# CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES ATRAVÉS DE FUNÇÃO DE MONITORAÇÃO E ESCALONAMENTO TEMPORAL PARA RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIAS EM PLANTAS INCERTAS DE FASE NÃO-MÍNIMA

Roberto Santos*, Tiago Roux Oliveira*

*Dept. de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, RJ 20550-900, Brasil.

Emails: roberto.silveira@petrobras.com.br, tiagoroux@uerj.br

**Abstract**— In this paper we combine the sliding mode control strategy with a time-scaling technique to the problem of trajectory tracking for linear nonminimum phase systems. Unlike other publications which in general assume the complete knowledge of the nonminimum-phase plant parameters or just handle the stabilization/regulation problem, here we deal with the tracking objective by assuming the plant is subject parametric uncertainties. When using the time-scaling, we may expect that the tracking of the reference model occurs slowly, depending on the time-scaling parameter. Global asymptotic stability is demonstrated for the closed-loop system by applying only output feedback, whereas the output tracking error ultimately achieves arbitrarily small residual sets. Simulation results illustrate the performance of the proposed control algorithm.

**Keywords**— non-minimum phase, uncertain systems, sliding mode control, output feedback, time-scaling, monitoring function, trajectory tracking, global stability.

**Resumo**— Neste artigo combina-se a estratégia de controle por modos deslizantes com a técnica de escalonamento temporal para o problema de rastreamento de trajetórias em sistemas lineares com fase não-mínima. Diferentemente de outros trabalhos na literatura que em geral assumem o conhecimento total dos parâmetros da planta de fase não-mínima ou abordam somente o problema de estabilização/regulação, realizamos aqui o rastreamento de trajetórias admitindo-se que a planta está sujeita a incertezas paramétricas. Ao utilizar o escalonamento temporal, espera-se que o rastreamento do modelo de referência ocorra de maneira mais lenta, dependendo do valor do parâmetro utilizado no escalonamento. A estabilidade global e assintótica é demonstrada para o sistema em malha fechada aplicando-se apenas realimentação de saída, enquanto que o erro de rastreamento atinge conjuntos residuais arbitrariamente pequenos. Resultados de simulação ilustram o desempenho do algoritmo de controle proposto.

**Palavras-chave**— fase não-mínima, sistemas incertos, controle por modos deslizantes, realimentação de saída, escalonamento temporal, função de monitoração, rastreamento de trajetória, estabilidade global.

## 1 Introdução

Sistemas lineares de fase não-mínima são aqueles que apresentam em sua função de transferência um ou mais zeros com parte real positiva. Estratégias de controle baseadas em alto ganho são muitas vezes utilizadas para compensar incertezas paramétricas em um sistema. Entretanto, sistemas de fase não-mínima são particularmente difíceis de serem controlados, pois um ganho de controle alto pode levar os pólos do sistema em malha fechada à instabilidade (Nazrulla and Khalil, 2011; Junior et al., 2011).

Quando aplica-se um sinal de controle em uma planta de fase não-mínima, o valor de sua variável de saída inicialmente se afasta de um valor desejado. Em seguida, se o sinal de controle foi projetado corretamente, a trajetória de saída da planta tende a alcançar o valor desejado. Na prática, podemos observar um *overshoot* ou um *undershot* no gráfico da saída da planta. Estas curvas, que são características de sistemas de fase não-mínima, indicam que inicialmente a direção de controle aplicada não é a correta, fazendo com que o valor da saída se afaste do valor desejado.

Em (Levy, 2009), foram feitos chaveamentos manuais na direção de controle aplicada em uma planta de fase não-mínima, afim de reduzir o valor do *undershot* de sua saída, porém o resultado desta técnica não foi satisfatório, pois acabou agravando o problema uma vez que os valores de *undershot* aumentaram. Neste trabalho utilizaremos a função de monitoração apresentada em (Oliveira et al., 2010; Aminde et al., 2013) que em conjunto com uma técnica de escalonamento temporal (Hsu et al., 2014) realizará estes chaveamentos da direção de controle de forma automática.

O objetivo deste trabalho é propor uma estratégia de controle para um sistema de fase não-mínima com parâmetros desconhecidos. Em (Hsu et al., 2014) foi apresentado um controlador por busca extremal via modo deslizante e realimentação de saída cujo objetivo era fazer com que a saída de uma planta atingisse o valor máximo de uma função, num cenário em que a direção de controle poderia ser inclusive variante no tempo. Neste trabalho, iremos modificar esta estratégia de controle para aplicá-la ao problema de rastreamento de trajetória para sistemas de fase não-mínima.

O problema de direção de controle desconhecida abordado em (Hsu et al., 2014) pode ser generalizado para o problema de fase não-mínima, uma vez que os sinais dos zeros da função de transferência da planta podem ser relacionados diretamente com o ganho DC do sistema, e indiretamente com

a sua direção de controle.

