

Aspectos Práticos sobre o Desenvolvimento de um Pêndulo Invertido com Roda de Reação

Jackson Almada* Lucas J. Frizon* Manoel K. Dutra**
Rômulo L. Milhomem*

* Instituto Federal de Santa Catarina, Chapecó (SC), Brasil (e-mail: jackson.mca@aluno.ifsc.edu.br, lucasfrizon@domuss.com.br, romulo.milhomem@ifsc.edu.br).

** Instituto Federal de Santa Catarina, Tubarão (SC), Brasil (e-mail: manoel.kolling@ifsc.edu.br).

Abstract:

The control of non-linear systems can become a complex task, depending on the difficulty of the system to be controlled. The non-linear model of the Inverted Pendulum is an example of relatively complex non-linearity, and the implementation of a controller for this system requires a series of considerations and simplifications. Thus this work, investigates how to build, model and control an inverted pendulum with a reaction wheel, with emphasis on procedures and methodologies. Thus was built a prototype of the Pendulum, its mathematical model developed and parameterized, as well as all the necessary hardware for its operation. Two linear control architectures were also implemented, one PID and the other by Arbitrary Pole Allocation in the state space, which meet the basic requirements of the linearized model regulation at the point of operation. As a result, there is a functional prototype, its model, controllers that stabilize it and a brief evaluation of them.

Resumo: O controle de sistemas não lineares pode se tornar uma tarefa complexa, dependendo da dificuldade do sistema a ser controlado. O modelo não linear do Pêndulo Invertido é um exemplo de não linearidade relativamente complexo, e a implementação de um controlador para este sistema requer uma série de considerações e simplificações. Desta forma este trabalho investiga como construir, modelar e controlar um pêndulo invertido com roda de reação, com ênfase em procedimentos e metodologias. Sendo assim foi construído um protótipo do Pêndulo, seu modelo matemático desenvolvido e parametrizado, assim como todo o hardware necessário ao seu funcionamento. Foram também implementadas duas arquiteturas de controle linear, uma PID e outra por Alocação Arbitrária de Polos no espaço de estados, que atendem a requisitos básicos de regulação do modelo linearizado no ponto de operação. Como resultado têm-se um protótipo funcional, seu modelo, controladores que o estabilizam e uma breve avaliação deles.

Keywords: Inverted Pendulum; Reaction Wheel; Space State; Linear Control; Applied Control.

Palavras-chaves: Pêndulo Invertido; Roda de Reação; Espaço de Estados; Controle Linear; Controle Aplicado.

1. INTRODUÇÃO

O Pêndulo Invertido (PI) é um objeto de estudo frequente na área de automação e controle. Esse interesse pode ser compreendido pelo fato de ser um arquétipo, estendido aos problemas básicos do controle: instabilidade, regulação, rejeição de perturbação. No entanto, não é apenas pela pertinência e amplo interesse acadêmico que o seu estudo se expande, controlá-lo, além de ser um clássico da área, é também uma tarefa recorrente para aplicações de indústrias como a robótica, aeroespacial, naval e de transporte (Block et al., 2007; Silva, 2013). O interesse prático no estudo do PI está no fato dele ilustrar as dificuldades associadas com aplicações de sistemas de controle real. O modelo resultante é muito similar aos usados para estabilização de foguetes nas primeiras fases

de voos (Ogata and Severo, 1998), no posicionamento de guindastes e do carro elétrico de locomoção tipo *segway* (Lidström et al., 2013). Neste sentido, PIs são temas de pesquisa recorrentes na área de Sistemas de Controle, como: em Higdon and Cannon (1963) que discute sobre o controle de PIs múltiplos e independentes; Truxal (1965) que apresenta um conjunto de notas de aula sobre espaço de estados usando um sistema de pêndulo invertido duplo como exemplo; e Schaefer and Cannon (1966) que discute o controle de sistemas pendulares articulados duplos usando lugar das raízes. No fim da década de 60, o sistema de controle do Pêndulo Invertido já ilustrava livros texto da área de Sistemas de Controle (Lundberg and Barton, 2010). Existem várias formas construtivas para PIs, todos compartilham uma forma comum de construção, tendo um ponto de articulação pivotado em uma base que exerce

a força para sustentação do pêndulo. No Pêndulo Invertido com Roda de Reação (PIRR), junto com o ponto de articulação pivotado, há na outra extremidade uma roda de reação impulsionada por um atuador. As variações de velocidade da roda geram um binário que controla o movimento pendular.

Antes da aplicação como atuadores para o controle de pêndulos invertidos, rodas de reação já eram empregadas, no sistema de controle de altitude de satélites em órbita (Heffernan et al., 1980). Em Kuo (1999) há o emprego de rodas de reação para sustentação de estruturas bípedes, explorando controladores baseados em passividade. Em Spong et al. (2001) rodas de reação são aplicadas ao controle de Pêndulos Invertidos, e apresenta o PIRR como uma nova forma construtiva para este problema. Em Spong et al. (2001) se discute duas abordagens de controle para o problema do *swingup* e do equilíbrio com realimentação linear e um controlador baseado em passividade, assim como foi realizada uma comparação entre o controle de realimentação linear com o controle por alocação de polos de um modelo linearizado para o problema de equilíbrio do pêndulo sobre a posição invertida. Esse tipo de abordagem também foi utilizado por Jepsen et al. (2009), que desenvolveu um PIRR na forma de um cubo com três rodas de reação ortogonais, sendo capaz de estabilizar em qualquer aresta ou vértice.

