

# Otimidade Inversa em Controle Extremal do tipo Newton com Atrasos

Denis César Ferreira\* Tiago Roux Oliveira\*  
Miroslav Krstic\*\*

\* *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica (PEL),  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), RJ, Brasil,  
(e-mail: denistcf@yahoo.com.br, tiagoroux@uerj.br).*

\*\* *Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of  
California – San Diego (UCSD), La Jolla, CA, USA,  
(e-mail: krstic@ucsd.edu)*

---

**Abstract:** In this paper, we present a Newton-based extremum seeking algorithm for maximizing unknown maps in the presence of constant delays. A filtered predictor feedback is incorporated with a perturbation-based estimate for the Hessian's inverse of locally quadratic maps. Exponential stability and user-assigned convergence to a small neighborhood of the unknown extremum point are guaranteed by using backstepping transformation and averaging theory in infinite dimensions. The low-pass filter (with a high enough pole) in the predictor feedback allows the technical application of the Hale and Lunel's averaging theorem for functional differential equations and also establishes an inverse optimal result for the closed-loop system. This inverse optimality property is for the first time proved in Newton-based extremum seeking designs and justifies the heuristic use of a low-pass filter between the demodulation and the integrator, which has historically been a part of the extremum seeking implementations free of delays.

**Resumo:** Neste artigo, a otimalidade inversa é garantida em controle extremal escalar baseado no método de Newton sujeito a atrasos de entrada e saída. Diferente de trabalhos anteriores, um novo preditor com uma estimativa da inversa da Hessiana baseada em perturbações é incorporado à malha fechada tal que, a taxa de convergência do controlador em tempo real pode ser especificada pelo usuário, ao invés de ser dependente da Hessiana desconhecida do mapa estático não-linear a ser otimizado. A estabilidade exponencial e a convergência para uma pequena vizinhança do ponto extremo desconhecido são alcançadas utilizando a transformação *backstepping* e a teoria da média em dimensões infinitas. Aplica-se um filtro passa-baixa (com um polo suficientemente alto) na realimentação do preditor que permite aplicação técnica do teorema da média de Hale e Lunel para equações diferenciais funcionais e também estabelece o resultado da otimalidade inversa para o sistema de malha fechada. A otimalidade inversa é pela primeira vez demonstrada em projetos de controle extremal baseado no método de Newton e justifica o uso heurístico de filtro passa-baixa entre o sinal de demodulação e o integrador, que tem sido historicamente utilizado em implementações de controle extremal sem atrasos.

*Keywords:* inverse optimality; time delay; adaptive systems; extremum seeking; predictors; backstepping transformation; averaging theory in infinite dimensions.

*Palavras-chaves:* otimalidade inversa; atraso; sistemas adaptativos; controle extremal; preditores; transformação *backstepping*; teoria da média em dimensões infinitas.

---

## 1. INTRODUÇÃO

O método de Newton comparado com o método do gradiente no Controle Extremal (*Extremum Seeking Control-ESC*) apresenta a vantagem de não necessitar da dependência da taxa de convergência da Hessiana desconhecida (segunda derivada) do mapa não-linear a ser otimizado, sendo assim a taxa de convergência é arbitrariamente atribuída (Krstić, 2014; Ghaffari et al., 2012).

No controle extremal existem vários trabalhos que aplicam filtros passa-alta e passa-baixa para melhorar o ajuste/sintonia dos parâmetros do controlador e o desempenho do sistema em malha fechada. Entretanto, os

mesmos não apresentam nenhuma sustentação teórica que justifique a inclusão dos filtros. (Krstić, 2014; Adetola and Guay, 2007; Tan et al., 2009; Nesić et al., 2010; Ghaffari et al., 2012; Liu and Krstić, 2012; Oliveira et al., 2011, 2012), pelo contrário, apenas argumentações heurísticas são levantadas.

