APLICAÇÃO DE MPC ROBUSTO COM WAYSETS PARA UM HELICÓPTERO COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE

Rogério Hong Hui Chung*, Rubens Junqueira Magalhães Afonso*

*ITA - Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50, 12228-900, Vila das Acácias, São José dos Campos, SP, Brasil

Emails: rogeriochung@gmail.com, rubensjm@ita.br

Abstract— Model Predictive Control based methods for trajectory planning have been widely applied on vehicle manuever problems due to its capability of obtaining control actions explicitly considering operational constraints. However, the high computational time required to calculate the optimal solution makes the method difficult to apply on systems more complex than double integrators. The present work describes and applies a method of robust manuever control with guaranteed finite-time arrival and constraint satisfaction to a Quanser 3DOF helicopter. In order to reduce the computational time required, multiple target sets are placed along a collision-free path as opposed to a single one as is usually observed in the literature. Simulation results evidence a significant reduction on the computational time with a small compromise of the performance.

Keywords— Model Predictive Control, Trajectory Planning, Robustness.

Resumo— Os métodos baseados em Controle Preditivo para planejamento de trajetória têm sido amplamente aplicados em problemas de manobra de veículos devido à sua capacidade de obter ações de controle considerando explicitamente restrições operacionais. No entanto, o elevado tempo computacional necessário para calcular a solução ótima torna o método difícil de aplicar em sistemas mais complexos do que um duplo integrador. O presente trabalho descreve e aplica um método de controle de manobra robusto com chegada garantida de tempo finito e satisfação de restrição para um modelo de helicóptero Quanser 3DOF. Para reduzir o tempo computacional requerido, múltiplos conjuntos alvo são colocados ao longo de um caminho sem colisões em oposição a um único como é normalmente observado na literatura. Os resultados da simulação evidenciam uma redução significativa no tempo computacional com um pequeno comprometimento do desempenho.

Palavras-chave— Controle Preditivo, Planejamento de Trajetória, Robustez.

1 Introdução

Uma dificuldade em se utilizar técnicas de planejamento de trajetória consiste na incapacidade de o veículo seguir a trajetória planejada devido a diversos fatores, endógenos e exógenos. Fatores endógenos podem ser saturação de atuadores e limitação de excursão de variáveis de estado. Entre os fatores exógenos podemos considerar as perturbações.

Dentre as técnicas utilizadas para planejamento de trajetória, o controle preditivo (*Model-based Predictive Control* - MPC) tem-se demonstrado atrativo, uma vez que as restrições operacionais são explicitamente consideradas na geração das ações de controle, permitindo que os sistemas controlados operem próximos às restrições sem violá-las, o que lhes confere um melhor desempenho (Maciejowski (2000)).

Em Richards e How (2006) foi proposto um problema de minimização do horizonte e o gasto de combustível[1] resultando em um problema de programação linear com variáveis reais e inteiras (*Mixed-Integer Linear Programming* - MILP) que tipicamente possui complexidade NP-completo, i.e. no pior cenário o tempo necessário para se obter a solução do problema de otimização aumenta exponencialmente com o dimensão do problema (Bemporad e Morari (1999)). Dessa forma, a implementação da técnica de controle MPC MILP em plantas de maior complexidade (sistemas de dimensões maiores) e de dinâmica rápida (menor tempo de amostragem) fica inviabilizada. Para solucionar este problema, algumas abordagens são encontradas na literatura.

Uma das abordagens possíveis é a de implementar um circuito digital em *Field Programmable Gate Array* (FPGA) dedicado à solução do problema de otimização, aproveitando-se assim o paralelismo inerente aos circuitos digitais integrados, o qual permite que várias operações aritméticas sejam executadas em um único ciclo de processamento (Hartley e Maciejowski (2014)). Essa solução, entretanto, acrescenta complexidade na implementação e integração do circuito dedicado com o sistema a ser controlado. Em Shekhar et al. (2014) é proposta uma abordagem de se realizar o pré-planejamento *offline* de trajetória para se obter conjuntos alvos intermediários (*waysets*) posicionados ao longo de um caminho livre de obstáculos com garantias de trajetórias admissíveis entre os *waysets*. O objetivo dessa etapa é reduzir tamanho do horizonte no problema de otimização *online*, diminuindo consequentemente o tempo de processamento, uma vez que as dimensões do

[1] O termo combustível é um termo usualmente encontrado na literatura de Controle Ótimo e se tornou sinônimo de $|u(t)|$ (Athans e Falb (2007)).

problema aumentam significativamente com o aumento do horizonte. Contudo, neste trabalho, bem como no restante da literatura de planejamento usando MPC MILP, a dinâmica do sistema é simplificada para dois duplos integradores desacoplados, um em cada eixo (Michael Hoy et al. (2014)). Dinâmicas mais complexas, inerentes a veículos reais, não foram usadas.