Em projetos de sistemas de controle para sistemas de fase não-mínima geralmente admite-se o conhecimento prévio dos parâmetros da planta a ser controlada (Gopalswamy and Hedrick, 1993; Shkolnikov and Shtessel, 2001; Baev et al., 2008). Aqui, abre-se mão desse conhecimento perfeito, admitindo-se a possibilidade de o sistema apresentar incertezas paramétricas, o que traz maior dificuldade no projeto do controlador.

## 2 Descrição do Problema

Considere o seguinte sistema linear com grau relativo arbitrário $n^*$ :

$$\dot{v} = u, \quad (1)$$
$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad (2)$$
$$y = Cx \quad (3)$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a entrada de controle, $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $y \in \mathbb{R}$ é a saída medida do sistema (1) – (3).

A planta a ser controlada é representada por (2) e (3), enquanto que o integrador em (1) é usado para se obter um sinal virtual de controle $v \in \mathbb{R}$ contínuo, que incrementa o grau relativo do sistema (Levant, 2003), isto é, $n \geq n^* - 1$ em vez de $n \geq n^*$, mas ajuda a suavizar o sinal de controle por modos deslizantes $u$ introduzido adiante. O incremento do grau relativo do sistema faz com que o chaveamento em alta frequência fique retido apenas no sinal de controle $u$; assim, o controle virtual $v$ passa a ser aplicado diretamente na planta. Assim, espera-se uma melhora na atenuação dos efeitos do *chattering* no sistema em malha fechada (Utkin et al., 1999).

As matrizes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ e a ordem $n$ do subsistema (2)-(3) podem ser desconhecidas e a função de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ pode apresentar zeros no semiplano direito complexo, admitindo assim que o sistema possa ser de fase não-mínima ou mínima.

### 2.1 Objetivo de Controle

O objetivo do controle para rastreamento de trajetórias é fazer com que a saída medida do sistema (3) rastreie o comportamento de uma trajetória pré-definida. Em (Hsu et al., 2014), um problema de busca extremal foi reformulado para um problema de rastreamento em que a direção de controle é desconhecida. Neste trabalho deseja-se aplicar este método de controle para sistemas de fase não-mínima, buscando uma lei de controle $u(t)$ por realimentação de saída tal que, para qualquer condição inicial, seja possível que a variável de saída $y(t)$ do sistema rastreie uma determinada trajetória desejada o mais próximo possível.

### 2.2 Representação de Dinâmicas Não-Modeladas por Perturbação Singular

Utilizando a abordagem por perturbação singular (Kokotović et al., 1999), foi mostrado em (Hsu et al., 2014) que o controle por modos deslizantes é robusto a dinâmicas rápidas não-modeladas de modo que o sistema perturbado na forma a seguir (Kokotović et al., 1999):

$$\dot{v} = u, \quad (4)$$
$$\mu\dot{x} = Ax + Bv, \quad (5)$$
$$y = Cx \quad (6)$$

satisfaz a desigualdade

$$|y - y^*| \leq \mathcal{O}(\sqrt{\mu}), \quad (7)$$

onde $\mu > 0$ é uma constante suficiente pequena. A demostração completa de (7) segue os mesmos passos apresentados em (Costa and Hsu, 1991), (Costa and Hsu, 1992), considerando $y^*$ como um valor desejado para $y$.

### 2.3 Escalonamento Temporal

Assim, aplicando-se um apropriado escalonamento temporal linear (Moya et al., 2002)

$$\frac{dt}{d\tau} = \mu, \quad (8)$$

o sistema (4)–(6) pode ser reescrito como

$$v' = \mu u, \quad (9)$$
$$x' = Ax + Bv, \quad (10)$$
$$y = Cx, \quad (11)$$

onde $v' := \frac{dv}{d\tau}$ e $x' := \frac{dx}{d\tau}$. Isso significa que $\exists \mu^* > 0$ tal que o sinal de entrada $u$ pode ser escalonado, tal como em (9), para controlar o sistema original (2)-(3) em uma escala de tempo dilatada regida por $t = \mu\tau$, $\forall \mu \in (0, \mu^*]$.

O sentido para o escalonamento temporal é que se o controlador para rastreamento de trajetória originalmente proposto para um sistema com grau relativo $n^* = 1$ é robusto a dinâmicas não-modeladas rápidas ($\mu \to 0$) e estáveis, então este é também adequado para controlar dinâmicas com grau relativo arbitrário, se for devidamente escalonado. Como esperado, o preço a ser pago é que a resposta do sistema em malha fechada seja lenta.

### 2.4 Principais Hipóteses

As hipóteses a seguir são válidas para o sistema original (1)–(3) e para seu modelo equivalente (9)–(11):

**(H1)** *(Sobre as incertezas)*: Todos os parâmetros incertos da planta representada pela tripla $(A, B, C)$ pertencem a um conjunto compacto $\Omega$.

