

Análise na Variação Dinâmica de Sinais pela Entropia

Gustavo H. O. Salgado* Arthur R. Fialho**
Dair J. de Oliveira***

* *Universidade Federal de Itajubá - campus Itabira , MG, (e-mail: gusalg@unifei.edu.br).*

** *Universidade Federal de Itajubá - campus Itabira , MG (e-mail: fialhoarthur@hotmail.com)*

*** *Universidade Federal de Itajubá - campus Itabira , MG, (e-mail: dairoliveira@unifei.edu.br)*

Abstract: In this work, we intend to use analysis tools in dynamic systems for detecting the variation of structures in signals obtained from simulated data, as a preliminary phase for the detection of different dynamic regimes in real data.

Resumo: Neste trabalho, pretende-se utilizar ferramentas estatísticas juntamente com técnicas de análise em sistemas dinâmicos para detecção da variação de estruturas em sinais obtidos de dados simulados, como fase preliminar para a detecção de diferentes regimes dinâmicos em dados reais.

Keywords: Nonlinear Dynamics - Entropy - State Detection - Simulated Data - Interval Mean

Palavras-chaves: Dinâmica não Linear - Entropia - Detecção de estados - Dados Simulados - Média Intervalar

1. INTRODUÇÃO

A detecção na alteração do comportamento dinâmico em fenômenos físicos, naturais, econômicos, sociais e em problemas de engenharia é de grande importância para compreensão e análise desses fenômenos. No estudo de sinais biológicos, a detecção da transição entre estados pode ser de grande relevância na prevenção em relação a aspectos indesejados de seu comportamento (Yan et al., 2016; Westbrook, 2014). Por exemplo, no diagnóstico da transição normal/pré- crise/crise de ataques epiléticos, pode-se adotar uma abordagem mais adequada para um determinado tratamento ou, ainda, na tomada de ações preventivas que podem evitar danos temporários ou permanentes (Yan et al., 2016; Westbrook, 2014).

A capacidade de usar um conjunto de padrões analíticos e ferramentas computacionais para realizar a distinção entre processos aleatórios/ruidosos e caóticos, e a possibilidade de aplicar técnicas que permitem descrever a estrutura determinística, podem possibilitar a identificação de padrões estruturais em sinais oriundos de fenômenos físicos ou biológicos e, por conseguinte, a detecção na transição de estados (Kannathal et al., 2005).

A dinâmica não linear fornece uma estrutura conceitual para entender e reconhecer dinâmicas e padrões espaço-temporais a obtidos a partir de sinais reais. Ainda como aplicação na neurociência, uma vez que uma das motivações deste trabalho origina-se no desenvolvimento de técnicas para reconhecimento de padrões em sinais biológicos, destacam-se as que podem resultar em ativida-

des neurais que levam às crises observadas em sinais de EEG. Uma estrutura conceitual e atraente postula que há transições entre comportamentos não caóticos e caóticos e, até mesmo, entre comportamentos caóticos topologicamente distintos (Shelhamer, 2007). Nos exames de EEG a atividade do córtex cerebral é registrada por meio da aquisição dos sinais elétricos que são registrados em séries temporais de dados reais. As principais ferramentas de dinâmica não linear encontradas na literatura para análises de dados de EEG são dadas por *imersão em espaço de estados, reconstrução de atratores estranhos, análises da seção de Poincaré e mapa de primeiro retorno, construção de diagramas de recorrência, análise de dinâmica simbólica, medidas de dimensão, expoentes de Lyapunov e entropia* (Stam, 2005; Kannathal et al., 2005).

A entropia mede o grau de organização dos dados de um sinal a partir da quantidade de novas informações geradas, ou seja, quanto maior a entropia de um sinal, maior será seu grau de complexidade (Monteiro, 2019). No presente trabalho, utilizou-se o cálculo da variação de entropia para a detecção da transição entre diferentes estados de um sinal, identificando as “assinaturas” dinâmicas envolvidas entre os vários estados de um conjunto de dados.

Esse procedimento foi feito com um sinal simulado a partir da primeira coordenada do sistema de Rössler, que possui diferentes regimes dinâmicos de acordo com o parâmetro de bifurcação: órbitas periódicas estáveis e caos (Rössler, 1976). Nota-se que o sinal em questão continha sete diferentes regimes dinâmicos variando entre órbitas periódicas atratoras e caos.

* Trabalho realizado pelos membros sem suporte financeiro.

Além da entropia, utilizou-se também a imersão diferencial de espaço de estados. Essa técnica nos permite reconstruir outras coordenadas de um sistema, a partir dos dados de uma só coordenada. Apesar dos pontos do espaço reconstruído serem diferentes do sistema original, essa técnica preserva a topologia do atrator (Monteiro, 2019).

Somando-se a isso, foram utilizadas ferramentas estatísticas, como a média intervalar, desvio padrão e variância para auxiliar na identificação da transição dos estados do sinal.

