
FUNÇÕES DE LYAPUNOV LINEARES POR PARTES PARA SISTEMAS LINEARES COM CONTROLES SATURÁVEIS

Basílio E. A. Milani*
basilio@dt.fee.unicamp.br

Alessandra D. Coelho†
alessandra.coelho@maua.br

*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas
C.P. 6101 - 13081-970 - Campinas, SP, Brazil.

†Escola de Engenharia Mauá
Instituto Mauá de Tecnologia
Praça Mauá 1, Bairro Mauá - 09580-900 - S. Caetano do Sul, SP, Brazil.

ABSTRACT

This paper is concerned with piecewise-linear functions as Lyapunov function candidates for stability analysis of time-invariant discrete-time linear systems with saturating closed-loop control inputs. New necessary and sufficient conditions for positive definite piecewise-linear functions be Lyapunov functions are presented. A computational procedure is proposed for determination of such Lyapunov functions and associated polyhedral regions of local asymptotic stability. Compared to Minkowski functions, piecewise-linear functions present strictly better performance, being naturally more flexible and better adapted to the radially variable dynamic behavior of saturated systems.

KEYWORDS: Discrete-time systems, saturation, stability, Lyapunov functions, piecewise-linear functions, linear programming.

RESUMO

Este trabalho trata de funções de Lyapunov lineares por

partes para análise de estabilidade de sistemas lineares discretos no tempo com entradas saturáveis. São apresentadas novas condições necessárias e suficientes para funções lineares por partes positivas definidas serem funções de Lyapunov. Um procedimento computacional é proposto para determinação dessas funções de Lyapunov e suas correspondentes regiões de estabilidade assintótica. Comparadas às funções de Minkowski, as funções lineares por partes apresentam desempenho estritamente superior e são naturalmente mais flexíveis e adaptadas ao comportamento dinâmico radialmente variável dos sistemas saturados.

1 INTRODUÇÃO

Saturação é provavelmente a não linearidade mais comum em engenharia de controle. Ela é usualmente causada por limite de tamanho de componentes, potência disponível e geralmente é associada a amplificadores e atuadores (Slotine e Li, 1981). O estudo de sistemas lineares com saturação deve frequentemente considerar o comportamento não linear do sistema para evitar resultados conservativos (Romanchuck, 1996), (Bitsoris e Gravalou, 1995). Trabalhos recentes (Tarbouriech e Silva Jr., 1997), (Silva Jr. e Tarbouriech, 1999), (Milani, 1999), propoem métodos construtivos para determinação de regiões poliedrais convexas de estabilidade assin-

Artigo submetido em 08/12/00
1a. Revisão em 17/04/01; 2a. Revisão em 25/05/01
Aceito sob recomendação do Ed. Cons. Prof. Dr. José Roberto Castilho Piqueira

tótica local e comportamento não linear, para sistemas lineares invariantes, discretos no tempo, com entradas de controle em malha fechada saturáveis. Os métodos propostos são baseados no conceito de conjuntos contractivos. É bem conhecido (Silva Jr. e Tarbouriech, 1999), (Blanchini, 1999), que poliedros contractivos são regiões de estabilidade assintótica associadas a funções de Lyapunov dentro da classe particular de funções lineares por partes denominadas funções de Minkowski:

$$\Psi(x) = \max_{1 \leq i \leq r} g_i x \quad (1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, g_i é a i -ésima linha de $G \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e o poliedro $Gx \leq 1$ é limitado.

Este artigo amplia resultados prévios em (Silva Jr. e Tarbouriech, 1999), (Milani, 1999), considerando funções de Lyapunov numa classe mais geral de funções lineares por partes:

$$\Psi(x) = \max_{1 \leq i \leq r} g_i x + c_i \quad (2)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e g_i, c_i são i -ésimas linhas de $G \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $c \leq 0 \in \mathbb{R}^r$, respectivamente.

São obtidas novas condições necessárias e suficientes para funções lineares por partes definidas positivas serem funções de Lyapunov de sistemas lineares invariantes, discretos no tempo, com entradas de controle em malha fechada saturáveis. Baseada em formulação de programação linear dessas condições necessárias e suficientes, considerando o comportamento não linear do sistema em malha fechada, é proposto um procedimento para determinação de funções de Lyapunov lineares por partes e suas correspondentes regiões de estabilidade assintótica. Um exemplo numérico compara o desempenho das funções lineares por partes com o das funções de Minkowski, na determinação de regiões de estabilidade assintótica de um sistema com controles em malha fechada saturáveis.