**(H2)** *(Sobre a estabilidade da planta linear)*: A matriz A em (2) deve ser Hurwitz.
**(H3)** *(Sobre o ganho DC do sistema linear)*: O ganho DC do sistema linear (2)–(3) é desconhecido; assim, $k_{DC} = -CA^{-1}B \neq 0$, podendo a constante $k_{DC}$ ser positiva ou negativa. Além disso, assume-se que que existe um limitante inferior tal que: $0 < \underline{k}_{DC} \leq |k_{DC}|$.

A partir de **(H2)** e **(H3)**, podemos escrever a seguinte função de transferência para o subsistema linear (2)–(3):

$$G(s) = k_p \frac{N(s)}{D(s)}\,, \tag{12}$$

onde $N(s)$ e $D(s)$ são polinômios mônicos representados como $N(s) = (s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)$ e $D(s) = (s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)$, com $m \in \mathbb{N}^*$ sendo o número de zeros, $n \in \mathbb{N}^*$ o número de pólos da função de transferência, o grau relativo é $n^* = n - m$ e $k_p > 0$ sem perda de generalidade. Assim sendo, definindo-se $z \in \mathbb{N}^*$ como a quantidade de zeros de fase não-mínima do sistema (2)–(3), conclui-se que

$$\begin{cases} k_{DC} > 0, & \text{se } z \text{ for par} \\ k_{DC} < 0, & \text{se } z \text{ for ímpar.} \end{cases} \tag{13}$$

**Observação 1** *Neste artigo as técnicas de controle apresentadas têm por objetivo controlar sistemas de fase não-mínima, porém estas são válidas também para sistemas de fase mínima.*

## 3 Controle via Função de Monitoração para Rastreamento de Trajetórias

Primeiramente vamos resumir alguns resultados obtidos em (Oliveira et al., 2010) para o sistema (4)–(6) sem a presença de dinâmicas desconhecidas ($\mu = 0$).

### *3.1 O caso singular $\mu = 0$*

Para este caso, a equação diferencial (5) é substituída pela equação algébrica $x = -A^{-1}Bv$ e, a partir de (4) e (6), a primeira derivada temporal do sinal de saída $y$ é dada por

$$\dot{y} = k_{DC}u \tag{14}$$

onde o ganho DC, chamado de $k_{DC}$, coincide com o ganho de alta frequência e é o coeficiente de $u$ que aparece na primeira derivada temporal da saída $y$, sendo dado por

$$k_{DC} = -CA^{-1}B. \tag{15}$$

O $\text{sgn}(k_{DC})$ também é chamado de direção de controle. Neste caso, a lei de controle para plantas com $\text{sgn}(k_{DC})$ desconhecido proposta por (Oliveira et al., 2010) seria dada por:

$$u = \begin{cases} u^+ = -\rho(t)\text{sgn}(e), & t \in T^+, \\ u^- = +\rho(t)\text{sgn}(e), & t \in T^-, \end{cases} \tag{16}$$

onde a função de monitoração é usada para decidir quando $u$ deve ser chaveado de $u^+$ para $u^-$ e *vice versa*. Em (16), $\rho(t) > 0$ é uma função de modulação contínua a ser projetada nas seções posteriores e os conjuntos $T^+$ e $T^-$ satisfazem $T^+ \cap T^- = \emptyset$ e $T^+ \cup T^- = [0, +\infty)$.

Aqui abordaremos o problema considerando que o sistema é de fase não-mínima, utilizando a função de monitoração apresentada em (Oliveira et al., 2010) para identificar o sinal de $k_{DC}$ e em seguida aplicar a direção de controle adequada.

O sinal do erro $e(t)$ é dado por

$$e(t) = y(t) - y_m(t)\,, \tag{17}$$

onde $y_m(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de saída desejado a ser seguido pela saída da planta $y(t)$, sendo gerado pelo modelo de referência

$$\dot{y}_m(t) = -a_m y_m(t) + k_m r_m(t)\,, \tag{18}$$

onde $a_m > 0$ e $k_m > 0$ são constantes dadas pelo projetista e $r_m(t)$ é uma trajetória uniformemente limitada.

A ideia em (Oliveira et al., 2010) foi desenvolver uma função de modulação $\rho$ tal que $y(t)$ rastreie $y_m(t)$ o mais próximo possível. Para que isto ocorra, devemos projetar $\rho$ tal que o erro de rastreamento da saída $e(t)$ tenda a um conjunto residual pequeno.

### *3.2 Limitante Superior do Erro para $\mu = 0$*

A partir de (14), (17), (18) e adicionando e subtraindo $\lambda_m e$ na equação dinâmica do erro $e(t)$, obtém-se

$$\dot{e} = k_{DC}u + a_m y_m - k_m r_m + \lambda_m e - \lambda_m e \tag{19}$$

$$\dot{e} = -\lambda_m e + k_{DC}(u + d_e)\,, \tag{20}$$

onde $\lambda_m > 0$ é uma constante arbitrária e

$$d_e(t) := \frac{1}{k_{DC}}[a_m y_m(t) - k_m r_m(t) + \lambda_m e(t)], \tag{21}$$

lembrando que os sinais $y_m(t)$ e $r_m(t)$ têm amplitude limitada.