2. OBJETIVOS

O trabalho tem como objetivo a elaboração de uma técnica capaz de identificar, por meio da variação de entropia, a transição de estados dentro de um sistema. Essa ferramenta, posteriormente poderá ser aplicada em sinais reais nas áreas onde a detecção de regimes dinâmicos se faz necessária

3. DESENVOLVIMENTO

Dado o fato de que cada vez mais técnicas de dinâmica não linear tem sido aplicadas à análise de sinais (Acharya et al., 2013; Güler et al., 2005; Thomasson et al., 2001) e considerando que objetiva-se aplicar os resultados deste trabalho em análises de dados de EEG dedicados ao estudo da epilepsia, o seguinte conjunto de dados apresentados na Figura 1 serão utilizados como ilustração para apresentar o desenvolvimento. Tem-se aí três estados distintos: normal (entre eventos de crise), pré-crise e crise epilética, que poderiam ocorrer em sequência. Um cenário semelhante, mas em contexto totalmente controlado, pode ser obtido a partir do atrator de Rössler, Figura 2.

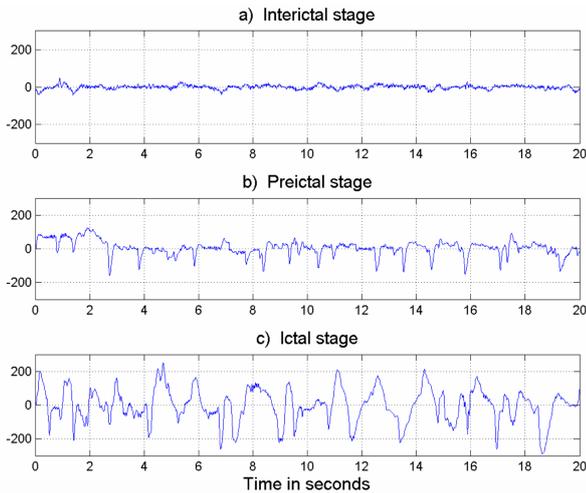


Figura 1. Dados de EEG: (a) estado entre eventos de crise de epilepsia; (b) estado pré-crise; (c) estado de crise. Fonte: Świdorski et al. (2007).

O atrator de Rössler é dado por um sistema dinâmico contínuo que possui diferentes regimes dinâmicos em função dos parâmetros do sistema: órbitas periódicas estáveis, instáveis e caos (Rössler, 1976). As equações do sistema de Rössler são dadas por

$$\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + ay, \\ z' = b + z(x - c), \end{cases} \quad (1)$$

em que a, b, c são parâmetros.

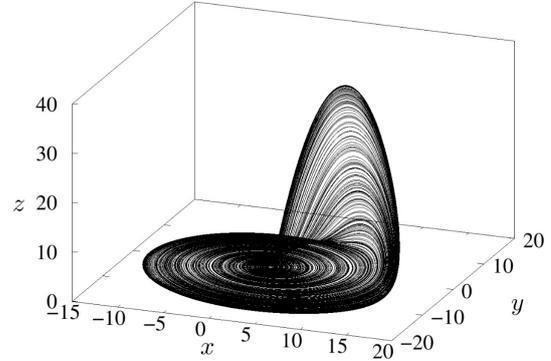


Figura 2. Atrator de Rössler, obtido a partir da Eq. 1, com $c = 9,0$.

A Figura 3 apresenta um diagrama de bifurcações (Fiedler-Ferrara and Do Prado, 1994) para o sistema dado pela Eq. (1) em função do parâmetro c . Os parâmetros a e b foram fixados em $a = 0,2$ e $b = 0,4$, enquanto diferentes regimes dinâmicos foram registrados para $c \in [2, 9]$.

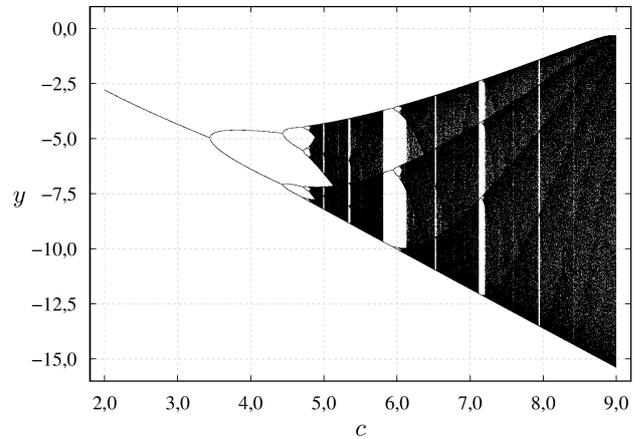


Figura 3. Diagrama de bifurcações para o sistema de Rössler em $y \times c$: $a = 0,2$ e $b = 0,4$.

