - \lambda)\omega + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \lambda)\frac{P_{max}}{M} \sin \delta \lambda \left( \frac{P_m}{M} - \frac{P_{max}}{M} \sin \delta \right) \right] \end{aligned}$$

Integrando a equação anterior ao longo da órbita heteroclínica do sistema não perturbado encontra-se uma expressão para a variação de energia ao longo deste caminho:

$$\Delta H = \frac{\varepsilon}{M} \int_{\gamma_o} [(1 - \lambda)P_m - D\omega] d\delta - \frac{\varepsilon}{M} \int_{\gamma_o} \lambda [P_m - P_{max} \sin \delta] d\omega \quad (8)$$

Observe que o número de Melnikov, a menos de uma constante  $\varepsilon$ , é igual à variação de energia  $\Delta H$  ao longo da órbita heteroclínica  $\gamma_o$ . Se esta variação de energia é igual a zero então a órbita heteroclínica é preservada.

Para calcular o número de Melnikov é necessário calcular uma integral de linha ao longo da órbita heteroclínica  $\gamma_o$  do sistema não perturbado. Como o sistema não perturbado é conservativo, o valor de  $H$  permanece constante e igual a  $(1 - \lambda)2\frac{P_{max}}{M}$  ao longo desta órbita. Portanto, esta órbita pode ser facilmente calculada como sendo:

$$\omega(\delta) = \sqrt{2\frac{P_{max}}{M}(1 + \cos \delta)}, \quad \delta \in (-\pi, +\pi)$$

Substituindo esta última expressão na equação (7), e resolvendo a equação para  $L = 0$  encontra-se a seguinte condição para a preservação da órbita heteroclínica para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno:

$$\pi(1 - \lambda)P_m - 4D\sqrt{\frac{P_{max}}{M}} - \frac{4P_{max}}{3}\sqrt{\frac{P_{max}}{M}}\lambda = 0$$

Como  $\lambda \in [0, 1]$  tem-se que a condição de transversalidade será satisfeita para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno se e somente se

$$P_m < \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{P_{max}}{M}} D. \quad (9)$$

Caso contrário existirá algum  $\bar{\lambda} \in [0, 1]$  tal que a órbita heteroclínica é preservada para  $\lambda = \bar{\lambda}$  e conseqüentemente a condição de transversalidade não será atendida.

Obviamente o resultado obtido anteriormente é válido apenas para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Entretanto, deseja-se estudar a condição de transversalidade para  $\varepsilon = 1$ . A seguir apresentar-se-á um processo iterativo para estudar a bifurcação global do sistema original. O resultado obtido anteriormente com o método de Melnikov será utilizado como condição inicial para este processo iterativo.

### Processo de Refinamento

Ainda que o método de Melnikov seja útil para dar uma primeira aproximação da condição de bifurcação global, o método de refinamento apresentado nesta seção pode ser utilizado para o estudo desta bifurcação sem necessitar do método de Melnikov.

Este é bastante simples e está baseado apenas em conceitos energéticos.

Conclui-se a partir de (8) que, para  $\varepsilon = 1$  e  $\lambda = 0$ , a variação de energia ao longo de uma trajetória  $\Gamma$  qualquer pode ser descrita pela integral:

$$\Delta H = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} [P_m - D\omega] d\delta$$

Por razões de simplicidade considere, nesta seção,  $P_m$  como sendo uma constante e  $D$  o único parâmetro do sistema a ser determinado. Estamos interessados em calcular o valor de  $D$  no ponto de bifurcação. Seja  $D_{cr}$  este valor.

Para  $D = D_{cr}$ , existirá uma órbita  $\Gamma_{D_{cr}}$  do sistema (4) conectando os dois pontos de sela (Fig. 4a). Seu  $\alpha$ -limite será  $(\delta_1^u, 0)$  e seu  $\omega$ -limite será  $(\delta_2^u, 0)$ . A variação de energia  $\Delta H$  neste caminho (órbita heteroclínica) será igual a zero, isto é, a energia perdida por amortecimento será igual à energia injetada pela potência mecânica:

$$\int_{\Gamma_{D_{cr}}} D\omega d\delta = P_m(\delta_2^u - \delta_1^u) \quad (10)$$

O caminho  $\Gamma_{D_{cr}}$  define uma área que é proporcional às perdas por amortecimento, isto é:

$$Perdas_{cr} = D_{cr} Area_{cr} = D_{cr} \int_{\Gamma_{D_{cr}}} \omega(\delta) d\delta \quad (11)$$

Fazendo  $Perdas_{cr} = P_m(\delta_2^u - \delta_1^u)$ , basta uma boa estimativa da  $Area_{cr}$  para calcular  $D_{cr}$ . Com isto em mente define-se:

$$Area_i = \int_{\Gamma_{D_i} \cap (A(\delta^s) \times \mathbb{R}^+)} \omega(\delta) d\delta \quad (12)$$