Nesse contexto, o presente trabalho visa aplicar uma técnica de planejamento robusto a um modelo de helicóptero de laboratório com três graus de liberdade (3 *Degrees of Freedom* - 3DOF) considerando a sua dinâmica completa. A fim de poder empregar a técnica em malha fechada em tempo real, faz-se necessário dividir a trajetória por meio de *waysets*. Para avaliar a viabilidade e potenciais benefícios de aplicar esta técnica, neste artigo o posicionamento de *waysets* é feito manualmente, como solução prática e de rápida implementação. Para obter a lei de controle, é adotada a formulação apresentada em Richards e How (2006) com um pequena alteração da função de custo. Um modelo linear a tempo discreto do helicóptero 3DOF da Quanser foi utilizado para ilustrar a aplicação desta técnica.

O restante do artigo é dividido como segue: na seção 2 é apresentada a formulação matemática do problema de planejamento de trajetórias com robustez; na seção 3 é mostrado como o problema formulado pode ser reescrito em forma de um problema MILP. Na seção 4, apresenta-se o modelo linear a tempo discreto do helicóptero adotado para este trabalho seguido dos cenários de simulação na seção 5. Por fim, os resultados e conclusões são discutidos nas seções 6 e 7, respectivamente.

2 Formulação do Problema

Neste trabalho, deseja-se controlar um sistema linear a tempo discreto, sob ação de perturbações persistentes e limitadas, com a seguinte dinâmica:

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + Dw[k], \quad k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

sujeito a restrições:

$$x[k] \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N} \quad (2)$$

$$u[k] \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{N} \quad (3)$$

$$w[k] \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p, k \in \mathbb{N} \quad (4)$$

em que $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ são politopos convexos, com $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ compactos contendo a origem.

Adicionalmente, admite-se a existência de obstáculos politópicos a serem evitados pelas trajetórias $x[k]$ do sistema e portanto:

$$x[k] \notin \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N} \quad (5)$$

Por fim, assume-se que o par (A,B) seja controlável e que todos os elementos do vetor de estados sejam acessíveis.

Neste trabalho, deseja-se utilizar a técnica de planejamento de trajetória proposto em Richards e How (2006) para conduzir o estado $x[0]$ do sistema (1) a um estado final pertencente ao conjunto alvo $\mathcal{Q}$, enquanto se minimiza uma função de custo que envolve o horizonte e combustível e que está sujeita às restrições (2), (3), (4) e (5).

O problema de minimização proposto é:

2.1 Problema de horizonte e combustível mínimo sujeito a perturbações e na presença de obstáculos

Problema 1

$$\min_{x,u,N} J'(x[k]) = \sum_{j=1}^{N[k]+1} (1+\gamma\|u[k+j-1|k]\|_1) \quad (6)$$

sujeito a, $\forall j \in \{1,...,N[k]+1\}$*:*

$$x[k+j|k] = Ax[k+j-1|k] + Bu[k+j-1|k] \quad (7a)$$

$$x[k|k] = x[k] \quad (7b)$$

$$x[k+N[k]+1|k] \in \mathcal{Q}[N[k]+1] \quad (7c)$$

$$x[k+j|k] \in \mathcal{X}[j] \quad (7d)$$

$$u[k+j-1|k] \in \mathcal{U}[j-1] \quad (7e)$$

$$x[k+j|k] \notin \mathcal{O}[j] \quad (7f)$$

■

Na função de custo

$$0 \leq \gamma < \left[\max_{w\in\mathcal{W}} \sum_{i=0}^{\infty} \|KL[i]w\|_1 > 0\right]^{-1}. \quad (8)$$

Segundo o método de endurecimento de restrições, os politopos de estado, controle e conjunto alvo, respectivamente, $\mathcal{X}[j]$, $\mathcal{U}[j]$ e $\mathcal{Q}[j]$, variam no tempo de modo a contabilizar os efeitos das perturbações persistentes que geram um descasamento, ao longo do horizonte de predição, entre o modelo de predição (7a) e o modelo da dinâmica do veículo (1). Estes politopos são calculadas a partir da seguinte recursão:

$$\mathcal{X}[0] = \mathcal{X} \quad (9a)$$

$$\mathcal{X}[j] = \mathcal{X}[j-1] \sim L[j-1]D\mathcal{W}, \ 1 \leq j \leq N[k]+1 \quad (9b)$$

$$\mathcal{U}[0] = \mathcal{U} \quad (9c)$$

$$\mathcal{U}[j] = \mathcal{U}[j-1] \sim KL[j-1]D\mathcal{W}, \ 1 \leq j \leq N[k] \quad (9d)$$

$$\mathcal{Q}[0] = \mathcal{Q} \quad (9e)$$

$$\mathcal{Q}[j] = \mathcal{Q}[j] \sim L[j-1]D\mathcal{W}, \ 1 \leq j \leq N[k]+1 \quad (9f)$$

A operação $\sim$ denota a diferença de Pontryagin:

$$\Psi \sim \Omega = \{\psi \mid \psi + \omega \in \Psi, \forall \ \omega \in \Omega\} \quad (10)$$

e $L[j]$ é uma política de endurecimento de restrições:

$$L[0] = I \tag{11a}$$
$$L[j] = (A + BK)L[j-1] \tag{11b}$$

O ganho K é obtido a partir de um controlador candidato à solução que deve ser capaz de estabilizar o sistema nominal em malha fechada por meio de realimentação de estados, i.e. $u[j-1] = K \cdot x[j-1]$. Para tanto, qualquer técnica de projeto que obtenha K pode ser utilizada.