O diagrama da Figura 3 foi obtido a partir do registro da coordenada y do fluxo gerado pela Eq. (1) ao intersectar a seção de Poincaré (Monteiro, 2019)

$$\Sigma_c = \left\{ (x, y, z); x = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \right\},$$

em função da variação do parâmetro c .

O diagrama da Figura 3 revela que para $c = 2$ até um pouco maior que 3, o regime dinâmico é uma órbita periódica estável de período 1; para certo valor de c entre 3 e 4 ocorre a primeira bifurcação e uma duplicação de período, consequentemente um novo regime dinâmico: uma

órbita periódica estável de período 2; para c entre 4 e 5 ocorrem novas bifurcações e consequentes duplicações de período, até que se atinge o regime dinâmico caótico. Chama-se a atenção para a região de $c = 6$, onde pode ser observada uma sequência de transições de regimes dinâmicos: caos, janela de período três, bifurcações com duplicação de período e retorno ao caos.

A partir de soluções numéricas do sistema de Rössler pelo método Runge-Kutta de quarta ordem, com passo de discretização $h=0,01$, foi gerado um sinal $x(i)$ retirado da primeira coordenada do sistema da Eq. (1), contendo $N = 10^6$ dados. Esse sinal foi obtido variando o parâmetro de bifurcação c , de forma que diferentes regimes dinâmicos fossem atingidos: órbitas periódicas atratoras de diferentes períodos e caos. O parâmetro c foi variado por uma função linear por partes, como apresentado na Figura 4. Comparando o gráfico apresentado na Figura 4 com o diagrama de bifurcação da Figura 3, é possível determinar os diferentes regimes dinâmicos utilizados na simulação.

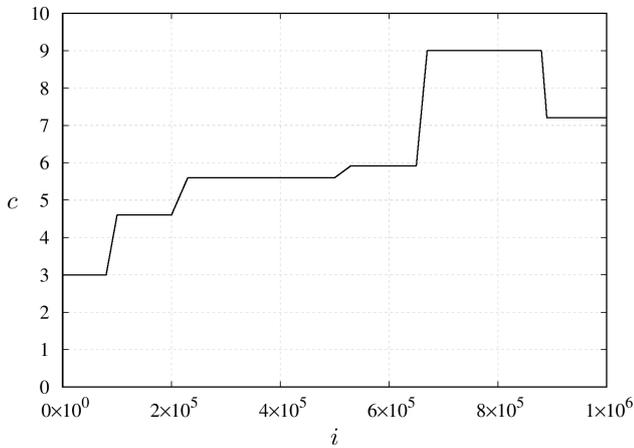


Figura 4. Variação do parâmetro c utilizado para gerar o sinal $x(i)$.

A Figura 5 mostra a evolução temporal da variável $x(i)$ em três estados diferentes, cujas diferenças no comportamento podem ser verificadas por inspeção e também comparando-se os respectivos valores de c com o comportamento associado no diagrama de bifurcações (Figura 3): em vermelho, para $c = 4,6$, órbitas periódicas, em azul, $c = 5,6$, caos e em preto, $c = 9$, caos, o mais desenvolvido. Este é um cenário semelhante ao apresentado na Figura 1, mas agora para para um sistema cuja dinâmica é conhecida e estudada há décadas. Nesse sentido, os resultados e análises obtidas para o sistema de Rössler têm o propósito de validar as técnicas aqui tratadas para serem empregadas na detecção de transição de estados em dados de EEG, com foco na epilepsia.

O sinal $x(i)$ gerado, como descrito anteriormente, foi utilizado para aplicar técnicas de análise de entropia utilizadas no estudo de dinâmica não linear. Devido à variação de regimes dinâmicos presentes no sinal, adotou-se a estratégia de calcular a entropia em subintervalos de tamanho fixo do sinal. A partir de um comprimento de intervalo τ fixado, os dados foram divididos em $N - \tau$ subintervalos

$$I_i = [x(i), x(i + \tau)], \quad i = 1, \dots, N - \tau. \quad (2)$$

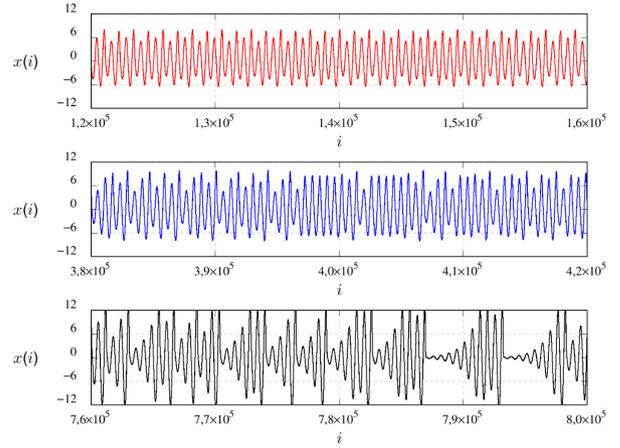


Figura 5. Evolução temporal da variável $x(i)$ do atrator de Rössler: $c = 4,6$ (vermelho) ; $c = 5,6$ (azul); $c = 9,0$ (preto).