Notação: para duas matrizes reais $n \times m$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, $A \leq B$ é equivalente a $a_{ij} \leq b_{ij}$ para todo i, j tal que $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. Para $\epsilon \geq 0$, o conjunto $\epsilon\Omega$ é definido como $\{x = \epsilon y, y \in \Omega\}$.

2 PRELIMINARES

Considere o sistema discreto no tempo

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (3)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é possivelmente não linear.

Definição 2.1: Um conjunto não vazio Ω , definido no espaço de estado do sistema (3), é λ -contractivo com

respeito ao sistema (3) se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que se $x(k) \in \epsilon\Omega$ então $x(k+1) \in \epsilon\lambda\Omega$ para todo $0 \leq \epsilon \leq 1$.

Definição 2.2: Uma função contínua $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definida positiva se

$$\Psi(0) = 0 ; \Psi(x) > 0 \text{ se } x \neq 0$$

Existem várias definições propostas na literatura para funções de Lyapunov, cada uma delas motivadas por um problema específico. A definição a seguir, apresentada em (Blanchini, 1999), é conveniente para os objetivos deste trabalho.

Definição 2.3: Uma função definida positiva $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Lyapunov para (3), na bola unitária $\mathcal{B}_1 = \{x : \Psi(x) \leq 1\}$, se para todo $x \in \mathcal{B}_1$, $\Psi(f(x)) \leq \lambda\Psi(x)$ vale para algum $0 \leq \lambda < 1$. A bola \mathcal{B}_1 é uma região de estabilidade assintótica de (3) com índice de convergência λ .

Definição 2.4: O epígrafo da função $\Psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, é o conjunto $\mathcal{E}(\Psi) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (Mangasarian, 1974):

$$\mathcal{E}(\Psi) = \{(x, \zeta) : x \in \mathcal{X}, \zeta \in \mathbb{R}, \Psi(x) \leq \zeta\}$$

Lema 2.1: Sejam as funções contínuas $\Psi_1 : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Psi_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$. $\Psi_2(x) \leq \Psi_1(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$ se e somente se seus epígrafos satisfazem $\mathcal{E}(\Psi_1) \subset \mathcal{E}(\Psi_2)$.

Prova: Suficiência: Se $\mathcal{E}(\Psi_1) \subset \mathcal{E}(\Psi_2)$, então, de acordo com a Definição 2.4, $\Psi_2(x) \leq \zeta$ vale para todo $x \in \mathcal{X}$ tal que $\Psi_1(x) \leq \zeta$, $\zeta \in \mathbb{R}$. Logo, tomando $\Psi_1(x) = \zeta$, tem-se $\Psi_2(x) \leq \Psi_1(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$. Necessidade: Se $\mathcal{E}(\Psi_1) \not\subset \mathcal{E}(\Psi_2)$, então, de acordo com a Definição 2.4, existe $x_1 \in \mathcal{X}$ tal que $\Psi_1(x_1) \leq \zeta$ e $\Psi_2(x_1) > \zeta$. Fazendo $\Psi_1(x_1) = \zeta$, tem-se $\Psi_2(x_1) > \Psi_1(x_1)$, que contradiz $\Psi_2(x) \leq \Psi_1(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$. \square

Baseado na Definição 2.4 e Lema 2.1, o Corolário a seguir fornece uma caracterização geométrica para funções de Lyapunov.

Corolário 2.1: Uma função definida positiva $\Psi(x)$ é uma função de Lyapunov do sistema (3), na bola unitária $\Psi(x) \leq 1$, se e somente se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que:

$$\mathcal{E}(\Psi) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) \quad (4)$$

onde $\mathcal{E}(\Psi)$, $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ são epígrafos em $\Psi(x) \leq 1$ das funções $\Psi(x)$, $\lambda^{-1}\Psi(f(x))$, respectivamente.