Assim, ao longo deste artigo, são relatadas as etapas de projeto, construção, modelagem e controle de um PIRR, com objetivo inicial de realizar a construção de um protótipo para análise do sistema Pêndulo Invertido. Desta forma a Seção 2 mostra os pressupostos físicos e metodológicos os quais o sistema em estudo deve obedecer, bem como os componentes e métodos necessários para se chegar ao protótipo final aqui utilizado. A Seção 3 descreve as etapas de modelagem matemática, obtenção dos parâmetros, validação do modelo e projeto do controlador para estabilizar o PIRR de acordo com critérios de desempenho tomados a priori. Na Seção 4 são projetados dois controladores para regular o pêndulo no ponto de equilíbrio instável. Na Seção 5 são apresentados e comentados os resultados obtidos, e por fim serão apresentadas as conclusões e proposições de trabalhos futuros.

2. ASPECTOS CONSTRUTIVOS

2.1 Pressupostos Metodológicos

Para limitar o escopo e facilitar a obtenção do modelo dinâmico, buscando uma relação de compromisso entre a massa (energia cinética) e comprimento (frequência de oscilação) foram elaborados os seguintes pressupostos:

- (1) As elasticidades estruturais e suas dinâmicas associadas não serão modeladas, o pêndulo será considerado um corpo livre de rigidez ilimitada;
- (2) Deve haver flexibilidade estrutural para ajustar a massa e o comprimento do centro de gravidade;
- (3) Não deve haver fios condutores de energia ou de dados conectando as partes fixas e móveis do pêndulo, para não introduzir momentos que não serão modelados;
- (4) Deve haver a possibilidade de alterar os parâmetros da roda de reação.

Os aspectos acima mencionados, com exceção do pressuposto (4), também foram considerados no trabalho de Block et al. (2007) e no protótipo desenvolvido por Jepsen et al. (2009), que utiliza uma roda de reação no formato de disco vasado para maximizar o momento de inércia com menor massa, em relação a um disco sólido. Técnica também adotada no presente trabalho.

2.2 Construção Mecânica

A construção mecânica foi orientada para atender os pressupostos metodológicos já citados, onde, para este fim, destaca-se a ausência de fios entre partes fixas e móveis, onde todos os componentes necessários ao seu funcionamento devam estar embarcados. A Fig 1a e 1b mostra um conceito do pêndulo e o protótipo final montado.

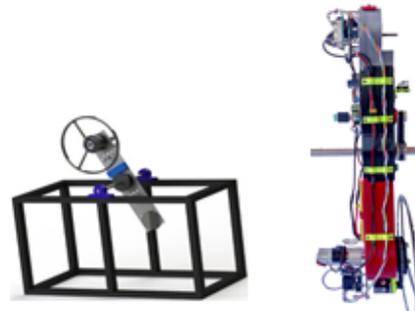


Figura 1. 1a e 1b. Conceito e pêndulo real.

A relação de transmissão foi de 1:2, o que representa uma resolução de 20000 pulsos por volta com um encoder incremental de 2500 pulsos em quadratura e na roda a resolução é de 1:1 com 2000 pulsos por volta. Trabalhos que descrevem o desenvolvimento de PIRR's, apresentam metodologias para esta finalidade dividida em três etapas: concepção mecânica em *software*, modelagem matemática e construção (Mayr et al., 2015); modelagem matemática, projeto mecânico e construção (Merlo-Zapata et al., 2014) e a construção iterativa, concomitantemente ao design e modelagem por *software* (Jepsen et al., 2009). Este último, tomando o motor elétrico como ponto de partida, compatibiliza os demais componentes ao atuador, metodologia parcialmente adotada no presente trabalho com a diferença fundamental da flexibilidade estrutural como princípio norteador. O circuito integrado de meia ponte BTS7960b foi adotado como base da placa de controle de velocidade, composto de um *gate driver*, um MOSFET canal P, para o lado superior e um MOSFET canal N para o lado inferior. Um esquemático dos principais componentes do pêndulo pode ser visto na Fig.2.

3. MODELO MATEMÁTICO: MODELAGEM E VALIDAÇÃO

Uma abordagem utilizada para encontrar o modelo matemático de um sistema composto como o PIRR é o chamado método de Lagrange (Block et al., 2007). Este método permite lidar com equações escalares em função da energia. Um diagrama esquemático do PIRR é mostrado na Fig.3. O ângulo Θ é o ângulo do pêndulo medido com a vertical no sentido anti-horário, Θ_r é o ângulo da roda sob a mesma convenção.

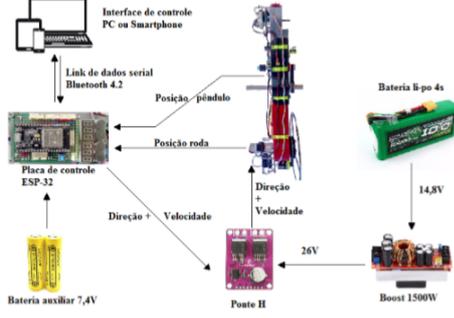


Figura 2. Fluxograma simplificado do PIRR.

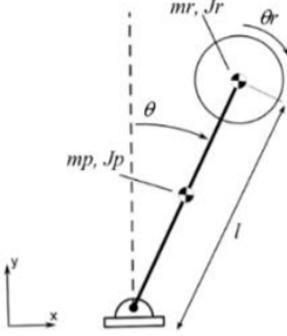


Figura 3. PIRR simplificado (Spong et al., 2001).

O formalismo do método de Lagrange possui a desvantagem de modelar apenas sistemas conservativos, necessitando-se introduzir a Função de Dissipação de Rayleigh, modificando o lagrangiano para abranger os termos dissipativos de atrito linear (Oliveira, 2016). O PIRR tem dois graus de liberdade e pode generalizar suas coordenadas para o ângulo do pêndulo Θ e ângulo da roda Θ_r como mostrado na Fig.3. Assim, a partir da Figura 3, considera-se as relações dadas em (1), e a Tabela 1.

$$\begin{aligned} m &= m_p + m_r + m_w \\ m_l &= m_p \cdot l_p + m_r \cdot l_r + m_w \cdot l_w \\ J &= J_p + m_p \cdot l_p^2 + m_r \cdot l_r^2 + m_w \cdot l_w^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Tabela 1. Variáveis PIRR.