A entropia $w(I_i)$ foi calculada em cada I_i para diferentes valores de τ e observou-se que para τ entre 0,1% e 1,0% do número total de dados, N , a variação da entropia intervalar aponta os diferentes regimes dinâmicos presentes no sinal, ilustrados de vermelho nas figuras 6 e 7.

Como forma de detectar a transição entre regimes dinâmicos, utilizou-se da entropia média intervalar, dada por

$$w_{\text{med}}(i) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=i}^{i+\tau-1} w(I_k), \quad (3)$$

bem como sua respectiva variância, em que fora utilizado o mesmo valor de τ utilizado em I_i . Resultados também apresentados de cor verde nas figuras 6 e 7.

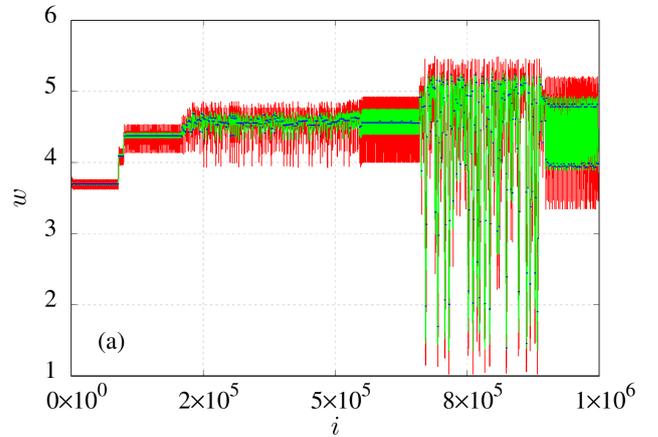


Figura 6. Entropia Intervalar (vermelho) e Entropia Média Intervalar (verde) para $\tau = 0,1\%N$.

Nota-se, ainda, nas figuras 6 e 7, um conjunto de dados em azul que corresponde à entropia acumulada baseada no intervalo de confiança para $w_{\text{med}}(i)$.

Somando-se a isso, foi realizada em algumas partes do sinal $x(i)$ uma imersão diferencial no espaço de estados (Fiedler-Ferrara and Do Prado, 1994). A imersão em espaço de estados tem por objetivo reconstruir um possível atrator dinâmico associado a uma série temporal para que sejam analisadas as características dinâmicas tais como órbitas periódicas atratoras ou comportamento caótico. A imersão diferencial utilizada foram obtidas pela Eq. (4)

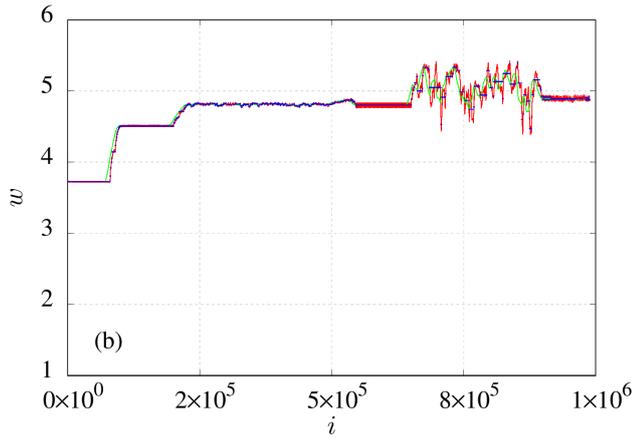


Figura 7. Entropia Intervalar (vermelho) e Entropia Média Intervalar (verde) para $\tau = 1\%N$.

$$\begin{cases} x = x(i), \\ y = (x(i) - x(i-1))/h, \\ z = (x(i+1) - 2x(i) + x(i-1))/h^2, \end{cases} \quad (4)$$

em que $1 < i < N$ e $h = 0,01$. A primeira coordenada da imersão diferencial é igual aos valores de $x(i)$ e as outras coordenadas utilizam-se de aproximações numéricas para as derivadas de $x(i)$.

Essa ferramenta foi empregada para reconstruir a topologia do atrator e, assim, analisar se os resultados obtidos pela entropia intervalar e a entropia média intervalar eram condizentes e corroboravam com o comportamento do atrator dinâmico em função do parâmetro c (figuras 3 e 4). Alguns resultados obtidos pela imersão diferencial de $x(i)$, utilizando as Eq. (4), estão ilustrados nas figuras 8, 9, 10 e 11.