Prova: De acordo com a Definição 2.3, $\Psi(x)$ é uma função de Lyapunov de (3), em $\Psi(x) \leq 1$, se e somente

se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que:

$$\Psi(f(x)) \leq \lambda \Psi(x) \quad ; \quad \Psi(x) \leq 1 \quad (5)$$

Aplicando o Lema 2.1 em (5), tem-se:

$$\mathcal{E}(\Psi) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$$

□

Definição 2.5: Seja $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ um conjunto convexo, limitado, fechado, contendo a origem em seu interior. A função de Minkowski $\Psi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ de Ω é dada por (Blanchini, 1999):

$$\Psi(x) = \min_{\epsilon \geq 0} \epsilon \quad \text{s.a.} \quad x \in \epsilon \Omega \quad (6)$$

A função de Minkowski (6) é definida positiva. Como $\Psi(\mu x) = \mu \Psi(x)$ para $\mu > 0$, suas superfícies de nível são obtidas escalonando a fronteira de Ω (Blanchini, 1999).

Corolário 2.2: A função de Minkowski $\Psi(x)$ (6) é uma função de Lyapunov do sistema (3), na bola $\Psi(x) \leq 1$, se e somente se o conjunto Ω é λ -contractivo com respeito ao sistema (3).

Prova: De acordo com o Lema 2.1, $\Psi(x)$ (6) é uma função de Lyapunov de (3), em $\Psi(x) \leq 1$, se e somente se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que:

$$\mathcal{E}(\Psi) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) \quad (7)$$

De (3),(6) e Definição 2.4 pode ser verificado que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Psi) &= \{(x, \epsilon) : x \in \epsilon \Omega \quad , \quad 0 \leq \epsilon \leq 1\} \\ \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) &= \{(x, \epsilon) : f(x) \in \lambda \epsilon \Omega \quad , \quad (8) \\ &\quad 0 \leq \epsilon \leq 1\} \end{aligned}$$

De (3), (8) e Definição 2.1, pode ser verificado que (7) vale se e somente se Ω é λ -contractivo. □

Considere o sistema linear discreto no tempo representado pelas equações de estado e restrições:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (9)$$

$$-\tilde{u} \leq u \leq \hat{u} \quad ; \quad \tilde{u}, \hat{u} \geq 0 \quad (10)$$

onde $x(k) \in \mathfrak{R}^n$ e $u(k) \in \mathfrak{R}^m$, são variáveis de estado e controle respectivamente. A, B, \tilde{u}, \hat{u} , são reais com dimensões apropriadas. Seja a lei de controle em malha fechada saturável:

$$u(k) = \text{sat}(Fx(k)) \quad (11)$$

onde $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ é constante e as componentes de $\text{sat}(Fx)$ são dados por:

$$\text{sat}(Fx)_i = \begin{cases} -\tilde{u}_i & \text{se } f_i x < -\tilde{u}_i \\ f_i x & \text{se } -\tilde{u}_i \leq f_i x \leq \hat{u}_i \\ \hat{u}_i & \text{se } f_i x > \hat{u}_i \end{cases} \quad (12)$$

onde f_i denota a i -ésima linha da matriz F .

De (9), (11), o sistema em malha fechada é dado pelo modelo não linear:

$$x(k+1) = Ax(k) + B\text{sat}(Fx(k)) \quad (13)$$

Considerando $x \in \mathfrak{R}^n$, cada uma das m componentes de (12) tem 3 possíveis estados: saturado no limite inferior, não saturado e saturado no limite superior. Consequentemente, \mathfrak{R}^n pode ser decomposto em $j = 1 : 3^m$ regiões $S(R_j, d_j) \subset \mathfrak{R}^n$, chamadas de regiões de saturação (Silva Jr. & Tarbouriech, 1999), dadas pelos poliedros:

$$S(R_j, d_j) = \{x \in \mathfrak{R}^n ; R_j x \leq d_j\} \quad (14)$$

$$R_j = \begin{bmatrix} F_{ns} \\ -F_{ns} \\ -F_{su} \\ F_{sl} \end{bmatrix} \quad ; \quad d_j = \begin{bmatrix} \hat{u}_{ns} \\ \tilde{u}_{ns} \\ -\hat{u}_{su} \\ -\tilde{u}_{sl} \end{bmatrix} \quad (15)$$

onde $F_{ns}, \hat{u}_{ns}, \tilde{u}_{ns}, F_{su}, \hat{u}_{su}, F_{sl}, \tilde{u}_{sl}$, são matrizes e vetores formados apropriadamente pelas linhas de F, \hat{u}, \tilde{u} e relacionadas, respectivamente, com as componentes não saturadas, saturadas no limite superior e saturadas no limite inferior, que caracterizam a região. Dentro de cada região de saturação $S(R_j, d_j)$, o sistema de malha fechada (13) é representado pelo modelo linear (Silva Jr. & Tarbouriech, 1999):

$$x(k+1) = A_j x(k) + p_j$$

$$A_j = [A + B_{ns} F_{ns}] \quad (16)$$

$$p_j = B_{su} \hat{u}_{su} - B_{sl} \tilde{u}_{sl}$$

onde B_{ns}, B_{su} e B_{sl} são matrizes apropriadamente formadas pelas colunas de B relacionadas com $F_{ns}, \hat{u}_{su}, \tilde{u}_{sl}$, respectivamente.