Diferentemente de (Ferreira and Oliveira, 2019) onde a otimalidade inversa foi discutida em controle extremal baseado no método gradiente, neste artigo pela primeira vez na literatura a prova da otimalidade inversa e sua influência será demonstrada no controle extremal baseado no método de Newton na presença de atrasos (embora os resultados também sejam válidos no caso livre de

atrasos). A otimalidade inversa foi definida em (Kalman, 1964) da seguinte forma: “Dado um sistema dinâmico e uma lei de controle conhecida, encontre critérios de desempenho (se houver) para os quais essa lei de controle é ótima”. A otimalidade inversa é garantida quando um controlador estabilizante é ótimo e, para uma dada função de Lyapunov, é possível construir uma realimentação que é ótima com respeito a alguma função custo. Em geral, esse funcional inclui uma penalidade no esforço de controle (ou sua derivada) e tem margem de ganho infinita. Resultados e simulação ilustram numericamente as vantagens de se satisfazer a otimalidade inversa.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 o controle extremal baseado no método de Newton com atraso é apresentado. Na Seção 3 a prova da otimalidade é desenvolvida juntamente com a análise de estabilidade, enquanto que na Seção 4 apresenta-se as simulações das variáveis do Controle Extremal comparando o sistema com a otimalidade inversa garantida. Por fim a Seção 5 conclui o artigo indicando trabalhos futuros.

**Notações e Normas:** A norma-2 de um vetor de estado  $X(t)$  de dimensão finita de uma equação diferencial ordinária (EDO) é denotada por barras simples,  $|X(t)|$ . Em contraste, as normas de funções (de  $x$ ) são denotadas por barras duplas. Por padrão,  $\|\cdot\|$  denota a norma espacial  $L_2[0, D]$ , *i.e.*,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2[0, D]}$ . Como a variável de estado  $u(x, t)$  da equação diferencial parcial (EDP) é uma função de dois argumentos, deve-se dar ênfase que levando em conta a norma de uma das variáveis faz-se à norma uma função da outra variável, assim como adotado em (Krstić, 2009). Por exemplo, a norma  $L_2[0, D]$  de  $u(x, t)$  em  $x \in [0, D]$  é  $\|u(t)\| = \left(\int_0^D u^2(x, t) dx\right)^{1/2}$ .

## 2. CONTROLE EXTREMAL BASEADO NO MÉTODO DE NEWTON COM ATRASOS

O controle extremal escalar considera aplicações em que a meta é maximizar (ou minimizar) a saída  $y \in \mathbb{R}$  de um mapa estático não-linear  $Q(\theta)$  desconhecido através da variação da entrada  $\theta \in \mathbb{R}$  em *tempo real*. Aqui, adicionalmente admite-se que existe uma *constante* e um atraso *conhecido*  $D \geq 0$  no caminho de atuação ou no sistema de medição tal que a saída medida é dada por

$$y(t) = Q(\theta(t - D)). \quad (1)$$

Para clarificar a notação, assume-se que o sistema está com saída atrasada seguindo a apresentação e diagramas em blocos. No entanto, os resultados neste artigo podem ser diretamente estendidos ao caso de entrada atrasada desde que qualquer atraso de entrada possa ser movido para a saída do mapa estático. O caso quando o atraso de entrada  $D_{\text{in}}$  e atraso de saída  $D_{\text{out}}$  ocorrem simultaneamente pode também tratado, assumindo-se que o atraso total a ser neutralizado deva ser  $D = D_{\text{in}} + D_{\text{out}}$ , com  $D_{\text{in}}, D_{\text{out}} \geq 0$ .

Sem perda de generalidade, considera-se o problema de busca pelo máximo tal que o valor ótimo de  $\theta$  é denotado por  $\theta^*$ . Por motivo de simplicidade, também assume-se que o mapa não-linear é quadrático, *i.e.*,

$$Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2, \quad (2)$$

em que além das constantes  $\theta^* \in \mathbb{R}$  e  $y^* \in \mathbb{R}$  serem desconhecidas, o escalar  $H < 0$  é a Hessiana desconhecida do mapa estático.