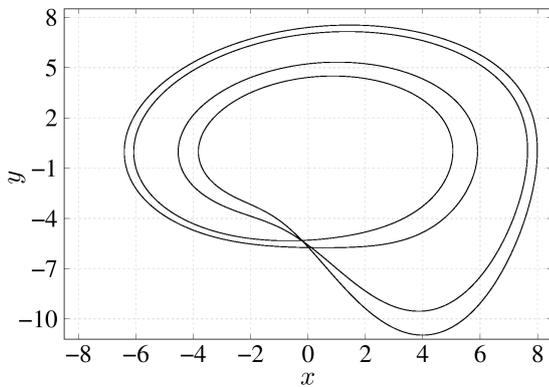


Figura 8. Projeção no plano xy da imersão diferencial para: $125000 < i < 175000$

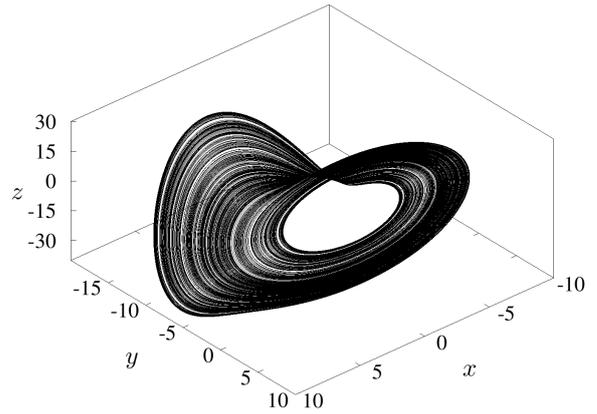


Figura 9. Imersão diferencial para: $250000 < i < 500000$

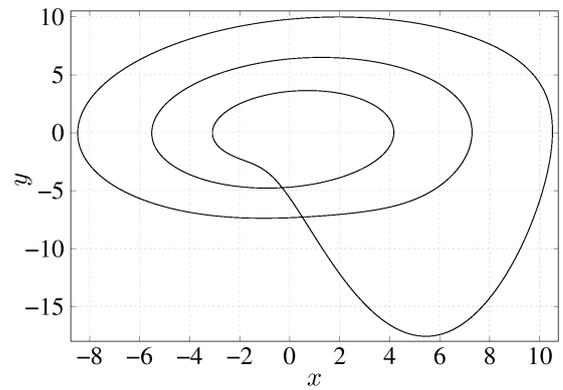


Figura 10. Projeção no plano xy da imersão diferencial para: $575000 < i < 650000$

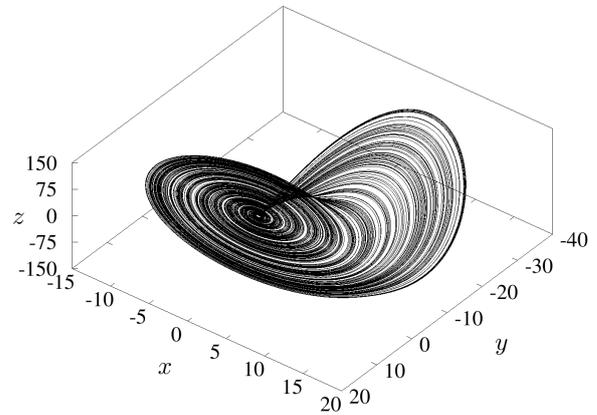


Figura 11. Imersão diferencial para: $690000 < i < 880000$

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 Entropia Intervalar e Entropia média intervalar

A entropia intervalar e a entropia média intervalar, como dito anteriormente, foram calculadas para identificar, respectivamente, os diferentes estados do sistema e suas transições, a partir de subintervalos de tamanho fixo do sinal.

Na Figura 6, nota-se que para $\tau = 0.1\%N$ houve a identificação de sete diferentes estados do sinal simulado de Rössler. Dentre os estados identificados, destaca-se

que cinco deles possuem um certo padrão de variação de entropia dentro de um intervalo.

Dessa forma, supõe-se que nesses intervalos o sistema se comporta como um regime não caótico, possuindo órbitas periódicas atratoras estáveis. Tal suposição foi feita a partir do próprio conceito de entropia. Como nesses estados existe uma padronização da quantidade de informação gerada pelo sistema, significa que nesse período o sistema se encontra organizado, ou seja, estável.

Nota-se que a média da entropia intervalar (verde) se encontra numa faixa de valores de entropia ainda mais restrita e padronizada.

Nos outros dois estados do sinal encontra-se uma despadronização do valor da entropia intervalar. Nesses estados, supõe-se que o sistema estaria em um regime caótico devido ao fato de que os dados estão dispersos e não seguem um padrão de intervalo para seus valores de entropia.

Nota-se que nesses intervalos, a entropia média intervalar varia muito no gráfico, simbolizando uma desorganização ou uma dispersão dos dados nos intervalos correspondentes.