Desta forma, se a lei de controle

$$u = -sgn(k_{DC})\rho sgn(e) \tag{22}$$

for utilizada com uma função de modulação $\rho$ não-negativa satisfazendo

$$\rho \geq |d_e| + \delta, \tag{23}$$

e $\delta > 0$ sendo uma constante arbitrária pequena, então usando-se o *Lema de Comparação* (Filippov, 1964), tem-se que, $\forall t \in [t_i, +\infty)$:

$$|e(t)| \leq |e(t_i)|e^{\lambda_m(t-t_i)}, \tag{24}$$

onde $t_i \in [0, +\infty)$.

### 3.3 Limitante Superior do Erro para $\mu \neq 0$

Quando $\mu \neq 0$ em (5), o escalonamento temporal (8) nos permite considerar o sistema original (1)–(3) em uma diferente escala de tempo sendo controlada por (16) devidamente escalonada por $\mu u$, como visto em (9).

Com o intuito de aplicar o escalonamento, a função de modulação deve ser modificada para satisfazer

$$\rho \geq \mu[|d_e| + \delta] \tag{25}$$

em vez de (23).

Da análise por perturbação singular mencionada na Seção 2.2, se (22) fosse utilizada novamente, um limitante superior para o rastreamento do erro $e(t)$ poderia ser diretamente obtido, para $\mu$ suficientemente pequeno, simplesmente adicionando-se os termos de regime permanente e transitório em (7) e (24), respectivamente. Assim, obteríamos

$$|e(t)| \leq \zeta(t)\,, \tag{26}$$

$$\zeta(t) := |e(t_i)|e^{-\lambda_m(t-t_i)} + \pi_e(t) + \mathcal{O}(\sqrt{\mu}), \tag{27}$$

onde $\pi_e(t)$ é um termo com decaimento exponencial rápido que contém os efeitos da dinâmica estável não-modelada em (5).

O principal problema é que para obter-se (26) e (27), é necessário o conhecimento do $sgn(k_{DC})$ em (22). Na seção a seguir, um esquema de chaveamento baseado na função de monitoração é desenvolvido para lidar com a falta de conhecimento $sgn(k_{DC})$. Diferentemente de (Hsu et al., 2014), neste artigo $\text{sgn}(k_{DC})$ é constante, mas dependente do número de zeros de fase não-mínima.

### 3.4 Projeto da Função de Monitoração

A descrição detalhada da função de monitoração pode ser encontrada em (Yan et al., 2008), (Oliveira et al., 2010). Aqui, apenas uma breve descrição é dada. Lembrando que se a desigualdade (26) é verificada quando a direção do controle é correta, parece natural utilizar $\zeta$ em (27) como base para decidir se um chaveamento no sinal de controle $u$ em (22) de $u^+$ para $u^-$ (ou de $u^-$ para $u^+$) é necessário, i.e., o chaveamento ocorre quando (27) é violada.

Portanto, considere a seguinte função

$$\varphi_k(t) = |e(t_k)|e^{-\lambda_m(t-t_k)} + a(k)e^{-t/a(k)} + r \tag{28}$$

onde $t_k$ é o instante em que ocorre o chaveamento, $k$ é a quantidade de chaveamentos, $a(k)$ é qualquer sequência monotonicamente crescente em $k$ e $r > 0$ é uma constante arbitrária pequena de ordem $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$. A *função de monitoração* $\varphi_m$ pode ser definida como

$$\varphi_m(t) := \varphi_k(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \subset [0, +\infty). \tag{29}$$

Note que a partir de (28) e (29), tem-se $|e(t)| < |\varphi_m(t)|$ em $t = t_k$. Consequentemente, $t_k$ é definido como o instante de tempo quando a função de monitoração $\varphi_m(t)$ encontra $|e(t)|$, isto é,

$$t_{k+1} := \begin{cases} \min\{\mathrm{t} > \mathrm{t_k} : |\mathrm{e(t)}| = \varphi_\mathrm{k}(\mathrm{t})\}, & \text{se existir,} \\ +\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{30}$$

onde $k \in \{1, 2, ...\}$ e $t_0 := 0$.

Por construção, a seguinte desigualdade é diretamente obtida de (29)

$$|e(t)| \leq \varphi_m(t), \quad \forall t \in [0, +\infty). \tag{31}$$

Utilizando o controlador proposto, se o chaveamento da função de monitoração cessa, o conjunto residual em torno do valor de $y_m$ é dependente dos valores para os quais a função de monitoração converge. De acordo com a definição dada em (28), o conjunto residual final será da ordem de $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$.