Na Figura 1, ilustra-se a versão escalar proposta para o controle extremal baseado em Newton através da realimentação por preditor para compensação do atraso.

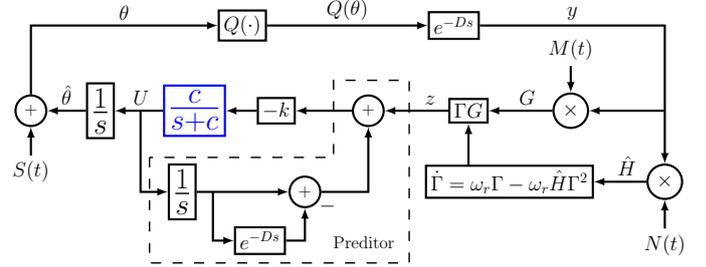


Figura 1. Diagrama em blocos do esquema básico de predição para compensação de atraso na saída para controle extremal através do método de Newton. O filtro passa-baixa (em azul) é o elemento chave empregado para garantir a otimalidade inversa.

### 2.1 Sistema e Sinais

Substituindo-se (2) em (1), obtém-se o *o mapa quadrático e estático com atraso* de interesse:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\theta(t - D) - \theta^*)^2. \quad (3)$$

Seja  $\hat{\theta}$  a estimativa de  $\theta^*$  e

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^* \quad (4)$$

o *erro de estimativa*. Da Figura 1, a *dinâmica do erro* pode ser escrita como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t - D) = U(t - D). \quad (5)$$

Além disso, tem-se

$$G(t) = M(t)y(t), \quad \theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t), \quad (6)$$

em que os sinais de perturbação senoidal são dados por

$$S(t) = a \sin(\omega(t + D)), \quad M(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t), \quad (7)$$

com amplitude  $a$  e frequência  $\omega$  não-nulas. Uma vez que o atraso na saída possa ser transferido para a saída do integrador para propósito de análise (ou, equivalentemente, para sua entrada), então, o deslocamento de fase  $+\omega D$  é aplicado para compensar o efeito do atraso no sinal *dither*  $S(t)$  em (7). Por outro lado, o sinal

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \quad (8)$$

é aplicado para se obter uma estimativa da Hessiana  $H$  desconhecida, onde o sinal de demodulação  $N(t)$  é

$$N(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t). \quad (9)$$

A versão média de (8) (Ghaffari et al., 2012) é

$$\hat{H}_{\text{av}} = (Ny)_{\text{av}} = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} N(\sigma)y d\sigma = H, \quad \Pi = 2\pi/\omega, \quad (10)$$

se um mapa quadrático como em (2) é considerado.

Define-se o sinal mensurável por

$$z(t) = \Gamma(t)G(t), \quad (11)$$

onde  $\Gamma(t)$  é atualizado pela seguinte equação diferencial de Riccati (Ghaffari et al., 2012):

$$\dot{\Gamma} = \omega_r \Gamma - \omega_r \hat{H} \Gamma^2, \quad (12)$$

com  $\omega_r > 0$  sendo um constante de projeto. A equação (12) gera uma estimativa da inversa de Hessiana, evitando inversões da Hessiana estimada que durante a fase transitente pode ser zero. O erro de estimação da inversa da Hessiana pode ser definido como

$$\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma(t) - H^{-1}, \quad (13)$$

e sua equação dinâmica pode ser a partir de (12) e (13) como

$$\dot{\tilde{\Gamma}} = \omega_r [\tilde{\Gamma} + H^{-1}] \times [1 - \hat{H}(\tilde{\Gamma} + H^{-1})]. \quad (14)$$