Na Figura 7, nota-se que para $\tau = 1\%N$ houve, com uma menor precisão, a identificação dos diferentes estados do sinal simulado. Mesmo com essa diferença, nota-se um intervalo no qual o sinal é completamente desorganizado, sem um padrão e com variação de amplitude mais elevada em relação aos demais, o que aponta para um regime caótico. Um olhar atento pode conduzir a uma análise semelhante para o intervalo compreendido por $i = 20000$ a $i = 50000$, mesmo que com uma variação de amplitude semelhante à dos demais intervalos; indicando, possivelmente, caos menos desenvolvido.

Porém, observa-se que o tamanho do intervalo I_i é inversamente proporcional ao desvio padrão da entropia média intervalar, implicando em uma maior precisão para a detecção de variação na dinâmica do conjunto de dados quanto maior o valor de τ .

No entanto, o aumento do tamanho do intervalo implica em uma menor distinção entre regimes periódicos e caóticos, além de maior tempo computacional devido à aquisição de uma maior quantidade de dados para os cálculos da entropia.

4.2 Imersão Diferencial

A partir de uma das coordenadas do atrator, foram reconstruídas as outras duas coordenadas, bem como sua topologia no espaço. A imersão diferencial foi utilizada para verificar as suposições dos comportamentos dinâmicos do atrator previamente descritas.

Na Figura 8, por exemplo, para o intervalo descrito em termos de i , o sistema se comporta de uma maneira estável com órbitas periódicas atratoras. Nota-se que, a suposição feita com base no resultado obtido no cálculo de $w(I_i)$ e $w_{\text{med}}(i)$ está de acordo com a topologia do atrator nesse mesmo intervalo.

Nas outras figuras que ilustram os resultados obtidos na imersão diferencial (9, 10 e 11) também pode-se verificar que as suposições previamente feitas a partir do cálculo

da entropia nos respectivos intervalos do índice i , estão de acordo com o comportamento dinâmico do atrator.

Para fazer tal correlação, entre o comportamento do atrator com o cálculo das entropias, recomenda-se analisar a Figura 6, onde $\tau = 0,1\%N$ pois, para esse valor de τ , consegue-se uma melhor distinção entre os estados do sinal, facilitando assim a análise da correspondência entre a variação de entropia e o comportamento do sinal.

Destaca-se, em especial, uma faixa de intervalo bem específica desse sinal, facilmente percebida tanto para o gráfico de $\tau = 0,1\%N$, onde a distinção de estados é mais precisa, quanto para o gráfico de $\tau = 1\%N$. O intervalo $700000 < i < 900000$, aproximadamente, além de ser facilmente perceptível, é onde os dados do sinal se comportam de maneira mais desorganizada, variando bastante o valor de sua entropia. Esse comportamento despadronizado aponta, supostamente, para um regime caótico.

Na Figura 11, tem-se uma ilustração do comportamento do atrator para esse intervalo aproximado. O comportamento apresentado é claramente o de um sinal em regime caótico, no qual os dados não seguem um padrão e se comportam desorganizadamente. Esse fenômeno corresponde à análise feita anteriormente a partir dos valores da entropia para o mesmo intervalo de i .

4.3 Análise da Variância

A variância é uma ferramenta estatística que mede o quão dispersos os dados se encontram da média (valor esperado) (Montgomery and Runger, 2016). Visto isso, procurou-se fazer uma análise da variância para o gráfico da Figura 6. O resultado obtido se encontra na Figura 12.

Vale ressaltar que, na Figura 12, utilizou-se $\tau = 0,1\%N$ para obter uma melhor precisão entre os estados do sistema, como dito anteriormente. Nessa figura, também estão ilustradas a entropia intervalar ($w(I_i)$), em vermelho, e a entropia média intervalar ($w_{\text{med}}(i)$) em azul. No eixo horizontal, n corresponde ao intervalo i ; já no eixo vertical, $y(n)$ corresponde aos valores de w , variáveis semelhantes às contidas nos gráficos das figuras 6 e 7.

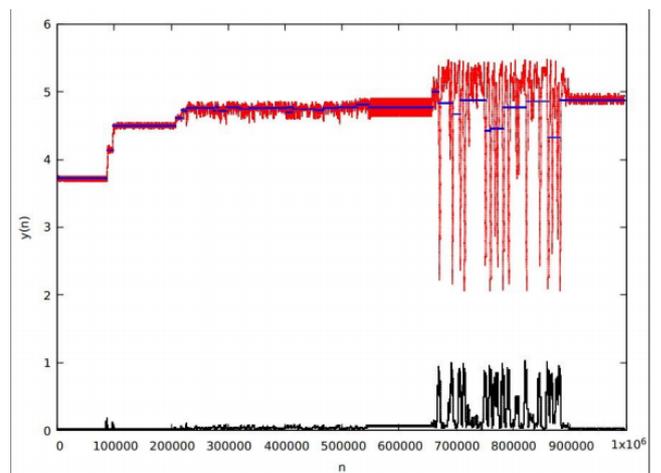


Figura 12. Cálculo da variância para $\tau = 0,1\%N$ (em preto), entropia intervalar ($w(I_i)$), em vermelho, e a entropia média intervalar ($w_{\text{med}}(i)$), em azul.