### 3.5 Análise de Estabilidade

De acordo com (9), o controlador (16) deve ser escalonado para ser aplicado ao sistema original (1)–(3). Neste caso, a função de modulação $\rho$ deve satisfazer a desigualdade (25).

O teorema a seguir apresenta uma possível implementação da função de modulação tal que (25) seja verificada e o controlador por realimentação de saída proposto baseado em função de monitoração faça com que a saída $y(t)$ rastreie o modelo de referência $y_m(t)$ com um erro pequeno. A amplitude das oscilações do erro de $y$ em torno de $y_m$ são mantidas na ordem de $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$.

*Teorema 1*: Considere o sistema (1)–(3), o modelo de referência (18), a função de monitoração (28)–(29) e a lei de controle (16). Assuma que **(H1)**–**(H3)** sejam válidas e que a função de modulação $\rho$ em (16) é dada por

$$\rho(t) = \frac{\mu}{\underline{k}_{DC}}[a_m|y_m(t)| + k_m|r_m(t)| + \lambda_m|e(t)|] + \mu\delta\,, \tag{32}$$

para $\mu > 0$ suficientemente pequeno, $\delta > 0$ sendo uma constante arbitrária qualquer e $\underline{k}_{DC} > 0$ definida em **(H3)**. Então: **(a)** A função de monitoração fará um número finito de chaveamentos na direção do sinal de controle até que esta seja corretamente estimada; **(b)** A saída $y(t)$ tende globalmente para uma vizinhança pequena de $y_m$ da ordem de $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$.

*Prova*: Apenas um esboço da prova é apresentado. Considera-se 2 casos: $|e(t)| > \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ e $|e(t)| \leq \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$. Enquanto $|e(t)| > \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$, suponhamos por contradição que $u$ dado por (16) realiza chaveamentos sem parar, $\forall t \in [0, +\infty)$. Então o termo $a(k)e^{-t/a(k)}$ em (28) aumentará ilimitadamente à medida que $k \to +\infty$. Assim, há um valor finito $\kappa > 0$ tal que para $k \geq \kappa$: **(i)** o termo

$a(\kappa)e^{-t/a(\kappa)}$ será um limitante superior $\pi_e(t)$ em (27) e **(ii)** a direção de controle estará correta. A partir do item **(i)**, conclui-se que $\varphi_m(t) > \zeta(t)$, $\forall t \in [t_\kappa, t_{\kappa+1})$, com $\zeta$ em (27). De **(ii)** $\zeta$ é um limitante superior válido para $|e|$. Consequentemente, nenhum chaveamento irá ocorrer após $t = t_\kappa$, i.e., $t_{\kappa+1} = +\infty$ (30), o que nos leva a uma contradição. Portanto, $\varphi_m$ deve parar o chaveamento após algum valor finito $k = N$ e $t_N \in [0, +\infty)$, sempre que $|e(t)| > \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$. Assim sendo, de (28), (29) e (31), conclui-se que

$$|e(t)| \leq |e(t_N)|e^{-\lambda_m(t-t_N)} + a(N)e^{-t/a(N)} + \mathcal{O}(\sqrt{\mu})\,,$$

i.e., o erro de rastreamento $e(t)$ converge para um conjunto residual da ordem $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$. Lembrando que no caso complementar já temos $|e(t)| \leq \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$. Logo, conclui-se que $e(t)$ tende globalmente para um conjunto residual da ordem $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$, à medida que $t \to +\infty$. □

**Observação 2** *Uma vez que o projeto do controlador é desenvolvido baseado na escala de tempo lenta $\tau = \mu t$, é natural que os parâmetros $a_m$ e $k_m$ do modelo de referência (18), assim como a constante $\lambda_m > 0$ em (20) usada na função de monitoração (28)–(29) devam ser escalonadas apropriadamente como $\mu a_m$, $\mu k_m$ e $\mu\lambda_m$.*

## 4 Resultados de Simulação

Considere o sistema abaixo descrito por

$$\dot{v} = u \tag{33}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \tag{34}$$

$$y = \begin{bmatrix} -0,5 & 1 \end{bmatrix} x\,, \tag{35}$$

cuja função de transferência de $v$ para $y$ com $K_{DC} = -0,5$ é dada por

$$G(s) = \frac{s - 0,5}{s^2 + s + 1}\,. \tag{36}$$

Duas simulações do sistema (33)–(35) foram realizadas, considerando $\mu = 0,01$ e $\mu = 0,001$. Os demais parâmetros foram mantidos iguais em ambas as simulações. O sinal de referência $y_m$ em ambas as simulações foi escolhido como em (18) com $k_m = 0,5\mu$, $a_m = \mu$ e $r_m(t) = 2\sin(0,0016t)$. O sinal $y_m$ é limitado, portanto o erro $e(t)$ é mantido uniformemente limitado. Os parâmetros da função de monitoração são $\lambda_m = \mu$, $r = \sqrt{\mu}$ $a(k) = k + 1$.