O politopo $\mathcal{O}[j]$ é expandido da seguinte forma:

$$\mathcal{O}[0] = \mathcal{O} \tag{12a}$$
$$\mathcal{O}[j] = \mathcal{O}[j-1] \oplus L[j-1]D\mathcal{W}^S, \quad 1 \leq j \leq N[k]+1 \tag{12b}$$

sendo $\oplus$ a Soma de Minkowski:

$$\Psi \oplus \Omega = \{\phi \mid \exists\ \psi \in \Psi, \omega \in \Omega, \phi = \psi + \omega\} \tag{13}$$

e

$$\mathcal{W}^S = \{w \in \mathbb{R}^p | -w \in \mathcal{W}\} \tag{14}$$

Para assegurar a convergência do estado x ao conjunto alvo $\mathcal{Q}$ em tempo finito, o horizonte $N[k]$ é uma variável a ser otimizada. A cada iteração a função de custo (6) é minimizada e obtém-se uma sequência de controle $U^*[k] = \{u^*[k|k],....,u^*[k+N|k]\}$. Aplica-se o primeiro elemento da sequência, i.e. $u[k] = u^*[k|k]$. Caso $x[k+1] \in \mathcal{Q}[0]$, interrompe-se a tarefa de controle. Caso contrário, resolve-se novamente o problema de otimização, a partir de $k+1$, i.e. fazendo $x[k+1|k+1] = x[k+1]$. Este procedimento é conhecido como horizonte retrocedente (Rossiter (2003)).

2.2 Inclusão de termo que penaliza o erro de rastreamento no custo

Uma das desvantagens apresentadas pelo controlador proposto por Richards e How (2006) é a possibilidade de existir mais de uma solução que minimiza a função de custo (6), i.e., partindo de uma mesma condição inicial é possível obter mais de uma trajetória ótima. Uma vez que o procedimento de posicionamento manual de conjunto alvo não oferece garantias de que existam trajetórias admissíveis entre os *waysets*, o estado final com o qual o veículo chega ao conjunto alvo é crucial para que se possa obter trajetórias admissíveis para os conjuntos alvos seguintes.

Nesse contexto, decidiu-se incluir uma parcela à função de custo (6) para penalizar trajetórias cujo estado final esteja distante do centro do *wayset*.

A parcela de custo $J_E(x[k])$ pode ser definida da seguinte forma:

$$J_E(x[k]) = \mu \| C \cdot x[k+j|k] - y^{ref}[N_w] \|_1 \tag{15}$$

em que $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ é uma matriz que extrai a posição do vetor de estados, $y^{ref}[N_w]$ é o centro do conjunto alvo $\mathcal{Q}[N_w]$, N_w é o número do *wayset* e μ é o peso ajustável pelo projetista.

Acrescentando a parcela (15) à função de custo (6), obtém-se:

$$J(x[k]) = \sum_{j=1}^{N[k]+1} (1 + \gamma \|u[k+j-1|k]\|_1 + \mu \|C \cdot x[k+j|k] - y^{ref}[N_w]\|_1) \tag{16}$$

com γ e μ escolhidos pelo projetista.

3 Implementação do MPC MILP Modificado

A implementação do problema de otimização Problema 1 como um MILP é fundamental para obter a solução em tempo razoável para aplicação em tempo real, pois dispõe-se de algoritmos eficientes para a solução de problemas MILP implementados em pacotes comerciais como Gurobi e CPLEX. A seguir descreve-se como se pode escrever um problema MILP cuja solução é equivalente à do problema original.

3.1 Minimização do tempo

É possível reescrever um problema de horizonte variável em termos de um horizonte fixo como um problema MILP. Admitindo-se que $N_{min} = N^*[k=0]$ seja o horizonte de predição ótimo obtido através da minimização de (6), pode-se escolher um horizonte fixo $\bar{N} \geq N_{min}$ de modo a garantir que o estado $x[k+j|k] \in \mathcal{Q}[j]$ em algum instante $j \in \{1,2,...,\bar{N}+1\}$.

Assumindo que o conjunto alvo seja definido pelo politopo variante no tempo:

$$\mathcal{Q}[j] = \{x | S^Q \cdot x \leq B^Q[j]\} \tag{17}$$

com $S^Q \in \mathbb{R}^{N_Q \times n}$ e $B^Q[j] \in \mathbb{R}^{N_Q}$, em que N_Q corresponde ao número de lados do conjunto alvo.

Pode-se escrever a seguinte restrição:

$$s_i^Q \cdot x[k+j|k] \leq b_i^Q[j] + M(1 - b[j]), \quad 1 \leq i \leq N_Q, \quad 1 \leq j \leq \bar{N}+1 \tag{18}$$

com s_i^Q e $b_i^Q[j]$ correspondendo à linha i da matriz S^Q e ao i-ésimo elemento do vetor $B^Q[j]$ respectivamente.