Os resultados obtidos para a variância, ilustrada de preto na Figura 12, correspondem e confirmam o que previamente foi apurado no cálculo de entropia e na imersão de Takens. As regiões do gráfico de entropia que seguem um padrão, onde os dados estão organizados, obtiveram valores pequenos para a variância, uma vez que os dados nessas regiões não se encontram tão dispersos do valor central. Nessas regiões menos complexas, a variância tende a se manter constante ou variar pouco, uma vez que o sistema é menos instável e os dados são atraídos por órbitas atratoras. Esse fato pode ser observado nas figuras 8 e 10, por exemplo. Para intervalos desse tipo há órbitas periódicas estáveis no espaço de estados reconstruído pela imersão diferencial.

As faixas de intervalo nas quais os valores de entropia estão despadronizados correspondem à valores mais elevados de varância, bem como uma grande variação da mesma. Isso acontece porque nessas regiões os dados se encontram dispersos da média esperada. Este comportamento aponta para uma caoticidade no sistema, pois numa região de caos os dados são dispersos e instáveis. Para esses mesmos intervalos encontra-se, pela imersão diferencial, um atrator reconstruído em regime caótico, validando-se assim a análise feita pelo comportamento da variância.

4.4 Diagrama de Recorrência

Uma outra ferramenta que se mostra potencialmente útil para a consecussão dos objetivos apresentados nesse artigo é o diagrama de recorrência. Serão apresentados aqui alguns resultados preliminares, mas que indicam sua possibilidade de emprego no sentido de se detectar a transição entre estados do sistema.

As figuras 13, 14 e 15 mostram uma forma diferente de se avaliar a evolução da dinâmica do sistema. A Figura 13 corresponde a um trecho anterior ao apresentado na Figura 8, portanto, uma dinâmica ainda mais regular e de menor variância. As figuras 14 e 15 correspondem, respectivamente, aos trechos das figuras 10 e 11.

As próximas etapas passam por implementar uma métrica que acuse a transição de um quadro para outro, consequentemente, de um estado para outro.

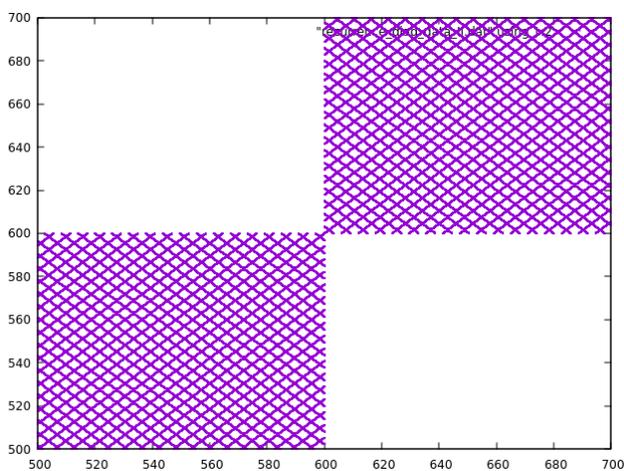


Figura 13. Diagrama de recorrência para os dados de entropia para dados compreendidos : $0 < i < 10000$, $\tau = 0,1\%N$

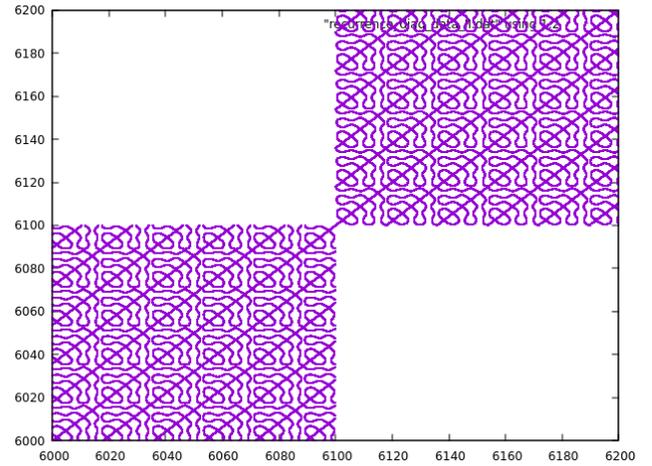


Figura 14. Diagrama de recorrência para os dados de entropia para dados compreendidos : $575000 < i < 650000$, $\tau = 0,1\%N$