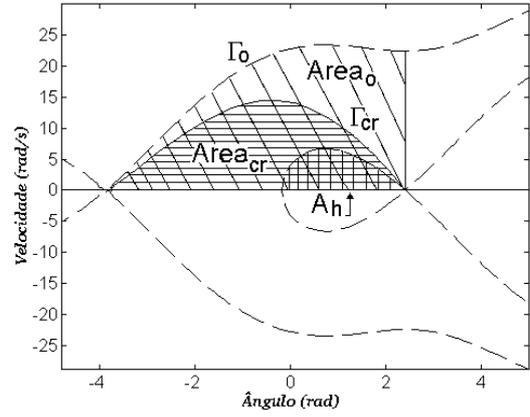
como sendo a área sob a órbita  $\Gamma_{D_i}$  do sistema (4) quando  $D = D_i$ . (A órbita  $\Gamma_{D_i}$  é o componente da variedade instável de  $(\delta_1^u, 0)$  que inicialmente afasta-se do ponto de equilíbrio  $(\delta_1^u, 0)$  com velocidade  $\omega$  positiva. A Figura 4 mostra a área sob  $\Gamma_o$  e sob  $\Gamma_{D_{cr}}$ ).

O teorema a seguir sugere um método para obterem-se estimativas inferiores de  $D_{cr}$  por intermédio de um processo iterativo partindo de uma estimativa inicial  $D_o$ .

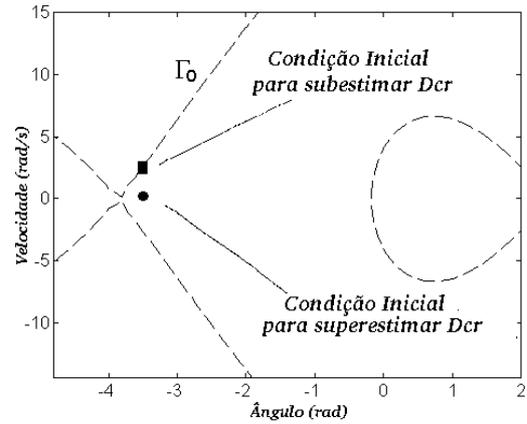
**Theorem 3** *A partir de uma estimativa inicial  $D_o$  satisfazendo  $0 < D_o < D_{cr}$ , defina recursivamente  $D_{i+1} = \frac{Perdas_{cr}}{Area_i}$  onde  $Area_i$  é a área sob a curva  $\Gamma_{D_i}$  conforme definido anteriormente. Então a seqüência  $\{D_i\}$  gerada pelo processo acima é monotonicamente crescente e converge para  $D_{cr}$  quando  $i \rightarrow \infty$ .*

A demonstração deste teorema está apresentada no apêndice.

Resultados similares podem ser provados para obterem-se estimativas superiores de  $D_{cr}$  tendo como condição inicial um coeficiente de amortecimento maior do que  $D_{cr}$ . A diferença residirá apenas nos limites da integral (12). Quando  $D > D_{cr}$ , a órbita  $\Gamma_D$  cruzará primeiro o eixo  $\omega = 0$  com um ângulo  $\delta_c < \delta_2^u$  e este ponto do cruzamento será o limite superior da integral.



(a)



(b)

Figura 4: Estimativa da  $Area_{cr}$ : (a)Áreas, (b)Condição Inicial

Teoricamente o método está completamente definido, entretanto, algumas considerações práticas são necessárias para que a integral utilizada para estimar  $D_{cr}$  possa ser calculada.

Para iniciar o processo iterativo, uma condição inicial deve ser fornecida. Para isto, o método de Melnikov apresentado anteriormente pode ser utilizado.

Na vizinhança do ponto de sela  $(\delta_1^u, 0)$ , o cálculo das órbitas pode se tornar muito lento. Para evitar estas dificuldades, as soluções numéricas para calcular as variedades invariantes apresentadas em Parker & Chua (1989) poderiam ser utilizadas. Nas proximidades do ponto de equilíbrio instável, a variedade instável pode ser aproximadamente descrita pelo autovetor instável associado  $\nu_u$ . Portanto, um ponto pertencendo ao subespaço gerado por este autovetor poderia ser utilizado como condição inicial para o processo de integração numérica, isto é

$$x_o = x_{eq} + \alpha \nu_u$$

onde  $\alpha$  é um escalar positivo. Como uma estimativa superior e outra inferior de  $D_{cr}$  são suficientes para este problema, o cálculo do autovetor é desnecessário. Portanto ao invés de calcular a condição inicial do modo proposto por Parker & Chua (1989), uma pequena velocidade positiva na órbita  $\Gamma_o$  será utilizada para iniciar o processo de estimativa inferior de  $D_{cr}$  e um ângulo um

pouco maior do que  $\delta_1^u$  no eixo  $\omega = 0$  será utilizado para estimar superiormente  $D_{cr}$  (Fig. 4b). O processo numérico não precisa ser muito preciso uma vez que se está interessado em uma estimativa de  $D_{cr}$ .