A título ilustrativo, para o sistema de malha fechada (13) com uma entrada de controle saturável, as regiões de saturação de $\text{sat}(Fx)$ e o modelo linear por partes são:

Região 1: $-\hat{u} \leq u \leq \hat{u}$

$$R_1 = \begin{bmatrix} F \\ -F \end{bmatrix}; d_1 = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \tilde{u} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = A + BF; p_1 = 0$$

Região 2: $u \geq \hat{u}$

$$R_2 = -F; d_2 = -\hat{u}$$

$$A_2 = A; p_2 = B\hat{u}$$

Região 3: $u \leq -\tilde{u}$

$$R_3 = F; d_3 = -\tilde{u}$$

$$A_3 = A; p_3 = -B\tilde{u}$$

No resto deste trabalho, será designado $j = 1$ para a região de comportamento linear de $\text{sat}(Fx)$.

3 FUNÇÕES DE LYAPUNOV LINEARES POR PARTES

Seja a função linear por partes (FLP):

$$\Psi(x) = \max_{1 \leq i \leq r} w_i^{-1} \{g_i x + c_i\} \quad (17)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e w_i, g_i, c_i são as i -ésimas linhas de $w > 0 \in \mathbb{R}^r, G \in \mathbb{R}^{r \times n}, c \leq 0 \in \mathbb{R}^r$, respectivamente. Pode-se verificar que a função $\Psi(x)$ (17) é também definida como:

$$\Psi(x) = \min_{\epsilon \in \mathbb{R}} \epsilon \quad \text{s.a.} \quad Gx + c \leq w\epsilon \quad (18)$$

Proposição 3.1: A FLP $\Psi(x)$ (17), (18) é positiva definida se e somente se existe uma matriz de permutação P tal que:

$$P \begin{bmatrix} G & c & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{w}_1 \\ \tilde{G}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{w}_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\tilde{c}_1 = 0; \tilde{c}_2 < 0$$

e o poliedro $\tilde{G}_1 x \leq \tilde{w}_1$ é limitado.

Prova: Note que permutações de linhas da matriz $\begin{bmatrix} G & c & w \end{bmatrix}$ não mudam o valor de $\Psi(x)$. Inspeccionando (17) pode-se verificar que $\Psi(0) = 0$ se e somente se $c \leq 0$ com pelo menos uma componente zero. Consequentemente, existe uma matriz de permutação P dando (19). De (17), (18), (19), pode ser verificado que:

$$\Psi(x) \geq \Psi_1(x)$$

$$\Psi_1(x) = \min_{\epsilon \in \mathbb{R}} \epsilon \quad \text{s.t.} \quad \tilde{G}_1 x \leq \tilde{w}_1 \epsilon \quad (20)$$

Notando que $\tilde{c}_2 < 0$, de (18), (19), pode ser também verificado que para um $\epsilon_1 > 0$, suficientemente pequeno, vale o seguinte:

$$\Psi(x) = \Psi_1(x); x \in \tilde{G}_1 x \leq \tilde{w}_1 \epsilon_1 \quad (21)$$

De (20), pode ser verificado que $\Psi_1(x)$ é uma função de Minkowski, que é definida positiva se e somente se $\tilde{G}_1 x \leq \tilde{w}_1$ é limitada (ver Definição 2.5). De (20), (21), pode-se verificar que $\Psi(x)$ é positiva definida se e somente se $\Psi_1(x)$ é definida positiva, concluindo a prova. \square

Aplicando Definição 2.4, pode ser verificado que o epígrafo da FLP $\Psi(x)$ (17), definida na bola $\Psi(x) \leq 1$ é dado por:

$$\mathcal{E}(\Psi) = S(G, c, w) = \{(x, \epsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} : Gx + c \leq w\epsilon; 0 \leq \epsilon \leq 1\} \quad (22)$$