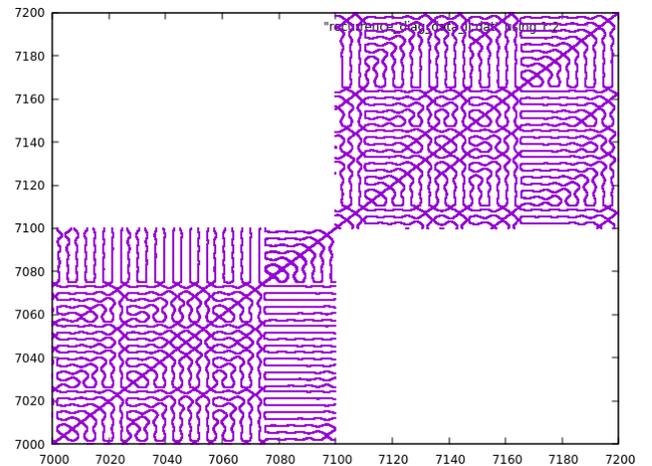


Figura 15. Diagrama de recorrência para os dados de entropia para dados compreendidos : $690000 < i < 880000$, $\tau = 0,1\%N$

5. CONCLUSÃO

Este artigo apresenta uma técnica, baseada em entropia, para, não apenas detectar os diferentes estados percorridos por um sistema dinâmico ao longo tempo, mas também que seja capaz de identificar quando ocorrem as transições de estado. Muito importante para a modelagem, análise e controle de sistemas dinâmicos.

A entropia intevarlar e a entropia média intevarlar foram empregadas na identificação, respectivamente, dos diferentes estados do sistema e suas transições, a partir de subintervalos de tamanho fixo do sinal.

A imersão diferencial foi utilizada para verificar a validade dos resultados obtido por meio da entropia, acerca dos comportamentos dinâmicos do atrator do trator de Rössler.

A análise da variância foi empregada como mais um instrumento, em conjunto com a imersão diferencial, para validar os resultados obtidos com a entropia.

O diagrama de recorrência foi outra ferramenta utilizada, ainda de forma preliminar, com o objetivo de caracterizar diferentes estados de sistemas dinâmicos, bem como as transições entre eles. Verificou-se haver potencial, mas

ainda é preciso mais estudos para encontrar uma métrica capaz de auxiliar na determinação da transição de estados.

Os resultados apresentados neste artigo confirmam que os procedimentos apresentados são capazes de indicar os diferentes estados percorridos por um sistema dinâmico, bem como quando ocorrem as mudanças de estado, ao se avaliar a evolução temporal de uma variável dinâmica gerada por este sistema.

Os resultados foram obtidos para o atrator de Rössler, sistema dinâmico não linear largamente estudado na literatura há décadas. Acredita-se que o procedimento tal como proposto e executado pode ser aplicado a um largo espectro de sistemas dinâmicos. Dessa forma, um dos próximos passos será aplicá-lo a dados de EEG, mais especificamente ao estudo da epilepsia.

REFERÊNCIAS

- Acharya, U.R., Sree, S.V., Swapna, G., Martis, R.J., and Suri, J.S. (2013). Automated eeg analysis of epilepsy: A review. *Knowledge-Based Systems*, 45, 147 – 165.
- Fiedler-Ferrara, N. and Do Prado, C.P.C. (1994). *Caos*. Blucher, 1 edition.
- Güler, N.F., Übeyli, E.D., and Güler, I. (2005). Recurrent neural networks employing lyapunov exponents for eeg signals classification. *Expert Systems with Applications*, 29, 506 – 514.
- Kannathal, N., Choob, M.L., Acharya, U.R., and Sadasivan, P. (2005). Entropies for detection of epilepsy in eeg. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 80, 187 – 194.
- Monteiro, L.H.A. (2019). *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 4 edition.
- Montgomery, D.C. and Runger, G.C. (2016). *Estatística e Probabilidade para Engenheiros*. LTC, Rio de Janeiro, 6 edition.
- Rössler, O. (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters*, 57, 397 – 398.
- Shelhamer, M. (2007). *Nonlinear Dynamics in Physiology*. World Scientific, New Jersey, 1st edition.
- Stam, C. (2005). Nonlinear dynamical analysis of eeg and meg: Review of an emerging field. *Clinical Neurophysiology*, 116, 2266 – 2301.
- Thomasson, N., Hoepfner, T.J., Jr, C.L.W., and Zbilut, J.P. (2001). Recurrence quantification in epileptic eegs. *Physics Letters A*, 279, 94 – 101.
- Westbrook, G.L. (2014). Princípios de neurociência. In E. Kandel, J. Schwartz, T. Jessell, S. Siegelbaum, and A. Hudspeth (eds.), *Crises epilépticas e epilepsia*, 970–990. Amgh Editora - McGraw Hill, Brasil.
- Yan, J., Wang, Y., Ouyang, G., Yu, T., and Li, X. (2016). Using max entropy ratio of recurrence plot to measure electrocorticogram changes in epilepsy patients. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 443, 109 – 116.
- Świdorski, B., Osowski, S., Cichocki, A., and Rysz, A. (2007). Epileptic seizure prediction using lyapunov exponents and support vector machine. *COMPEL International Journal for Computational Mathematics in Electrical and Eletronical Engineering*, 26(5), 1276 – 1287.