O vetor $B_i^Q[j]$ variante no tempo decorre do endurecimento da restrição referente ao conjunto alvo com o passar do tempo, conforme descrito pelas equações (9e) e (9f). Na inequação (18), M é um escalar suficientemente grande que, em conjunto com a variável binária $b[j]$, possui o objetivo

de impor ou relaxar a restrição de desigualdade (18). Isto é:

$$M > \max |s_i^Q \cdot x - b_i^Q|, \quad 1 \leq i \leq N_Q \tag{19}$$

Enquanto $x[k+j|k] \notin \mathcal{Q}[j]$, somente $b[j] = 0$ satisfaz a inequação (18). Por outro lado, quando $x[k+j|k] \in \mathcal{Q}[j]$, $b[j] = 1$ passa a ser uma solução admissível.

Para garantir que a variável binária b assuma o valor unitário uma única vez ao longo do horizonte de predição $\bar{N}+1$, define-se a restrição:

$$\sum_{j=1}^{\bar{N}+1} b[j] = 1 \tag{20}$$

A função de custo (6) de horizonte variável pode ser então reformulada em termos do horizonte fixo $\bar{N}$ com o auxílio da variável binária b, da seguinte forma:

$$J(x[k]) = \sum_{j=1}^{\bar{N}+1} (j \cdot b[j] + \gamma \|u[k+j-1|k]\|_1 + \mu \|C \cdot x[k+j|k] - y^{ref}[N_w]\|_1) \tag{21}$$

3.2 Minimização da norma 1 das variáveis

Pode-se reescrever a norma $\| \bullet [k+j|k]\|_1$ utilizando-se uma variável auxiliar a fim de se obter um custo linear. Definindo variáveis auxiliares $\alpha^{\bullet}[k+j]$ satisfazendo:

$$\begin{aligned} \bullet_i[k+v_\bullet|k] &\leq \alpha_i^{\bullet}[k+v_\bullet] \\ -\bullet_i[k+v_\bullet|k] &\leq \alpha_i^{\bullet}[k+v_\bullet] \end{aligned} \tag{22}$$

em que o índice indica a i-ésima componente do vetor. Logo, substituindo-se as variáveis auxiliares $\alpha^u[k+v_u]$ com $v_u = j-1$ e $\alpha^y[k+v_y]$ com $v_y = j$, no lugar de $\|u[k+j-1|k]\|_1$ e $\|C \cdot [k+j|k] - y_{ref}[N_w]\|_1$, respectivamente, a função de custo (21) pode ser reescrita como:

$$J(x[k]) = \sum_{j=1}^{\bar{N}+1} \left\{ j \cdot b[j] + \gamma \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^u[k+j-1] + \mu \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^y[k+j] \right\} \tag{23}$$

3.3 Desvio de obstáculo

Assumindo que o obstáculo seja definido pelo politopo:

$$\mathcal{O} = \{x | S^{Ob} \cdot x \leq B^{Ob}\} \tag{24}$$

com $S^{Ob} \in \mathbb{R}^{N_L \times n}$ e $B^{Ob} \in \mathbb{R}^{N_L}$, sendo N_L o número de lados do obstáculo.

Da equação (5), segue que para evitar a colisão com obstáculos, deve-se ter:

$$s_i^{Ob} \cdot x[k+j|k] > b_i^{Ob} + m_i[j] + d_i - \bar{M} \cdot c_i[j] \quad 1 \leq i \leq N_L, \quad 1 \leq j \leq \bar{N}+1 \tag{25}$$

em que s_i^{Ob} e b_i^{Ob} correspondem à linha i da matriz S^{Ob} e ao i-ésimo elemento do vetor B^{Ob} respectivamente. O escalar d_i corresponde a uma distância de segurança entre o veículo e o lado i do obstáculo.

A variável $m_i[j]$ é uma margem acrescentada ao lado direito da inequação (25) para torná-la mais restritiva. Ela é calculada a partir da seguinte recursão em que se levam em consideração os efeitos da perturbação:

$$\begin{aligned} &m_i[0] = 0 \\ &m_i[j] = m_i[j-1] - \min_{w \in \mathcal{W}} (s_i^{Ob} L[j-1] Dw), \\ &\quad 1 \leq j \leq \bar{N}+1 \end{aligned} \tag{26}$$

Analogamente ao caso do conjunto terminal, o escalar $\bar{M}$ deve ser escolhido adequadamente, i.e:

$$\bar{M} > \max |s_i^{Ob}.x - b_i^{Ob} - d_i - m_i[\bar{N}+1]|, \quad 1 \leq i \leq N_L \tag{27}$$

Ao assumir o valor nulo, a variável binária $c_i[j]$ impõe que a posição esteja fora do obstáculo, impondo o complemento da desigualdade que define um semiplano do obstáculo politópico. Quando $c_i[j] = 1$, a restrição é relaxada. Para garantir que ao menos um dos complementos dos semiplanos do obtáculo contenham a posição do veículo a cada instante em (25), evitando assim adentrar no obstáculo, deve-se impor:

$$\sum_{i=1}^{N_L} c_i[j] \leq N_L - 1, \quad 1 \leq j \leq \bar{N}+1 \tag{28}$$

A cada obstáculo adicional, variáveis binárias associadas devem ser definidas respeitando-se as restrições (25) a (28) concomitantemente com as restrições já presentes.