Simbologia	Variável
m_p	massa do pêndulo
m_r	massa da roda
m_w	massa dos contrapesos
J_p	momento de inércia do pêndulo
J_r	momento de inércia da roda
J_w	momento de inércia do contrapeso
l_p	distância do pivô ao centro de massa pêndulo
l_r	distância do pivô ao centro de massa roda
l_w	distância do pivô ao centro de massa contrapeso
l	distância do pivô ao centro-massa-total

Através método de Lagrange, pode-se definir um conjunto de coordenadas generalizadas, q_1, q_2, \dots, q_n , para representar os n -graus de liberdade do sistema. Essas coordenadas generalizadas são tipicamente coordenadas de posição. Em função delas calcula-se a energia cinética T e a energia potencial V . Uma vez que as energias foram determinadas,

a equação de Lagrange é definida como a diferença dessas energias, sendo $L = T - V$ e

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \tau_k, k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

a variável τ_k representa o torque na direção de q_k . A variável t , que indica tempo contínuo, será omitida na sequência por simplificação. Modificando (2) para contemplar a componente dissipativa, obtêm-se (Lemos, 2007):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \Theta} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad (3)$$

em que $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_k}$ denota a parte das forças generalizadas que não provêm de nenhum potencial generalizado, representadas pelas componentes de atrito viscoso, tomando a forma

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \beta \dot{\Theta}^2, \quad (4)$$

sendo β o coeficiente de atrito viscoso no eixo do pêndulo. Para o sistema considerado, a energia cinética é a soma das energias cinéticas do pêndulo e da roda

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\Theta}_r^2. \quad (5)$$

Uma vez que os pressupostos metodológicos já foram dados, torna-se necessário assumir que a única energia potencial à qual o pêndulo está submetido é a gravidade, tomando que os efeitos das elasticidades estruturais são negligenciáveis (Craig, 2006), portanto

$$V = mgl(1 - \cos \Theta). \quad (6)$$

A função lagrangiana é então dada por

$$L = T - V + \mathfrak{S}, \quad (7)$$

substituindo (4), (5) e (6) em (7) têm-se

$$L = \frac{1}{2} J \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\Theta}_r^2 + mgl(\cos \Theta - 1) + \frac{1}{2} \beta \dot{\Theta}^2. \quad (8)$$

Operando derivadas parciais, segue

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = J \dot{\Theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_r} = J_r \dot{\Theta}_r, \quad \frac{\partial L}{\partial \Theta} = -mgl \sin(\Theta), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \beta \dot{\Theta}.$$

Neste caso, o torque produzido pela roda resulta num torque τ agindo sobre o rotor e $-\tau$ agindo sobre o pêndulo. Derivando no tempo, desconsiderando as dinâmicas elétricas e o atrito no motor, a dinâmica do conjunto será

$$J \ddot{\Theta} + \beta \dot{\Theta} + mgl \sin(\Theta) = -J_r \ddot{\Theta}_r. \quad (9)$$

$$J_r \ddot{\Theta}_r = \tau \quad (10)$$

Eventualmente, um modelo que contemple apenas parcelas lineares das perdas por dissipação não é suficientemente preciso, nesse caso pode-se adicionar um modelo de atrito estático, tornando (9) na forma de

$$J \ddot{\Theta} + \beta \dot{\Theta} + f_p + mgl \sin(\Theta) = -J_r \ddot{\Theta}_r, \quad (11)$$

onde f_p é uma aproximação contínua do atrito assimétrico de Coulomb (Aguilar-Avelar et al., 2017), sendo expresso por

$$f_p = \alpha_1 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\Omega \dot{\Theta}) \right] - \alpha_2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(-\Omega \dot{\Theta}) \right], \quad (12)$$

α e Ω são coeficientes de ajuste de atrito estático.

A equação (11) apresenta uma dinâmica não linear resultante dos termos $\sin(\Theta)$ e f_p . O modelo será linearizado partindo das premissas que o atrito estático pode ser negligenciado e que se pretende operar em ângulos bem próximos ao equilíbrio, em torno de 0 rad (ou 0°) com a vertical. Aplicando a Serie de Taylor aos termos não lineares de (11), tem-se $\sin(\Theta) \approx \Theta$ para pequenas variações (Block et al., 2007). Portanto

$$\ddot{\Theta} + \frac{\beta}{J} \dot{\Theta} + \frac{mgl}{J} \Theta = -\frac{J_r \ddot{\Theta}_r}{J}. \quad (13)$$