Similarmente, pode ser também verificado que para o sistema de malha fechada (13), o epígrafo de $\lambda^{-1}\Psi(f(x))$ definido na bola $\Psi(x) \leq 1$ é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) &= \{(x, \epsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} : \\ G[Ax + B\text{sat}(Fx)] + c &\leq \lambda w\epsilon \\ 0 \leq \epsilon &\leq 1\} \end{aligned} \quad (23)$$

Proposição 3.2: Uma FLP positiva definida $\Psi(x)$ (17), (18), é uma função de Lyapunov para (13), na bola $\Psi(x) \leq 1$, se e somente se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que os epígrafos (22), (23), satisfazem a relação de inclusão:

$$\mathcal{E}(\Psi) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) \quad (24)$$

Prova: Imediata aplicando Corolário 2.1. \square

Proposição 3.3: Uma FLP positiva definida $\Psi(x)$ (17), (18), é uma função de Lyapunov para (13), na bola $\Psi(x) \leq 1$, se e somente se para as $j = 1 : 3^m$ regiões de saturação (14), (15), (16), existe um $0 \leq \lambda < 1$ tal que

$$\begin{bmatrix} GA_j & -\lambda w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \leq -Gp_j - c \quad (25)$$

vale para quaisquer ϵ_j, x satisfazendo:

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -c \\ d_j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

ou, em outras palavras, se e somente se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que o poliedro (26) é um subconjunto do poliedro (25).

Prova: Da Proposição 3.2 tem-se:

$$\mathcal{E}(\Psi) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) \quad (27)$$

Notando que

$$\mathfrak{R}^n = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} S(R_j, d_j) \quad (28)$$

$$\mathcal{E}(\Psi) = \mathcal{E}(\Psi) \cap (\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}) \quad (29)$$

temos

$$\mathcal{E}(\Psi) = \bigcup_{j=1}^{j=3^m} \mathcal{E}(\Psi) \cap (S(R_j, d_j) \times \mathfrak{R}) \quad (30)$$

Portanto (27) vale se e somente se para $j = 1 : 3^m$ tivermos:

$$\mathcal{E}(\Psi) \cap (S(R_j, d_j) \times \mathfrak{R}) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) \quad (31)$$

Para $x \in S(R_j, d_j)$, de (16), (23), pode ser verificado que $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ corresponde ao poliedro:

$$\begin{bmatrix} GA_j & -\lambda w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \leq -Gp_j - c \quad (32)$$

De (14), (15), (22), pode-se verificar que $\mathcal{E}(\Psi) \cap (S(R_j, d_j) \times \mathfrak{R})$ corresponde ao poliedro:

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon_j \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -c \\ d_j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

concluindo a prova. \square

O Corolário a seguir é uma formulação primal de programação linear da Proposição 3.3 (Bazaraa et al, 1990).

Corolário 3.1: Uma FLP positiva definida $\Psi(x)$ (17), (18), é uma função de Lyapunov para (13), na bola $\Psi(x) \leq 1$, se e somente se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que:

$$\max_{i,j} \{\sigma_j^i\} \leq 0 \quad (34)$$

$$1 \leq i \leq r ; 1 \leq j \leq 3^m$$

onde σ_j^i são obtidos resolvendo os seguintes programas lineares independentes factíveis:

$$\sigma_j^i = \max_{x,\epsilon} g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon + g^i p_j + c_i$$

$$Gx - w\epsilon \leq -c$$

$$R_j x \leq d_j \quad (35)$$

$$0 \leq \epsilon \leq 1$$

onde g^i , c_i , w_i , são iésimas linhas de G , c , w , respectivamente e R_j , d_j , A_j , p_j são relacionadas às regiões de saturação e modelos lineares por partes (14)-(16). Sejam ϵ_j^i , x_j^i soluções ótimas relacionadas a um $\sigma_j^i > 0$. Isto indica que $x_j^i, \epsilon_j^i \in \mathcal{E}(\Psi)$ estão fora da iésima face de $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ (23), (24) na jésima região de saturação:

$$g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon_j^i \leq -g^i p_j - c_i \quad (36)$$