3.4 Relaxamento de Restrições

Uma vez que o problema de minimização (6) foi reformulado utilizando-se um horizonte fixo $\bar{N} \geq N[k]$, deve-se garantir que a solução $u[k+j-1|k] = 0$ seja admissível para $N[k] < j \leq \bar{N}$. Portanto, devem-se relaxar as restrições impostas ao estado e à variável binária c_i para este intervalo de j.
As restrições de estado podem ser relaxadas fazendo uso da variável binária b e o escalar M (definido em (19)), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_p[k+j|k] &\leq x_p^{max}[j] + \sum_{r=1}^{j-1} b[r] \cdot M \\ -x_p[k+j|k] &\leq -x_p^{min}[j] + \sum_{r=1}^{j-1} b[r] \cdot M \end{aligned} \tag{29}$$

para $p = \{1,2,\ldots,n\}$, $\forall j \in \{1,2,..,\bar{N}+1\}$, em que $x_p^{min}[j]$ e $x_p^{max}[j]$ são valores escalares mínimos e máximos de excursão impostos a cada variável do vetor de estados. Estes limites são variantes no tempo, dado que o politopo de estado é endurecido segundo (9a) e (9b).
Adicionalmente, deve-se relaxar a restrição de igualdade relacionada à dinâmica do sistema (7a) após a chegada do veículo no conjunto alvo. Esta restrição de igualdade pode ser reescrita como uma restrição de desigualdade utilizando variável binária e M da seguinte forma:

$$x_p[k+j|k] - A_p^j \cdot x[k|k] - \sum_{i=1}^{j} A_p^{i-1} \cdot B \cdot u[k+j-i|k] - \sum_{r=1}^{j-1} b[r] \cdot M \leq 0 \tag{30}$$

$$x_p[k+j|k] - A_p^j \cdot x[k|k] - \sum_{i=1}^{j} A_p^{i-1} \cdot B \cdot u[k+j-i|k] + \sum_{r=1}^{j-1} b[r] \cdot M \geq 0 \tag{31}$$

para $p = \{1,2...,n\}$, a p-ésima linha do vetor/matriz indicado.

Por fim, a restrição imposta à variável binária c_i pode ser relaxada da seguinte forma:

$$\sum_{v=1}^{N_L} c_v[j] \leq N_L - 1 + \sum_{i=1}^{j-1} b[i] \tag{32}$$

4 Helicóptero 3DOF da Quanser

O helicóptero 3DOF da Quanser pode ser visto na Fig. 1, com seus quatro componentes principais: corpo, base, braço principal e braço secundário.

Figura 1: Helicóptero 3DOF da Quanser. a) Motor Dianteiro, b) Motor Traseiro, c) Braço Principal, d) Base, e) Braço Secundário, f) Contrapeso.

O corpo do helicóptero contém uma haste em cujas extremidades encontram-se acoplados um par formado por hélices e um motor DC cuja tensão é restrita ao intervalo de 0 a 5V (tensão aplicada à entrada de amplificadores). Se houver diferença entre as tensões aplicadas em cada um dos motores, o conjunto rotaciona em torno do eixo do braço principal, movimento este denominado arfagem. A base está ligada ao braço principal e o fixa à bancada por meio de uma junta que lhe fornece dois graus de liberdade, a rotação em torno do eixo horizontal (movimento de elevação) e em torno do eixo vertical (movimento de deslocamento). A Fig. 2 ilustra cada um dos movimentos e a seta indica o sentido positivo do respectivo ângulo.

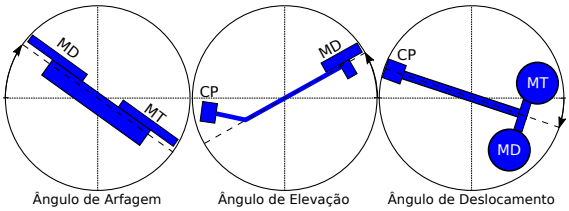

Figura 2: Três graus de liberdade do Helicóptero. MD = Motor Dianteiro, MT = Motor Traseiro, CP = Contrapeso.

O contrapeso tem a função de reduzir o empuxo necessário para manter o helicóptero pairando.

4.1 Modelo Linear a Tempo Discreto do Helicóptero 3DOF

Utiliza-se um modelo linear a tempo discreto desenvolvido em Maia (2008) para o helicóptero 3DOF. O vetor de estados é $x^T = \begin{bmatrix} P & \dot{P} & E & \dot{E} & T & \dot{T} \end{bmatrix}$, em que P é o ângulo de arfagem, E, o ângulo de elevação e T, o ângulo de deslocamento. O modelo foi linearizado em torno do ponto de equilíbrio $\bar{x}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7° & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{u}^T = \begin{bmatrix} 2{,}804 & 2{,}804 \end{bmatrix}$ V e discretizado assumindo o tempo de amostragem de $40ms$, resultando:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}04 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}999 & 0{,}04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}048 & 0{,}999 & 0 & 0 \\ -0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}04 \\ -0{,}05 & -0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}002 & -0{,}002 \\ 0{,}112 & -0{,}112 \\ 0 & 0 \\ 0{,}016 & 0{,}016 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Admitem-se os seguintes valores máximos e mínimos de excursão para as variáveis:

$$-10^\circ \leq x_1[k] - \bar{x}_1 \leq 10^\circ \quad (35a)$$
$$-15^\circ \leq x_3[k] - \bar{x}_3 \leq 15^\circ \quad (35b)$$
$$0 \leq u_i[k] + \bar{u}_i \leq 5, \quad i = 1,2 \quad (35c)$$

Neste trabalho, admite-se uma perturbação de entrada à semelhança de Maia (2008) e, portanto, escolhe-se $D = B$.