3.1 Modelagem do conjunto motor, redução e roda

Desprezando as dinâmicas da indutância da armadura, a eficiência do motor da caixa de redução, o atrito estático e a ondulação de torque devida à comutação nas escovas, o esquemático para o motor de corrente contínua (CC) mostrado na Fig. 4 pode ser modelado da seguinte forma:

$$R_a \cdot i_a = V_{in} - u_e, \quad (14)$$

$$J_{eq} \ddot{\Theta}_r + B_{eq} \dot{\Theta}_r = \tau_r + \tau_d, \quad (15)$$

onde R_a e i_a são a resistência e a corrente elétrica na armadura, V_{in} é a tensão de entrada, u_e denota a força contra eletromotriz (FCEM), J_{eq} e B_{eq} são a inércia e o coeficiente de amortecimento viscoso efetivamente percebidos do lado da carga, e τ_r , τ_d são os torques na carga e perturbação, respectivamente. No uso de caixas de redução, a velocidade de saída diminui e o torque aumenta, na mesma proporção, necessitando refletir as inércias para um ponto de vista unificado, do motor ou da carga. Pelo ponto de vista da carga, as relações são expressas por (Craig, 2006)

$$J_{eq} = J_r + \eta^2 J_m, \quad (16)$$

$$B_{eq} = B_r + \eta^2 B_m, \quad (17)$$

$$\tau_r = \eta \tau_m, \quad (18)$$

$$\Theta_r = \frac{1}{\eta} \Theta_m, \quad (19)$$

onde J_m , B_m , Θ_m e τ_m são os momentos de inércia, coeficiente de atrito viscoso, ângulo e torque do motor, respectivamente. J_r e B_r são a inércia e coeficiente de atrito da carga e η é a relação da caixa de redução, que não havendo, basta fazer $\eta = 1$. A partir de

$$u_e = k_e \cdot \dot{\Theta}_m, \quad (20)$$

$$\tau_m = k_t \cdot i_a, \quad (21)$$

onde k_e é a constante da FCEM e k_t é a constante de torque do motor, pode-se reescrever as equações do conjunto unindo a parte elétrica e mecânica, começando pela substituição de (20) em (14), combinando com (19) e evidenciando i_a ,

$$i_a = \frac{V_{in}}{R_a} - \frac{\eta k_e}{R_a} \dot{\Theta}_r. \quad (22)$$

Substituindo (18) em (21) e combinando com (23),

$$\tau_r = \frac{\eta k_t}{R_a} V_{in} - \frac{\eta^2 k_t k_e}{R_a} \dot{\Theta}_r. \quad (23)$$

Por fim, substituindo (23) em (15), obtêm-se o modelo completo do conjunto:

$$J_{eq} \ddot{\Theta}_r + B_{eq} \dot{\Theta}_r = \frac{\eta k_t}{R_a} V_{in} - \frac{\eta^2 k_t k_e}{R_a} \dot{\Theta}_r \quad (24)$$

A partir de agora, o termo J_r das Equações (9), (11) e (13) será substituído por J_{eq} que é a inércia efetiva da carga.

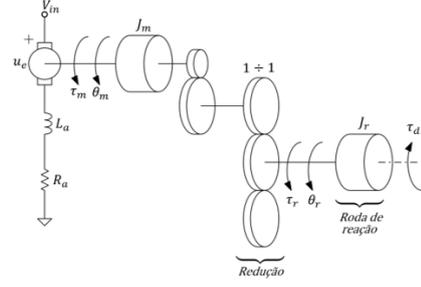


Figura 4. Esquema do motor CC com caixa de redução e roda de reação

3.2 Parametrização do modelo

Para se chegar aos modelos (13) e (24) foram realizadas simplificações, fazendo-se necessário realizar experimentos que as validem, para tal, deve-se primeiro obter um modelo numérico do conjunto. O modelo numérico pode ser alcançado medindo diretamente as grandezas de interesse. Aquelas cujo instrumento de medição não esteja disponível, existe a possibilidade de obter seus valores de um modelo computacional. Um terceiro método pode ser usado para completar o modelo, comumente chamado de identificação numérica de parâmetros ou ajuste paramétrico de curvas, pode-se utilizar por exemplo, o algoritmo de mínimos quadrados de Levenberg-Marquardt e comparar as curvas do modelo com o dado real ajustando os coeficientes das equações para um mínimo local do erro (Coelho and dos Santos Coelho, 2004). Nesse trabalho foram utilizados os três métodos anteriormente citados. Um modelo computacional mecânico foi construído no *software SolidWorks*[®], e a identificação numérica e refinamento de parâmetros no aplicativo *Parameter Estimation* do *Simulink*[®]. Os valores são mostrados na Tabela 2.

Tabela 2. Valores Numéricos Dos Parâmetros.

Grandeza	Valor
m	3,8453 kg
g	9,81 m/s ²
l	0,3529 m
B	0,041367 Nms/rad
J	0,60889 Kg m ²
J_{eq}	0,0059 Kg m ²
B_{eq}	0,0535 Nms/rad
k_t	0,0897 Nm/A
k_e	0,0436 Vs/rad
R_a	0,93 Ω
η	1
α_1	0,18 Nm
α_2	0,22 Nm
β	2,61

3.3 Representação no Espaço de Estados

Todas as equações que foram apresentadas até o momento representam operação no ponto de equilíbrio estável em $\Theta \approx 0 \text{ rad}$. Invertendo o ponto de operação para o equilíbrio instável, com $\Theta \approx \pi \text{ rad}$, a equação (13) torna-se

$$\ddot{\Theta} + \frac{B}{J} \dot{\Theta} - \frac{mgl}{J} \Theta = -\frac{J_{eq} \ddot{\Theta}_r}{J}. \quad (25)$$