Prova: Inspeccionando (25), (26), pode-se verificar que a Proposição 3.3 é satisfeita se e somente se

$$g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon_j \leq -g^i p_j - c_i \quad (37)$$

$$j = 1 : 3^m ; i = 1 : r$$

vale para todos ϵ_j , x que satisfazem (26). Em outras palavras,

$$\max_{x,\epsilon} (g^i A_j x - \lambda w_i \epsilon + g^i p_j + c_i) \leq 0 \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} G & -w \\ R_j & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -c \\ d_j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem que valer para $i = 1 : r$ e $j = 1 : 3^m$. Pode-se verificar que os programas lineares (38) são equivalentes aos programas (34), (35). Sejam σ_j^i , ϵ_j^i , x_j^i , respectivamente, índice de desempenho e soluções ótimos dos programas lineares (38). De (31),(38) pode-se também verificar que $\sigma_j^i > 0$ indica que $x_j^i, \epsilon_j^i \in \mathcal{E}(\Psi)$ estão fora da iésima face de $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ na jésima região de saturação (36), concluindo a prova. \square

É oportuno enfatizar que o Corolário 3.1 é computacionalmente muito eficiente, capaz de tratar efetivamente problemas de grande porte. Ele corresponde a um conjunto de problemas de programação linear convencionais para os quais existem poderosas ferramentas computacionais (Bazaraa et al, 1990).

4 REGIÕES DE ESTABILIDADE ASSINTÓTICA LOCAL

A seguir, uma FLP $\Psi(x)$ (17), (18), será representada como $\Psi[G, c, w]$.

Dentro da região de comportamento linear $S(R_1, d_1)$ do sistema (13), o supremo poliedro λ -contractivo $G_1 x \leq w_1$

contido em $S(R_1, d_1)$ é uma região poliedral de estabilidade assintótica local. A função de Lyapunov associada é o caso particular de FLP $\Psi[G_l, 0, w_l]$ chamada de função de Minkowski (ver Definição 2.1, Definição 2.5, Corolário 2.2). Métodos eficientes para obtenção de poliedros λ -contractivos supremos são dados em (Dórea e Hennet, 1999).

Considere agora uma FLP definida positiva cuja bola unitária tem intersecção com a região de controle não linear do sistema (13). De acordo com a Proposição 3.2, $\Psi[G, c, w]$ é uma função de Lyapunov para o sistema (13) se e somente se os epígrafos (22), (23), satisfazem a relação de inclusão $\mathcal{E}(\Psi) \subset \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ ou equivalentemente

$$\mathcal{E}(\Psi) \cap \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f) = \mathcal{E}(\Psi) \quad (39)$$

Se (39) não for satisfeita, a próxima candidata a função de Lyapunov deveria ser a FLP derivada da intersecção $\mathcal{E}(\Psi) \cap \mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$. Contudo, devido à não linearidade da lei de controle saturada (12), o epígrafo $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ (23) não é convexo. Portanto, não é possível garantir a convexidade do conjunto intersecção resultante, complicando a obtenção da FLP. Para contornar esta dificuldade, baseado na Proposição 3.2 e Corolário 3.1, o seguinte procedimento computacional é proposto para determinação de uma função de Lyapunov FLP para o sistema (13), cuja correspondente região de estabilidade assintótica local tem intersecção com a região de controle não linear. Grosso modo, a seguinte tarefa é executada recursivamente: dada a função de Lyapunov $\Psi[G_a, c_a, w_a]$ e sua FLP “expandida” $\Psi[G_a, c_a, \delta w_a]$, obter a função de Lyapunov $\Psi[G, c, w]$ tal que $\Psi[G_a, c_a, w_a] \geq \Psi[G, c, w] \geq \Psi[G_a, c_a, \delta w_a]$. Para obtenção de $\Psi[G, c, w]$, começar com $\Psi[G, c, w] = \Psi[G_a, c_a, \delta w_a]$ e recursivamente atualizar $\Psi[G, c, w]$, fazendo a intersecção de seu epígrafo $\mathcal{E}(\Psi) = S(G, c, w)$ (22) com planos de corte relacionados às faces do epígrafo $\mathcal{E}(\lambda^{-1}\Psi_f)$ (23) que não satisfazem ao Corolário 3.1. Para uma descrição detalhada, ver Procedimento 1 no Apêndice.