No problema de planejamento para o helicóptero 3DOF, o obstáculo e o conjunto alvo são definidos em termos dos ângulos E e P. Dessa forma, a saída é dada por:

$$y[k] = C \cdot x[k], \quad (36)$$

com

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Como o helicóptero é um corpo extenso e o problema de planejamento considera apenas uma massa pontual, é necessário expandir o obstáculo adequadamente para evitar colisões. Isso pode ser feito determinando as dimensões do helicóptero em cada direção, assumindo para isso o caso mais extremo de ângulo de arfagem, e adicionando margens de segurança ao obstáculo nas restrições (25). A dedução do valor das margens de segurança não será detalhada neste artigo.

5 Cenário de simulação

Para as simulações deste trabalho, foi criado um cenário de voo definido no $\mathbb{R}^2$, com o eixo horizontal representando o ângulo de deslocamento e o eixo vertical, o ângulo de elevação. Partindo de (24), define-se um obstáculo centrado em $(T_{Ob},E_{Ob}) = (30^\circ, -4^\circ)$:

$$\begin{bmatrix} C \\ -C \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} E_{Ob} - {\delta_b}^{Ob} - d_{Emax} - \epsilon \\ T_{Ob} - {\delta_e}^{Ob} - d_{Tmax} - \epsilon \\ -E_{Ob} - {\delta_c}^{Ob} - d_{Emax} - \epsilon \\ -T_{Ob} - {\delta_d}^{Ob} - d_{Tmax} - \epsilon \end{bmatrix} \quad (38)$$

com $\delta_b^{Ob} = 27^\circ, \delta_c^{Ob} = 0^\circ, \delta_d^{Ob} = \delta_e^{Ob} = 2^\circ$ delimitando o obstáculo. O valor $\epsilon = 10^{-5}$ foi definido para contornar erros numéricos. Os escalares d_{Emax} e d_{Tmax} se referem às margens de segurança adicionadas para contabilizar a dimensão física do corpo do helicóptero nas direções de elevação e arfagem, respectivamente. Estes valores foram obtidos considerando-se o cenário de pior caso que ocorre quando $P = 10^\circ$.

Utilizando-se a inequação (17), define-se um conjunto-alvo em forma de politopo retangular centrado em (T_Q,E_Q):

$$\begin{bmatrix} C \\ -C \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} E_Q + {\delta_c}^Q \\ T_Q + {\delta_d}^Q \\ -E_Q + {\delta_b}^Q \\ -T_Q + {\delta_e}^Q \end{bmatrix}, \quad (39)$$

sendo $\delta_b^Q = \delta_c^Q = \delta_d^Q = \delta_e^Q = \delta$, valores que, somados ao centro (T_Q,E_Q), delimitam o politopo.

Os cenários para comparação são:

1. Voo direto para o conjunto alvo final, sem divisão em conjuntos intermediários, denominado de "1 Conjunto";
2. Voo com divisão usando quatro conjuntos intermediários antes do mesmo conjunto alvo do cenário 1, denominado de "5 Conjuntos". Quando o conjunto alvo intermediário é atingido, comuta-se para o próximo conjunto, resolvendo-se um novo problema de otimização com um mesmo horizonte fixo.

A tabela 1, contém os valores definidos para os conjuntos alvo das simulações realizadas.

Tabela 1: Valores definidos para conjunto alvo.

	Número do Conjunto	Coordenada do Centro	Tamanho δ
1 Conjunto	**1**	$(T_Q,E_Q) = (60^\circ,0^\circ)$	2°
5 Conjuntos	**1**	$(T_Q,E_Q) = (3^\circ,6^\circ)$	2°
	2	$(T_Q,E_Q) = (14^\circ,9^\circ)$	2°
	3	$(T_Q,E_Q) = (30^\circ,9^\circ)$	2°
	4	$(T_Q,E_Q) = (45^\circ,8^\circ)$	2°
	5	$(T_Q,E_Q) = (60^\circ,0^\circ)$	2°

Por fim, definem-se, para ambos os cenários, um peso de controle $\rho = 0{,}1$ e um peso de desvio da trajetória com relação ao centro do conjunto alvo $\mu = 1$. Foi definida também uma perturbação com distribuição uniforme e média nula que age sobre a entrada do sistema: $-w_{min} \leq w[k] \leq w_{max}$, $k = \{0,1,...,\bar{N}\}$. Embora se tenha adotado uma distribuição uniforme neste trabalho, qualquer outra distribuição definida em um domínio convexo, fechado e com a origem sendo um ponto interior a $\mathcal{W}$ pode ser utilizada.