Escolhendo os estados como $x(t) = [\Theta \ \dot{\Theta} \ \Theta_r \ \dot{\Theta}_r]^T$, implica que $\dot{x}(t) = [\dot{\Theta} \ \ddot{\Theta} \ \dot{\Theta}_r \ \ddot{\Theta}_r]^T$. Substituindo e isolando as variáveis de estado, obtêm-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{B}{J}x_2 + \frac{mgl}{J}x_1 - \frac{\eta k_t}{JR_a}V_{in} + \frac{\eta^2 k_t k_e + R_a B_{eq}}{JR_a}x_4 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{\eta k_t}{J_{eq}R_a}V_{in} - \frac{\eta^2 k_t k_e - R_a B_{eq}}{J_{eq}R_a}x_4, \end{aligned} \quad (26)$$

que pode ser representado na forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (27)$$

onde: x é o vetor de estados e \dot{x} sua derivada, u é o vetor de entrada e y a saída do sistema. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz associada aos estados do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ às entradas, $C \in \mathbb{R}^{w \times n}$ a matriz associada as saídas, e $D \in \mathbb{R}^{m \times w}$ a matriz de transmissão direta. A partir dos valores numéricos apresentados na Tabela 2, e colocando as equações (26) sob a forma de (27), obtendo-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mgl}{J} & -\frac{B}{J} & 0 & \frac{\eta^2 k_t k_e + R_a B_{eq}}{JR_a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\eta^2 k_t k_e - R_a B_{eq}}{J_{eq}R_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\eta k_t}{JR_a} \\ 0 \\ \frac{\eta k_t}{J_{eq}R_a} \end{bmatrix} u, \quad (28)$$

sendo C escolhida de acordo com as saídas desejadas e $D = 0$. Observa-se que o sistema é de estado completamente controlável, possibilitando o projeto de um controlador que aloque arbitrariamente os polos de malha fechada do modelo a partir de um vetor de ganho (Ogata and Severo, 1998).

3.4 Validação do modelo

Para validar o modelo numérico e capturar uma maior quantidade de dinâmicas importantes foi utilizado um ensaio de resposta em frequência, que consiste no envio de um sinal de onda quadrada simétrica com frequência crescente e na observação do seu comportamento (Coelho and dos Santos Coelho, 2004). Assim, um sinal com amplitude de $\pm 10V$ e frequência variando de 0,1 a 7,5rad/s em sentido crescente (com amostragem de 100Hz) foi enviado ao atuador, provocando mudanças de velocidade e sentido da roda de reação, que por sua vez atua sobre o pêndulo. No mesmo ensaio foram colhidas a posição do pêndulo e da roda, de maneira que se possa avaliar os modelos individualmente e a interação do conjunto. O modelo não linear para o pêndulo corresponde à equação (11) e seu correspondente linear a equação (13), a relação do motor/roda corresponde à equação (24). A Fig. 5 mostra a forma geral assumida pelo ângulo do pêndulo, sendo que a Fig. 6 mostra seus fragmentos inicial, central e final, respectivamente. Já a Fig. 7 mostra os valores assumidos pela posição da roda.

Para oferecer maior robustez à tomada de decisão sobre aceitação ou rejeição dos modelos matemáticos obtidos, foi

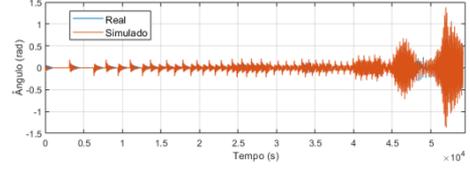


Figura 5. Ensaio da resposta em frequência para a posição do pêndulo.

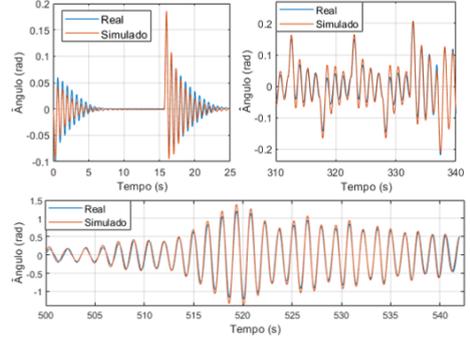


Figura 6. Em sentido horário, fragmentos inicial, central e final do ensaio para o ângulo do pêndulo.

utilizado o teste estatístico de Theil H , que permite avaliar a similaridade entre dados reais e simulados (Alvarado, 2017). O valor de H varia entre 0 (para predições perfeitas) e 1 (para piores predições). Um modelo é aceitável quando H é menor que 0,4; é razoavelmente aceitável quando o valor de H está entre 0,4 e 0,7 e deve ser rejeitado quando for maior que 0,7 (Rowland and Holmes, 1978). Busca-se neste trabalho modelos com $H \leq 0,4$.

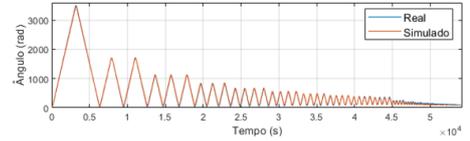


Figura 7. Ensaio para a posição da roda.

O teste estatístico de Theil, é expresso pela equação (29), em que ρ são os dados do fenômeno real e $\hat{\rho}$ são os dados do modelo investigado.

$$H = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\rho - \hat{\rho})^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\rho)^2 + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{\rho})^2}}. \quad (29)$$

Os resultados entre os dados reais e simulados são: modelo linear do pêndulo $H = 0,208$; modelo não linear do pêndulo $H = 0,091$; modelo da roda $H = 0,0125$. Que implica na aceitação de todos os modelos, pelos critérios estabelecidos.

4. PROJETO DOS CONTROLADORES

As Equações (9) e (10) mostram que o problema de regulação do PIRR envolve o controle de duas variáveis: o ângulo do pêndulo e o torque da roda. O torque é diretamente proporcional à variação na velocidade do motor. Esse fato gera um problema conhecido, que é a possibilidade de saturação do atuador mesmo na ausência de perturbação, quando já houve uma perturbação anterior (Block et al., 2007; Jepsen

et al., 2009). Para contornar este problema, foram implementados dois controladores PID (Proporcional Integral Derivativo) independentes e em paralelo, um para regular o ângulo do pêndulo e outro para a velocidade da roda. Também será apresentado o projeto de um controlador por alocação arbitrária de polos (AAP) e comparados seus desempenhos, sob condições específicas. Os controladores PID e AAP foram projetados buscando como critérios de desempenho estabilidade local e tempo de convergência $t_c \leq 5s$ para a posição do pêndulo. A partir dos modelos da Eq.(28), escolhendo como saídas os estados x_1 e x_4 , projetou-se os seguintes controladores PID, no domínio do tempo discreto:

$$C_i(z) = Tp_i + Ti_i + Td_i \quad (30)$$

$$\begin{cases} Tp_i = Kp_i, \\ Ti_i = Ki_i \frac{T_s z + 1}{2} \frac{z - 1}{z - 1}, \\ Td_i = Kd_i \frac{1}{T_s} \frac{z - 1}{z}, \end{cases} \quad (31)$$

onde $i = 1, 2$, sendo C_1 e C_2 controladores de posição do pêndulo e velocidade da roda, e Tp_i/Kp_i , Ti_i/Ki_i e Td_i/Kd_i seus respectivos ganhos proporcional, integral e derivativo; T_s representa o período de amostragem, adotado como $T_s = 0,01s$. Os controladores foram implementados através de equações à diferenças (32)

$$C_i[k] = Kp_i \cdot e_i[k] + Kd_i \cdot \frac{e_i[k] - e_i[k-1]}{T_s} + \frac{Ki_i \cdot T_s}{2} (e_i[k] + e_i[k-1]) + Ti_i[k-1] \quad (32)$$

sendo $e_i[k]$ o erro de posição/velocidade, referente a entrada dos controladores C_1 e C_2 , $k = \delta.T_s$ e δ a variável discreta que assume valores inteiros. Uma vez que as velocidades do pêndulo e da roda não são diretamente medidas, é necessário o uso de técnica de estimação que forneça tais estados. Foi adotada a aproximação *Backward-Euler* para a derivada da posição, e um filtro passa baixa de primeira ordem. O filtro é utilizado para suavizar os valores da derivada do erro nos controladores PID. O diferenciador é representado por

$$y_d[k] = \frac{u_d[k] - u_d[k-1]}{T_s} \quad (33)$$

onde $y_d[k]$ é a velocidade $u_d[k]$ a posição. O filtro pode ser representado por (Block et al., 2007):

$$y_f[k] = 1 - \frac{T_s}{T_f + T_s} y_f[k-1] + \frac{T_s}{T_f + T_s} y_d[k] \quad (34)$$

onde $y_f[k]$ é a velocidade filtrada, e $T_f = 0,05s$.

Para evitar o fenômeno de *Windup*, define-se

$$y[k] = k_b T_s (C_s[k-1] + C_s[k-2]), \quad (35)$$

sendo C_s é o sinal do controlador quando saturado e k_b o ganho da realimentação. Após a adoção do *anti-windup*, a ação de controle integral é modificada para:

$$Ti_i = \frac{Ki_i \cdot T_s}{2} (e_i[k] + e_i[k-1]) + Ti_i[k-1] + k_b T_s (C_s[k-1] + C_s[k-2]). \quad (36)$$

Para implementar o regulador por alocação de polos se multiplica uma matriz de ganhos K pelo vetor de estados, sendo definido por:

$$u[k] = -K \cdot x[k], \quad (37)$$

$u[k]$ é a ação de controle e $x[k]$ o vetor de estados discretizados, respectivamente, $K \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ a matriz de ganhos de realimentação. Buscando um comportamento subamortecido que atenda aos requisitos de desempenho, os autovalores de malha fechada foram alocados com polos dominantes em $\lambda_{1,2} = [-6, 72 \pm 12j]$. A Tabela 3 resume os ganhos projetados inicialmente para os controladores.

Tabela 3. Ganhos Projetados para os Controladores

PID Posição	Kp_1	Ki_1	Kd_1	
	967	6861	33,89	
PID Velocidade	Kp_2	Ki_2	Kd_2	
	1,321	6,01	-1,52	
Alocação de Polos	K_1	K_2	K_3	K_4
	-387,18	-80,93	0	-1,513

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A construção do PIRR foi baseada em alguns preceitos metodológicos para facilitar as etapas, do esboço mecânico a implementação das estratégias de controle. Apesar de ter embasamento nas práticas e observações relatadas em outros trabalhos, com bons resultados para os autores, alguns pressupostos, não necessariamente foram dados, mas presumidos, a saber:

- (1) Não haver fios conectados: condição onde a fonte de alimentação estará embarcada, o que pode aumentar as dimensões e massa do pêndulo que irá requerer um atuador que gere torques maiores. No entanto, se o pêndulo não for uma aplicação móvel os problemas relacionados aos momentos assimétricos de elementos móveis, alimentação e instrumentação da junta rotativa podem ser resolvidos por conectores com anéis deslizantes ou arranjos que minimizem esse efeito.
- (2) Baseada na robustez requerida pelo porte do PIRR e da roda, a ideia de acoplamentos rígidos coaxiais mostrou-se de execução muito complexa, sempre restando algum nível de desalinhamento, que introduz assimetrias no atuador, vibrações e ruídos. Podendo ser substituído por: correias, engrenagens, acoplamentos flexíveis ou acoplamento direto no eixo do motor/redutor como em Block et al. (2007); Spong et al. (2001); Lemos (2007); Aguilar-Avelar et al. (2017); Mayr et al. (2015).