5 EXEMPLO NUMÉRICO

Considere o seguinte sistema com controle em malha fechada saturável, considerado em (Tarbouriech e Silva Jr., 1997):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ -\tilde{u} &\leq u \leq \hat{u} \end{aligned} \quad (40)$$

$$u(k) = \text{sat}(Fx(k))$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{u} = \hat{u} = 7.0 ; F = \begin{bmatrix} 0.2888 & -1.8350 \end{bmatrix}$$

Sejam:

- $\lambda = .998$: índice de convergência;
- $\Psi[G_l, 0, w_l]$: função de Lyapunov do tipo Minkowski, associada ao supremo poliedro λ -contractivo com respeito a (40), contido na região de controle linear;
- $\Psi[G_m, 0, w_m]$: função de Lyapunov do tipo Minkowski, obtida pelo Procedimento 1 no Apêndice, com coeficiente de expansão $\delta = 1.5$, começando de $\Psi[G_l, 0, w_l]$ e forçando $c = 0$;
- $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$: função de Lyapunov do tipo FLP, obtida pelo Procedimento 1 no Apêndice, com coeficiente de expansão $\delta = 1.5$, começando de $\Psi[G_l, 0, w_l]$;
- S_l , S_m e S_{pw} : regiões de estabilidade assintótica locais correspondentes às bolas unitárias das funções de Lyapunov $\Psi[G_l, 0, w_l]$, $\Psi[G_m, 0, w_m]$ e $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$, respectivamente.

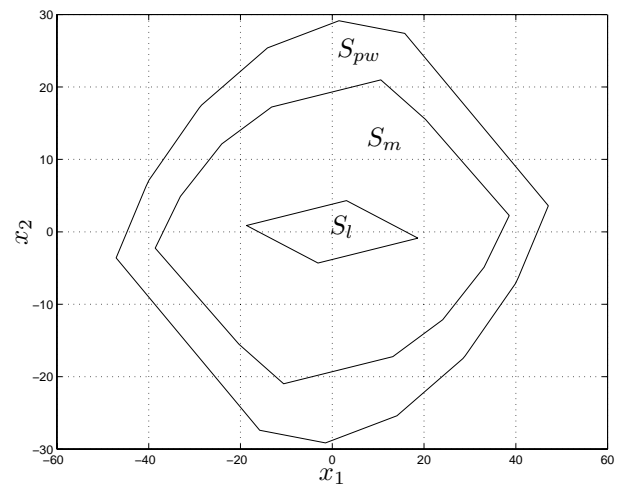


Figura 1: Bolas unitárias de funções de Lyapunov

Pode ser verificado na Figura 1 que S_m e S_{pw} , construídas pelo Procedimento 1, são bem maiores que a região de partida S_l , mostrando assim a eficácia do procedimento de construção proposto. A Região S_{pw} é estritamente maior que a região S_m , mostrando que funções de Lyapunov do tipo FLP podem efetivamente dar resultados menos conservativos que as funções de Minkowski.

As Figuras 2 e 3 mostram as superfícies de nível das funções de Lyapunov $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$ e $\Psi[G_m, 0, w_m]$,

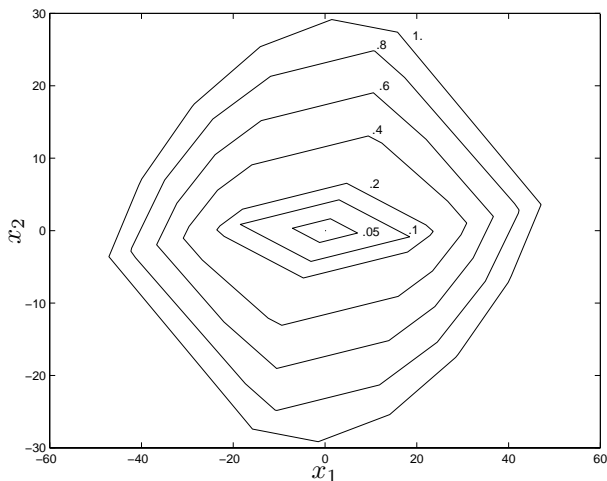


Figura 2: Superfícies de nível de $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$