Se o coeficiente de amortecimento  $D$  do sistema em estudo é maior do que  $D_{cr}$ , então ambos os pontos de equilíbrio instáveis  $(\delta_1^u, 0)$  e  $(\delta_2^u, 0)$  pertencerão à fronteira da área de atração e consequentemente a condição de transversalidade estará satisfeita.

Observe que os mesmos cálculos poderiam ter sido realizados considerando  $D$  como uma constante e  $P_m$  como um parâmetro a ser determinado. Neste caso obtém-se o máximo valor de  $P_m$ , denominado  $P_{mcr}$ , que garante a satisfação da condição de transversalidade. Neste caso uma primeira aproximação é obtida da inequação (9) e na seqüência a equação (10) é resolvida iterativamente com  $D$  constante e  $P_m$  como sendo um parâmetro a ser determinado.

### Exemplo

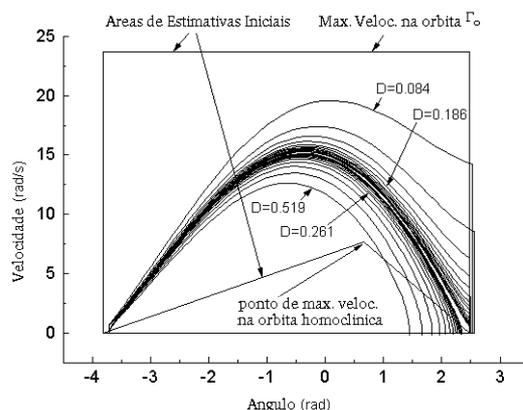
Considere o sistema de uma máquina versus barramento infinito com  $P_{max} = 3,0$ ,  $P_m = 2,0$ ,  $M = 0,05$  e  $D = 0,15$ . Este sistema não satisfaz a condição de transversalidade. Da inequação (9) conclui-se que o coeficiente de amortecimento deveria ser maior do que 0,202, ou alternativamente a potência mecânica injetada no gerador deveria ser menor do que 1,479, de forma a garantir a satisfação da condição de transversalidade pelo menos para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

O amortecimento crítico  $D_{cr}$ , como proposto neste artigo, foi calculado através do processo de refinamento como estando no intervalo (0,207;0,212); um passo de integração de 0.01s foi utilizado na determinação de  $D_{cr}$ . O processo iterativo está ilustrado na Figura 5a. Observe que a estimativa obtida com o método de Melnikov está muito próxima do valor real mostrando que este pode ser utilizado como uma boa aproximação para iniciar o processo iterativo tornando o cálculo bastante rápido.

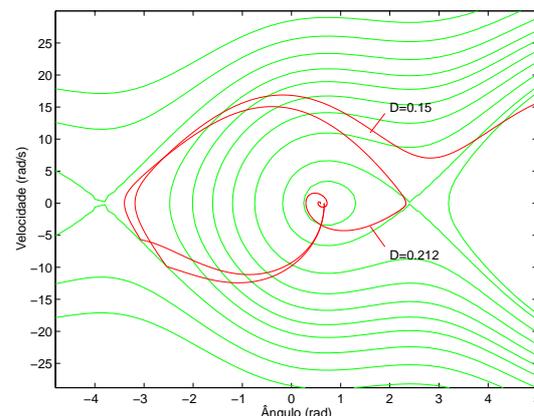
Considere agora um curto-circuito trifásico na barra terminal do gerador com uma resistência de falta igual a 0.075 p.u. Esta falta desacelera a máquina conforme mostrado na Figura 5b. Eliminando a falta no tempo predito pelo método BCU, o sistema perde o sincronismo no segundo “swing” como pode ser visto na Fig.5b. Este comportamento era esperado uma vez que  $0.15 < 0.207$ . Fazendo  $D = 0.212$  ( Estimativa superior do amortecimento ) e eliminando o defeito no tempo predito pelo BCU, o sistema permanece estável para todos os “swings” como é mostrado na Fig. 5b.