A lei de controle (16) pode ser aplicada com a função de modulação (32) satisfazendo (25). Entretanto para simplificar o projeto, foi utilizada uma função de modulação local e constante, dada por $\rho = 2,1\mu$, que se mostrou adequada para alcançarmos os objetivos de controle nas simulações.

Sob as condições acima descritas, a saída da planta $y(t)$ rastreia o modelo de referência $y_m(t)$ em ambas as simulações, conforme ilustrado nas Figuras 1 e 7. Podemos observar que o erro de rastreamento $|e(t)|$ permanece na ordem de $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ após a saída $y(t)$ alcançar o modelo de referência. Assim, quanto menor o valor de $\mu$, menor será o valor do erro. O preço a se pagar é que ao se diminuir o valor de $\mu$, torna-se mais lenta a resposta do sistema à ação de controle.

A ação do integrador acoplado à entrada da planta torna o controle $u(t)$ suave, conforme visto nas Figuras 3 e 9.

As Figuras 5 e 11 ilustram o comportamento da função de monitoração e as Figuras 6 e 12 o chaveamento da direção de controle para as duas simulações. Podemos perceber que a função de monitoração realizou apenas um chaveamento para encontrar a direção de controle correta em ambos os casos. Após encontrá-la, $|e(t)|$ diminui até alcançar valores da ordem de $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$, como esperado (Figuras 4 e 10).

## 5 Conclusões

Neste artigo um controlador por modos deslizantes para o problema de rastreamento de trajetória de sistemas incertos com fase não-mínima foi apresentado. A releitura dos zeros de fase não-mínima como um problema de direção de controle desconhecida foi bem sucedida. A combinação da técnica de escalonamento temporal associada com uma função de monitoração apropriadamente projetada garante a estabilidade global e assintótica do sistema em malha fechada e a convergência do erro de rastreamento para um conjunto residual arbitrariamente pequeno. A estratégia de controle desenvolvida foi testada através de simulações numéricas a partir de exemplos acadêmicos, tendo apresentado resultados satisfatórios. Para trabalhos futuros, pretende-se realizar experimentos com um sistema de controle multivariável para regulação do nível de líquidos em um conjunto de tanques conectados.

## Referências

Aminde, N. O., Oliveira, T. R. and Hsu, L. (2013). Global output-feedback extremum seeking control via monitoring functions, *52nd IEEE Conference on Decision and Control* pp. 1031–1036.

Baev, S., Shtessel, Y., Edwards, C. and Spurgeon, S. (2008). Output feedback tracking in causal nonminimum-phase nonlinear systems using hosm techniques, *8th Int. Workshop on Variable structure systems* pp. 209–214.

Costa, R. R. and Hsu, L. (1991). Unmodeled dynamics in adaptive control systems revisited, *Systems & Control Letters* **16**: 341–348.

Costa, R. R. and Hsu, L. (1992). Robustness of vs-mrac with respect to unmodeled dynamics and external disturbances, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **6**: 19–33.

Filippov, A. L. (1964). Differential equations with discontinuous right-hand side, *Amer. Soc. Translations* pp. 199–231.

Gopalswamy, S. and Hedrick, J. K. (1993). Tracking nonlinear non-minimum phase systems using sliding control, *Int. Journal of Control* **57**(5): 1141–1158.

Hsu, L., Oliveira, T. R. and Cunha, J. P. V. S. (2014). Extremum seeking control via monitoring function and time-scaling for plants of arbitrary relative degree, *IEEE Workshop on Variable Structure Systems* pp. 1–6.

Junior, F. C. S., Oliveira, J. B. and Araújo, A. D. (2011). Influência dos zeros de fase não-mínima no desempenho de um controlador por posicionamento de pólos e estrutura variável, *X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI 2011* pp. 486–491.

Kokotović, P., Khalil, H. K. and O'Reilly, J. (1999). *Singular perturbation methods in control: analysis and design.*, SIAM.

Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control, *IEEE Int. J. Contr.* **76**(4): 924–941.

Levy, D. (2009). Análise e controle de sistemas de fase não-mínima e de sistemas com tempo morto, *Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Rio de Janeiro* .

Moya, P., Ortega, R., Netto, M. S., Praly, L. and Picó, J. (2002). Application of nonlinear time-scaling for robust controller design of reaction systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **12**: 57–69.

Nazrulla, S. and Khalil, H. (2011). Robust stabilization of non-minimum phase nonlinear systems using extended high-gain observers, *IEEE Trans. Aut. Control* **56**(4): 802–813.

Oliveira, T. R., Peixoto, A. J. and Hsu, L. (2010). Sliding mode control of uncertain multivariable nonlinear systems with unknown control direction via switching and monitoring function, *IEEE Trans. Automat. Contr* **55**: 1028–1034.