Em um cenário real, a perturbação de entrada definida pode representar uma tensão exógena que se soma à tensão comandada pelos atuadores, produzindo como efeito um descasamento entre o modelo de predição e o modelo do helicóptero. A magnitude da perturbação admissível está vinculada ao horizonte fixo $\bar{N}$ necessário para resolver o Problema 1. Para problemas em que são necessários horizontes $\bar{N}$ elevados, magnitude elevadas para o politopo de perturbação admissível pode resultar em politopos $\mathcal{X}[j]$, $\mathcal{U}[j]$, $\mathcal{Q}[j]$ vazios e, consequentemente, não haver nenhuma solução factível.

A escolha do horizonte fixo $\bar{N}$, por sua vez, deve atender a dois requisitos: ser grande o suficiente para resolver o Problema 1 e resultar em um custo que seja ótimo.

Para o cenário "1 Conjunto", o horizonte $\bar{N}$ ajustado foi $\bar{N} = 81$ com uma magnitude de perturbação admissível de $w_{min} = w_{max} = 0{,}01\ V$. Por outro lado, para o cenário "5 Conjuntos", devido ao fato do Problema 1 ser resolvido repetidamente utilizando um mesmo horizonte fixo, $\bar{N}$ é limitada inferiormente pelo trecho da trajetória que exige maior $\bar{N}$. Neste caso, obteve-se um $\bar{N} = 24$ e, para fins de comparação de desempenho, manteve-se $w_{min} = w_{max} = 0{,}01\ V$.

Os resultados de simulação foram obtidos usando o Gurobi (Gurobi Optimization, 2016) para resolver o problema de otimização em um computador pessoal com processador Core™ i7-6700K com 24GB de memória RAM. As operações de diferenças de Pontryagin foram efetuadas utilizando-se o pacote MPT para Matlab (Herceg et al., 2013).

6 Resultados

As trajetórias obtidas para ambos os cenários apresentados na seção 5 são ilustradas pelas Fig. 3 e Fig. 4.

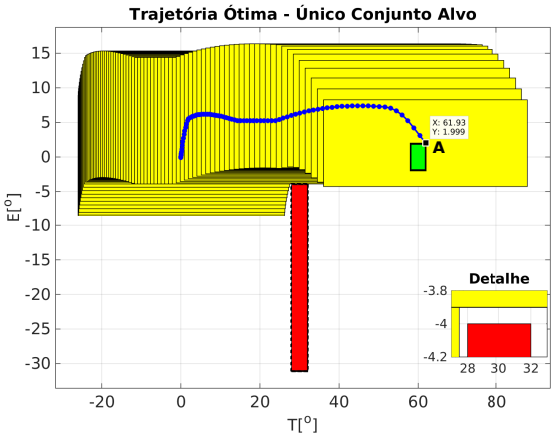

Figura 3: Trajetória do helicóptero considerando um único conjunto alvo. $A = (61{,}93; 1{,}99)$.

Ambas as trajetórias obtidas para o centro geométrico do helicóptero (curva azul) evitam com sucesso a colisão do corpo extenso (retângulos em amarelo) do veículo com o obstáculo (retângulo em vermelho), conforme se constata pelo detalhamento das figuras.

Contudo, a abordagem utilizando múltiplos conjuntos alvos reduziu significativamente o tempo computacional necessário para a obtenção de solução do problema de otimização como se pode verificar através da Fig. 5. Enquanto o tempo médio requerido para obter a solução do problema de otimização no Cenário 1 foi de 10,84 s, no Cenário 2 este tempo caiu para 0,084 s, o que corresponde a uma redução de 99,22 %.

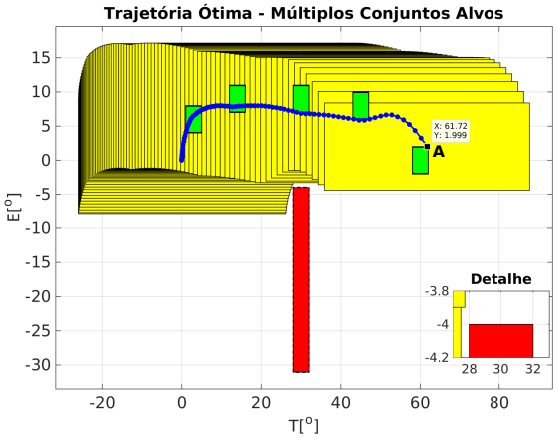

Figura 4: Trajetória do helicóptero considerando conjuntos alvo intermediários. $A = (61{,}72; 1{,}99)$.

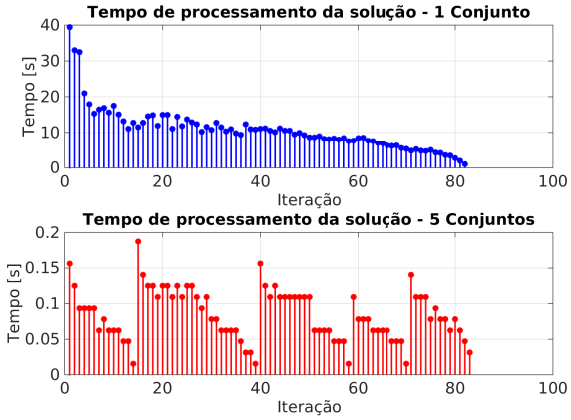

Figura 5: Comparação entre os tempos computacionais.