5.1 Do Controle Projetado e Implementado

A avaliação dos controladores se deu em dois cenários: rejeição à perturbação, quando o PIRR está em repouso no ponto de operação instável e deve rejeitar uma perturbação interna, introduzida por um pulso de tensão no motor no valor de 10V com duração de 0,1s; condição inicial não nula, quando o controle é iniciado estando o PIRR distante 0,086 rad do seu ponto de operação e deve alcançá-lo de forma autônoma. As Figs. 8 e 9 mostram as respostas dos controladores PID e AAP reais, para o ensaio de rejeição à perturbação. A Fig. 10 mostra as respostas dos controladores PID e AAP baseados no modelo, para o mesmo ensaio. Ambos atenderam requisitos de desempenho, levando a posição do pêndulo para o entorno do ponto de equilíbrio em menos de 5s, com uma excursão máxima de -0,0069 rad e erro máximo de 0,0003 rad a

partir de 2,2s para o PID, e uma excursão máxima de 0,0035 rad com erro máximo de -0,0003 rad a partir de 1,8s para o AAP, onde as respostas dos controladores podem ser consideradas equivalentes, com uma vantagem para o PID por apresentar uma menor quantidade de oscilações em torno do equilíbrio. Embora exista uma diferença nas respostas em relação ao modelo ser linear ou não linear, essa diferença é de apenas 0,0009 rad. Tal fenômeno pode ser explicado pela existência das forças de atrito estático assimétricas no modelo não linear. Essas forças fazem com que o ponto de equilíbrio instável não linear seja diferente do modelo linear.

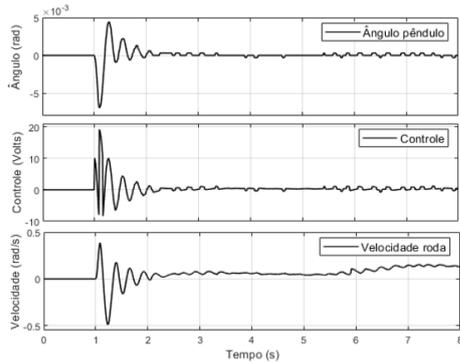


Figura 8. Resposta do controlador PID real - Rejeição à perturbação

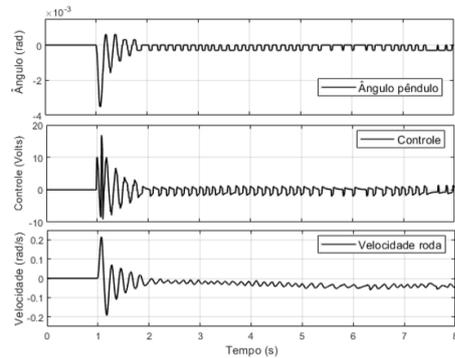


Figura 9. Resposta do controlador AAP real - Rejeição à perturbação

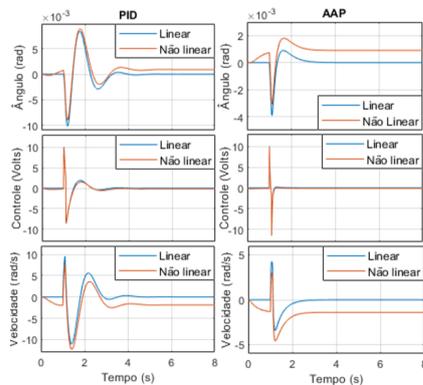


Figura 10. Resposta dos controladores PID e AAP modelos linear e não linear - Ensaio de rejeição à perturbação.

Observa-se uma diferença significativa entre as respostas projetadas e implementadas, os controladores, embora

distintos, apresentam comportamento similar. Tais fatos ocorrem pois os ganhos de ambos os controladores foram, após a implementação, modificados para obter um desempenho mais satisfatório. Esse fenômeno pode ser explicado através das simplificações na elaboração do modelo, negligência de fatores como a existência de uma zona morta no atuador e ruídos na estimação dos estados. Os ganhos implementados são resumidos na Tabela 4.

Tabela 4. Ganhos Implementados nos Controladores

PID Posição	Kp_1	Ki_1	Kd_1	
	1576	5638	41,58	
PID Velocidade	Kp_2	Ki_2	Kd_2	
	0,5	0	0	
Alocação de Polos	K_1	K_2	K_3	K_4
	-2484,3	-262,1	0	-0,1

As Figs. 11 e 12 mostram as respostas dos controladores PID e AAP reais para condição inicial não nula. A Fig. 13 mostra as respostas dos controladores PID e AAP baseados no modelo, para o mesmo ensaio.

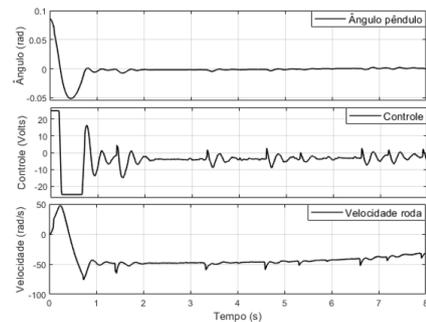


Figura 11. Resposta controlador PID - Condição inicial não nula

Os controladores se mostraram aceitáveis, levando a posição do pêndulo para o entorno do equilíbrio no tempo requerido, onde o PID, após 5s apresentou um erro máximo de 0,0016rad. Já o AAP apresentou um erro máximo de 0,0006rad sob o mesmo critério. Os controladores se comportaram de maneira semelhante para ambos os modelos, validando a estratégia de controle linear quando aplicada a modelos não lineares.

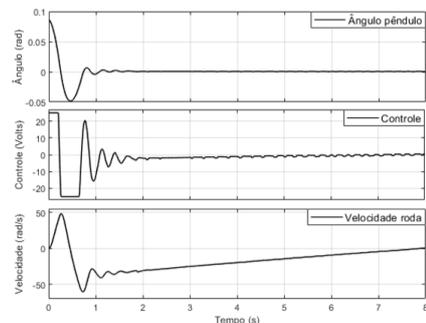


Figura 12. Resposta do controlador AAP - Condição inicial não nula

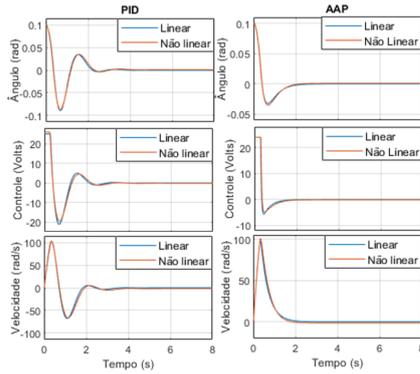


Figura 13. Resposta dos controladores PID e AAP aplicados aos modelos linear e não linear - Condição inicial não nula.