Shkolnikov, I. and Shtessel, Y. (2001). Tracking controller design for a class of non-minimum phase systems via the method of system center, *IEEE Trans. Autom. Control* **46**(10): 1639–1643.

Utkin, V., Guldner, J. and Shi, J. (1999). *Sliding mode control in electromechanical systems*, Taylor & Francis Ltd.

Yan, L., Hsu, L., Costa, R. R. and Lizarralde, F. (2008). A variable structure model reference robust control without a prior knowledge of high frequency gain sign, *Automatica* pp. 1036–1044.

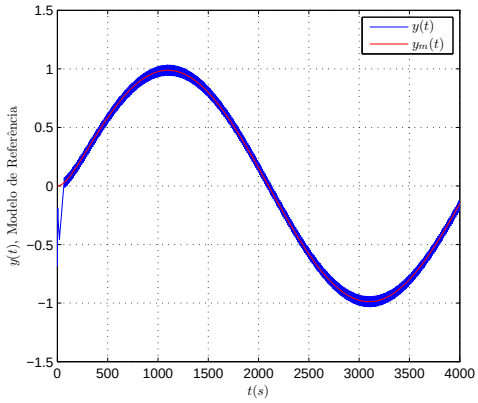


Figura 1: Saída $y(t)$ seguindo a referência $y_m(t)$, com $\mu = 0,01$

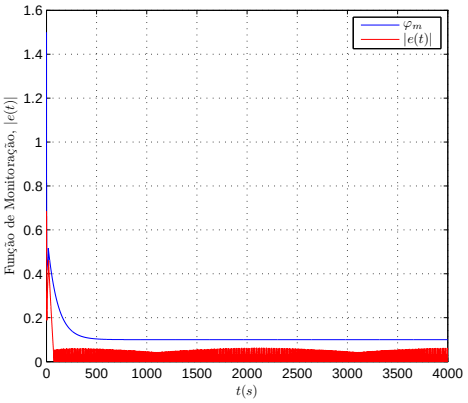


Figura 4: Função de monitoração $\varphi_m(t)$ e o módulo do erro $|e(t)|$, com $\mu = 0,01$

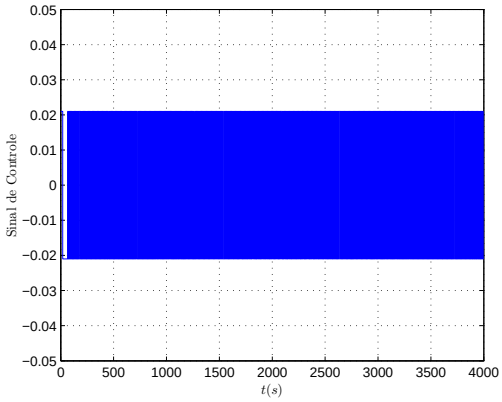


Figura 2: Entrada de controle $u(t)$, com $\mu = 0,01$

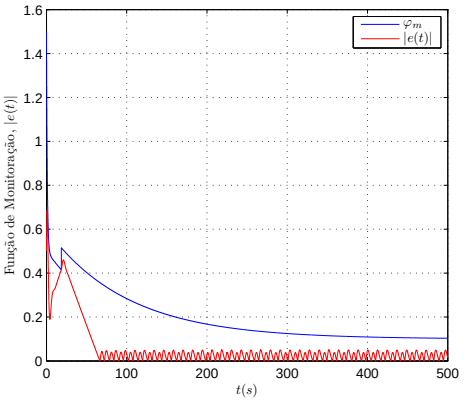


Figura 5: Função de monitoração $\varphi_m$ e o módulo do erro $e(t)$, com $\mu = 0,01$