Tabela 2: Comparação de desempenho

	Conjunto Alvo	Intervalo (em iterações)	Gasto de Controle	Erro de Rastream.	Custo do Estágio
1 Conjunto	1	0 - 81	78,35 V	64,33	154,16
	Total	82 iterações	78,35 V	64,33	154,16
5 Conjuntos	1	0 - 13	14,46 V	1,75	17,19
	2	14 - 38	4,05 V	4,46	29,86
	3	39 - 57	4,72 V	3,61	23,08
	4	58 - 69	4,84 V	2,10	14,58
	5	70 - 82	48,53 V	2,90	20,76
	Total	83 iterações	76,59 V	14,81	105,47

Com o intuito de comparar o desempenho obtido das duas abordagens, construiu-se a tabela 2. A tabela é preenchida com o conjunto alvo e as parcelas de custo associadas ao voo até o referido conjunto e foi calculada a partir da equação (40):

$$J = \sum_{k=1}^{\bar{N}+1} \left\{ k \cdot b[k] + \gamma \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^u[k-1] + \mu \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^y[k] \right\} \tag{40}$$

Uma análise inicial dos índices de desempenho induz a concluir que a abordagem por divisão em *waysets* produz um controlador de melhor desempenho em relação à abordagem de um único conjunto alvo. No entanto, neste caso os custos associados ao dois cenários não refletem adequadamente o desempenho do controlador, uma vez

que os problemas de otimização resolvidos nos dois cenários são diferentes. Enquanto no Cenário 1, o objetivo de controle é atingir o conjunto alvo final diretamente, no Cenário 2 este conjunto alvo é um *wayset* intermediário.

Apesar deste fato, uma comparação pode ser realizada desprezando-se as parcelas de custo associadas ao erro de rastreamento. Neste caso, os custos atualizados J_1 e J_2 correspondentes aos cenários 1 e 2, respectivamente, são: $J_1 = 89{,}83$ e $J_2 = 90{,}66$. Como era de se esperar, a abordagem por *waysets* resultou em uma solução sub-ótima comparada àquela em que se define um único Conjunto Alvo, ilustrando uma relação de compromisso existente entre a redução do horizonte necessário para resolver o problema de otimização e a perda da otimalidade da solução.

7 Conclusões

Neste artigo se propôs a aplicação de uma técnica de planejamento de trajetórias com robustez a perturbações a um modelo de helicóptero de laboratório com três graus de liberdade. Tal uso para uma planta de dinâmica mais complexa é uma lacuna na literatura, mas foi demonstrado por meio de simulações ser possível aplicar esta técnica com sucesso.

Contudo, os tempos computacionais demandados pela tarefa de planejamento foram excessivamente grandes, comprometendo qualquer possibilidade de usar a técnica em tempo real. Visando lidar com esse problema, foi proposta a divisão da tarefa de planejamento em tarefas que demandem menos tempo computacional, por meio do uso de conjuntos alvo intermediários (*waysets*). Isso foi capaz de reduzir o tempo computacional significativamente, tornando palpável a possibilidade de aplicar a técnica ao helicóptero em tempo real, tendo sido notada apenas uma pequena perda de desempenho.

Como trabalhos futuros propõem-se: 1) realização da seleção dos *waysets* de maneira automática, com garantia de que se possa atingir o próximo a partir do anterior a despeito das perturbações e 2) realização de ensaios experimentais para validar a proposta.

8 Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP (Auxílio Regular proc. 2016/03647-3). Rogério Chung agradece ao CNPq pela bolsa de mestrado.

Referências

Athans, M. e Falb, P. L. (2007). *Optimal Control - An Introduction to the Theory and Its Applications*, Dover Publications.

Bemporad, A. e Morari, M. (1999). Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints, *Automatica* **35**(3): 407–427.

Gurobi Optimization, Inc. (2016). Gurobi optimizer reference manual. http://www.gurobi.com.

Hartley, E. N. e Maciejowski, J. M. (2014). FPGA-based predictive control system for spacecraft rendezvous in elliptical orbits, *Optimal Control Applications and Methods* **36**(5): 585–607.

Hoy, M., Matveev, A. S., e Savkin, A. V. (2015). Algorithms for collision-free navigation of mobile robots in complex cluttered environments: a survey, *Robotica* **33**: 467–497.

Herceg, M., Kvasnica, M., Jones, C. e Morari, M. (2013). Multi-Parametric Toolbox 3.0, *Proc. of the European Control Conference*, Zürich, Switzerland, pp. 502–510. http://control.ee.ethz.ch/∼mpt.

Maciejowski, J. (2000). *Predictive Control with Constraints*, Prentice Hall.

Maia, M. H. (2008). *Controle preditivo robusto de um helicóptero com três graus de liberdade sujeito a perturbações externas*, Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico da Aeronáutica.

Richards, A. e How, J. P. (2006). Robust variable horizon model predictive control for vehicle maneuvering, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **16**(7): 333–351.

Rossiter, D. J. A. (2003). *Model-Based Predictive Control - A Practical Approach*, CRC PRESS.

Shekhar, R. C., Kearney, M. e Shames, I. (2014). Robust model predictive control of unmanned aerial vehicles using waysets, *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **38**(10): 1898–1907.