6. CONCLUSÃO

O trabalho teve como objetivo apresentar os aspectos de projeto, construção, modelagem e controle de um PIRR, investigando a influência das características físicas elementares em cada uma dessas etapas. Além disso, buscou-se apresentar, brevemente, os pressupostos para construção de um protótipo funcional, os procedimentos experimentais e os aspectos práticos envolvidos na construção desse tipo de sistema, relacionando a forma didática e prática que os objetivos propostos foram encontrados, de forma a oferecer subsídios para outros pesquisadores e estudantes no que se refere a metodologias e procedimentos, em especial para a modelagem e validação de modelo, material que em geral encontra-se disperso pela bibliografia da área.

A partir dos resultados apresentados, considerou-se que os objetivos foram alcançados de forma satisfatória, pois o pêndulo foi projetado, construído, modelado e teve o seu modelo validado, apesar de serem desconsideradas algumas dinâmicas no processo. Dois controladores foram projetados e tiveram um bom desempenho, com ambos cumprindo os critérios estipulados após ajustes realizados no modelo real. Pretende-se, em trabalhos futuros, realizar uma melhoria no acoplamento da roda de reação e do motor, no intuito de diminuir vibrações mecânicas e reavaliar o modelo que representa esta dinâmica.

A aplicação do protótipo em aulas e treinamentos insere-se em uma vertente bem expressiva da área de controle e automação, devido as características não lineares e multivariáveis, naturais do sistema. Como trabalhos futuros sugere-se o uso de um controlador não linear que seja capaz de compensar a perturbação na posição do pêndulo causado pelas forças de atrito estático e que seja capaz de elevar o pêndulo a partir da posição inferior (*swingup*).

REFERÊNCIAS

Aguilar-Avelar, C., Rodríguez-Calderón, R., Puga-Guzmán, S., and Moreno-Valenzuela, J. (2017). Effects of nonlinear friction compensation in the inertia wheel pendulum. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 31(9), 4425–4433.

Alvarado, C.S.M. (2017). *Estudo e implementação de métodos de validação de modelos matemáticos aplicados*

no desenvolvimento de sistemas de controle de processos industriais. Ph.D. thesis, Universidade de São Paulo.

Block, D.J., Åström, K.J., and Spong, M.W. (2007). The reaction wheel pendulum. *Synthesis Lectures on Control and mechatronics*, 1(1), 1–105.

Coelho, A.A.R. and dos Santos Coelho, L. (2004). *Identificação de sistemas dinâmicos lineares*.

Craig, J.J. (2006). *Robótica*, 3ra edición. sl.

Heffernan, K.J., Foutain, G.H., Tossman, B.E., and Moble, F.F. (1980). The magsat attitude control system. *Johns Hopkins APL*, 188.

Higdon, D.T. and Cannon, R. (1963). On the control of unstable multiple-output mechanical systems. In *ASME Winter Annual Meeting*.

Jepsen, F., Soborg, A., Pedersen, A.R., and Yang, Z. (2009). Development and control of an inverted pendulum driven by a reaction wheel. In *2009 International Conference on Mechatronics and Automation*, 2829–2834. IEEE.

Kuo, A.D. (1999). Stabilization of lateral motion in passive dynamic walking. *The International journal of robotics research*, 18(9), 917–930.

Lemos, N.A. (2007). *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física. 2.ed. São Paulo.

Lidström, N., Pacheco, M.P.E.V., Everitt, M.N., and Blomberg, M.N. (2013). Development of a control system for stabilizing a lego segway model.

Lundberg, K.H. and Barton, T.W. (2010). History of inverted-pendulum systems. In *IFAC Proceedings Volumes*, volume 42, 131–135. Elsevier.

Mayr, J., Spanlang, F., and Gatringer, H. (2015). Mechatronic design of a self-balancing three-dimensional inertia wheel pendulum. *Mechatronics*, 30, 1–10.

Merlo-Zapata, C., Antonio-Cruz, M., Silva-Ortigoza, R., Taud, H., Rivera-Zárate, I., Muñoz-Carrillo, D., and Hernández-Guzmán, V. (2014). Modeling and construction of an inertia wheel pendulum test-bed. In *2014 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering*, 116–121. IEEE.

Ogata, K. and Severo, B. (1998). *Engenharia de controle moderno*. Prentice Hall do Brasil.

Oliveira, Tiago de. Ladeira, D.G. (2016). *Princípio de d'Alembert e Equações de Lagrange*. Master's thesis, Universidade Federal de São João del-Rei.

Rowland, J.R. and Holmes, W.M. (1978). Simulation validation with sparse random data. *Computers & Electrical Engineering*, 5(1), 37–49.

Schaefer, I. and Cannon, R. (1966). On the control of unstable mechanical systems. *Research Review*, 5(5), 11.

Silva, E.A.d. (2013). *Construção, modelagem e controle de um pêndulo invertido com clp e software scada*.

Spong, M.W., Corke, P., and Lozano, R. (2001). Nonlinear control of the reaction wheel pendulum. *Automatica*, 37(11), 1845–1851.

Truxal, J.G. (1965). *State models, transfer functions, and simulation*. Polytechnic Institute of Brooklyn. Lecture Notes.