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se uma metodologia para calcular o mínimo coeficiente de amortecimento, ou alternativamente a máxima potência mecânica, necessário para garantir a satisfação da condição de transversalidade em sistemas de uma máquina versus barramento infinito. O método de Melnikov foi utilizado para dar uma primeira aproximação para o amortecimento crítico. Esta estimativa é obtida sem requerer a solução das equações diferenciais. A seguir, um processo iterativo monotonicamente convergente foi proposto para refinar a estimativa de  $D_{cr}$ . A metodologia é simples e pode ser compreendida através de conceitos energéticos. Esta não depende da trajetória em falta sendo portanto adequada a aplicações em tempo real. A eficácia da metodologia foi comprovada através de um exemplo. O



(a)



(b)

Figura 5: Órbitas do Sistema: (a)Método iterativo para calcular  $D_{cr}$ , (b)Casos Estável e Instável

método de redução de Lyapunov-Schmidt pode ser uma técnica alternativa para estender as idéias desenvolvidas neste trabalho para sistemas multimáquinas, entretanto, neste caso a condição de transversalidade não pode ser verificada estudando-se apenas uma única órbita o que torna este problema muito mais complexo.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado parcialmente pela FAPESP. Os autores também agradecem o Prof. Hildebrando Munhoz Rodrigues do Instituto de Ciências Matemáticas da Universidade de São Paulo (Campus São Carlos) pelas valiosas contribuições que deu durante o desenvolvimento desta pesquisa.

## APÊNDICE

Prova do Teorema 3:

**Demonstração:** Suponha que  $D_i < D_{cr}$ , então pode-se provar que  $Area_i > Area_{cr}$ , portanto  $D_{i+1} = \frac{Perdas_{cr}}{Area_i} < \frac{Perdas_{cr}}{Area_{cr}} = D_{cr}$ . Também pode-se provar que  $Perdas_{cr} > Perdas_i$  uma vez que com  $D_i < D_{cr}$  o sistema atinge o ângulo  $\delta_2^u$  com velocidade positiva, então  $D_{i+1} = \frac{Perdas_{cr}}{Area_i} > \frac{Perdas_i}{Area_i} = D_i$ . Logo a monotonicidade da seqüência está demonstrada e o seguinte é

verdade:

$$D_o < D_1 < D_2 < \dots < D_i < D_{i+1} < \dots < D_{cr}$$

Esta seqüência é crescente e limitada superiormente, portanto ela tenderá a um limite  $D^* \leq D_{cr}$ . Afirma-se que  $D^* = D_{cr}$ . Para provar esta última afirmação suponha que ela não seja verdadeira, ou seja  $D_i \rightarrow D^* < D_{cr}$ . Sejam  $Perdas_{D^*}$  e  $Area_{D^*}$  a perda por amortecimento e a área sob a órbita associada ao coeficiente de amortecimento  $D^*$ . Então  $D^* = \frac{Perdas_{D^*}}{Area_{D^*}}$ .

Como  $D_i \rightarrow D^*$  então  $Area_i \rightarrow Area_{D^*}$ . Também é evidente que  $Perdas_{D^*} < Perdas_{cr}$ . Como consequência, existe um número  $h > 0$  tal que  $Perdas_{cr} = Perdas_{D^*} + h$ .

Agora seja  $D_j < D^* < D_{cr}$ . Então  $D_{j+1}$  pode ser expresso por

$$\begin{aligned} D_{j+1} &= \frac{Perdas_{cr}}{Area_j} = \frac{Perdas_{D^*} + h}{Area_j} = \\ &= \frac{Perdas_{D^*}}{Area_j} + \frac{h}{Area_j} = \frac{Area_{D^*}}{Area_j} D^* + \frac{h}{Area_j} \end{aligned}$$

Como  $Area_j \rightarrow Area_{D^*}$  quando  $j \rightarrow \infty$ , tem-se:

$$D_{j+1} \rightarrow D^* + \frac{h}{Area_{D^*}}$$

Como  $\frac{h}{Area_{D^*}} > 0$ ,  $D_{j+1}$  será maior que  $D^*$  para  $j$  suficientemente grande o que contraria o fato da seqüência ser monotônica. Logo  $D^* = D_{cr}$  como queríamos demonstrar. ■

## Referências

- Chiang, H. D., Wu, F. F. & Varaya, P. P. (1988). Foundations of the potential energy boundary surface method for power system transient stability analysis, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **35**, n.6.
- Chiang, H. D., Wu, F. F. & Varaya, P. P. (1994). A bcu method for direct analysis of power system transient stability, *IEEE Trans. on Power Systems* pp. 1194–1208.
- Gukenheimer, J. & Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York.
- Llamas, A., Lopez, J. D. L. R., Mili, L., Phadke, A. G. & Thorp, J. S. (1995). Clarifications of the bcu method for transient stability analysis, *IEEE Transactions on Power Systems* **10**, n.1.
- Paganini, F. & Lesieutre, B. C. (1999). Generic properties, one-parameter deformations, and the bcu method, *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: fundamental Theory and Applications* **46**(6): 760–763.
- Parker, T. S. & Chua, L. O. (1989). *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, New York.