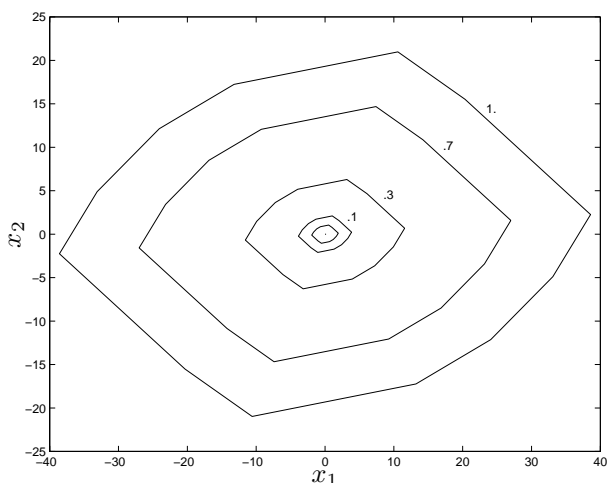


Figura 3: Superfícies de nível de $\Psi[G_m, 0, w_m]$

respectivamente. A forma variável das superfícies de nível de $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$, comparada com a forma fixa das superfícies de $\Psi[G_m, 0, w_m]$, mostra que as FLPs são naturalmente mais flexíveis e melhor adaptadas que as funções de Minkowski, ao comportamento dinâmico radialmente variável dos sistemas saturados. Pode também ser verificado nessas figuras que o melhor resultado da FLP é obtido às custas de representação mais complexa: a FLP $\Psi[G_{pw}, c_{pw}, w_{pw}]$ tem mais faces que a função de Minkowski $\Psi[G_m, 0, w_m]$.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho tratou de FLPs como candidatas a funções de Lyapunov de sistemas discretos no tempo com controle em malha fechada saturável. Foram obtidas

novas condições necessárias e suficientes para uma FLP ser função Lyapunov. Baseado em uma formulação de programação linear dessas condições, um procedimento computacional efetivo, pouco conservativo, foi proposto para determinação de funções de Lyapunov do tipo FLP e suas correspondentes regiões de estabilidade local assintótica. O exemplo numérico mostrou que funções de Lyapunov do tipo FLP, apresentam desempenho estritamente melhor que funções de Lyapunov do tipo Minkowski, na análise de estabilidade do comportamento não linear de sistemas discretos no tempo, com controles saturáveis. O melhor desempenho ocorre porque as FLPs são naturalmente mais flexíveis e melhor adaptadas ao comportamento dinâmico radialmente variável dos sistemas saturados.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bazaraa, M.S., J.J. Jarvis, J.J. e Sherali, H.D. (1990). Linear Programming and Network Flows. Wiley, New York NY.
- Bitsoris, G. e Gravalou E. (1995). Comparison Principle, Positive Invariance and Constrained Regulation of Nonlinear Systems, *Automatica*, **Vol.31**, No.2, pp. 217-222.
- Blanchini, F. (1999). Set Invariance in Control: A Survey, *Automatica*, **Vol.35**, No.11, pp.1747-1768.
- Dórea, C.E.T. e Hennes, J.C. (1999). (A,B)- Invariant Polyhedral Sets of Linear Discrete-time Systems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **Vol.103**, No.3, pp.521-542.
- Hennes, J.C. (1989). Une Extension du Lemme de Farkas et son Application au Problème de Regulation Linéaire sous Contraintes, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t.308, Série I, pp. 415-419.
- Mangasarian, O.L. (1974). Nonlinear Programming. SIAM, Philadelphia PA.
- Milani, B.E.A. (1999). Contractive Polyhedra for Discrete-time Linear Systems with Saturating Controls, *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, Phoenix AZ, USA.
- Milham, C.B. (1976). Fast Feasibility Methods for Linear Programming, *OPSEARCH*, **Vol.13**, No.3-4, pp.198-204.
- Romanchuck, B.G. (1996). Computing Regions of Attractions with Polytopes: Planar Case, *Automatica*, **Vol.32**, No.12, pp. 1727-1732.

Silva Jr., J.M.G. e Tarbouriech S. (1999). Polyhedral Regions of Local Asymptotic Stability for Discrete-Time Linear Systems with Saturating Controls, *IEEE Transactions on Automatic Control*,

-
- A eliminação de desigualdades redundantes no passo 2 é recomendada, não somente para obter uma representação concisa de $\Psi[G, c, w]$, mas também para a eficiência global do procedimento.
 - Pode-se verificar que a iteração dos passos 2 ao 5 fornece uma sequência de funções de Lyapunov monotonamente decrescente e convergente. A razão de convergência não é facilmente determinável devido à natureza não linear e não convexa do problema.