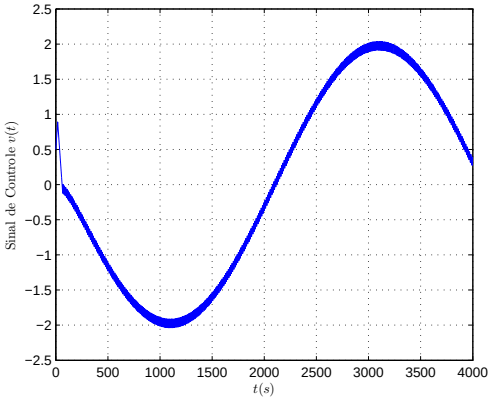


Figura 3: Entrada de controle $v(t)$, com $\mu = 0,01$

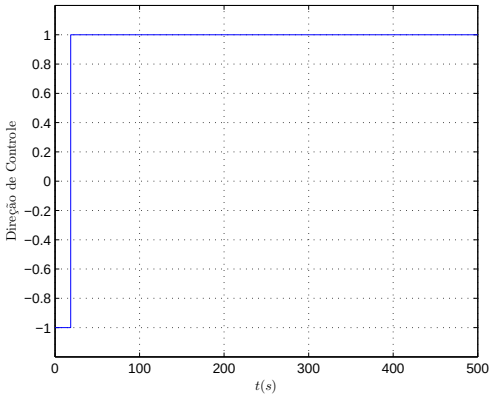


Figura 6: Chaveamento da direção de controle com $\mu = 0,01$

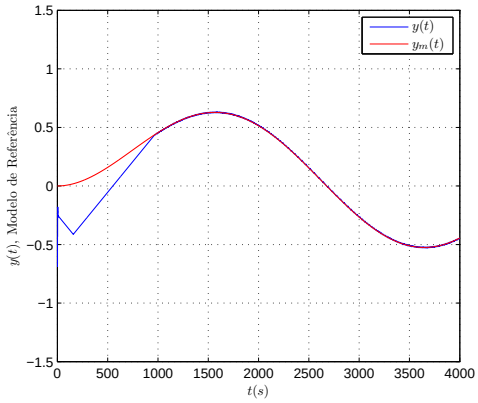


Figura 7: Saída $y(t)$ seguindo a referência $y_m(t)$, com $\mu = 0,001$

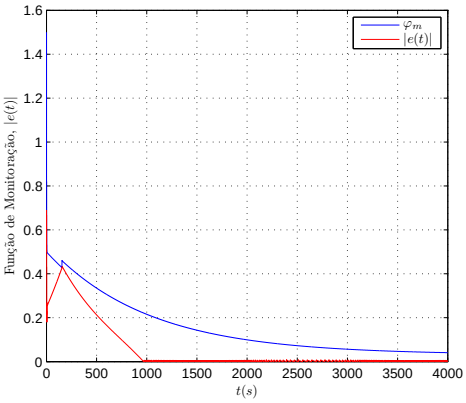


Figura 10: Função de monitoração $\varphi_m(t)$ e o módulo do erro $|e(t)|$, com $\mu = 0,001$

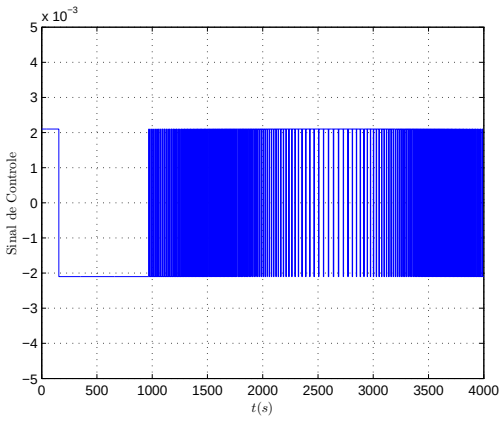


Figura 8: Entrada de controle $u(t)$, com $\mu = 0,001$

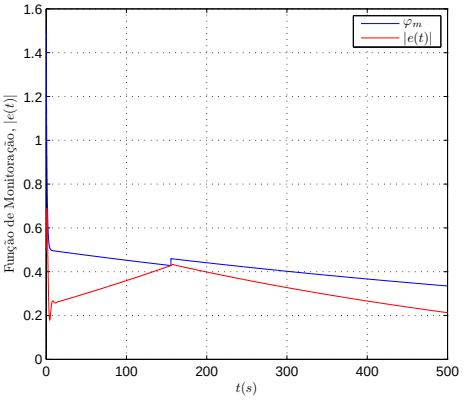


Figura 11: Função de monitoração $\varphi_m$ e o módulo do erro $e(t)$, com $\mu = 0,001$

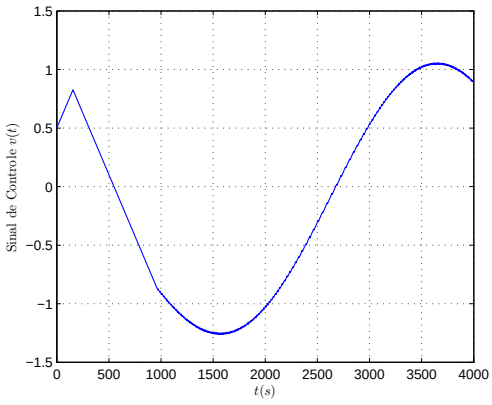


Figura 9: Entrada de controle $v(t)$, com $\mu = 0,001$

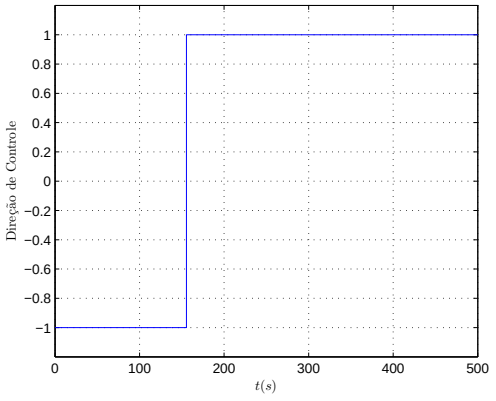


Figura 12: Chaveamento da direção de controle com $\mu = 0,001$