## 2.2 Realimentação via Preditor através da Estimativa da Inversa da Hessiana

Por uma análise da média (Krstić, 2014; Ghaffari et al., 2012), pode-se verificar de  $G(t)$  em (6) e  $z(t)$  em (11) que

$$z_{av}(t) = \Gamma_{av}(t)H\tilde{\theta}_{av}(t-D). \quad (15)$$

De (13), a equação (15) pode ser escrita em termos de  $\tilde{\Gamma}_{av}(t) = \Gamma_{av}(t) - H^{-1}$  como

$$z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t-D) + \tilde{\Gamma}_{av}(t)H\tilde{\theta}_{av}(t-D). \quad (16)$$

O segundo termo, no lado direito de (16), é quadrático em  $(\tilde{\Gamma}_{av}, \tilde{\theta}_{av})$ , então, a linearização de  $\Gamma_{av}(t)$  em  $H^{-1}$  resulta na versão linearizada de (15) dada por

$$z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t-D). \quad (17)$$

De (5) e (17), os seguintes modelos médios podem ser obtidos:  $\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t-D) = U_{av}(t-D)$  e

$$\dot{z}_{av}(t) = U_{av}(t-D), \quad (18)$$

onde  $U_{av} \in \mathbb{R}$  é o controle médio resultante de  $U \in \mathbb{R}$ .

Com a intenção de motivar o projeto da realimentação por preditor, a ideia aqui é compensar o atraso através da realimentação do estado futuro  $z(t+D)$ , ou  $z_{av}(t+D)$  na versão média equivalente do sistema. Para se obter  $z_{av}(t+D)$  com a fórmula da variação das constantes para (18), o estado futuro é descrito por

$$z_{av}(t+D) = z_{av}(t) + \int_{t-D}^t U_{av}(\sigma) d\sigma, \quad (19)$$

em termos do sinal de controle  $U_{av}(\sigma)$  na janela de tempo passada  $[t-D, t]$ . Dado qualquer ganho estabilizante  $k > 0$ , o controle médio deve ser dado por

$$U_{av}(t) = -k \left[ z_{av}(t) + \int_{t-D}^t U_{av}(\sigma) d\sigma \right], \quad (20)$$

resultando no controle médio  $U_{av}(t) = -kz_{av}(t+D)$ ,  $\forall t \geq 0$ , como desejado. Assim, o sistema médio deve ser,  $\forall t \geq D$ :

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}(t)}{dt} = -k\tilde{\theta}_{av}(t) - k\tilde{\Gamma}_{av}(t+D)H\tilde{\theta}_{av}(t). \quad (21)$$

Como  $k\tilde{\Gamma}_{av}H\tilde{\theta}_{av}$  é quadrático em  $(\tilde{\Gamma}_{av}, \tilde{\theta}_{av})$ , a linearização do sistema (21) tem todos seus autovalores determinados por  $-k$ . A estabilidade exponencial local do algoritmo

pode ser garantida com taxa de convergência que é independente da Hessiana desconhecida  $H$ , sendo configurável.

O desempenho do controle pode ser melhorado aplicando-se o conceito de otimalidade inversa, onde um filtro passa-baixas é inserido no controlador baseado em preditor. Neste sentido, propõe-se a seguinte compensação por preditor baseado em dimensão infinita e média no sentido de compensar o atraso (Krstić, 2008)

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ z(t) + \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (22)$$

em que  $c > 0$  é suficientemente grande, *i.e.*, a realimentação por preditor é da forma de uma filtragem passa-baixa da versão não-média de (20). Esta filtragem passa-baixa é particularmente necessária na análise de estabilidade quando o teorema da média em dimensões infinitas (*averaging theorem*) (Hale and Lunel, 1990) é invocado.

## 3. ANÁLISE DE ESTABILIDADE E OTIMALIDADE INVERSA

Nesta seção, a análise da estabilidade é realizada e a prova da otimalidade inversa em controle extremal do tipo Newton é apresentada.

**Teorema 1** *Existe um  $c^*$  tal que o sistema médio realimentado (18) e (22) é exponencialmente estável no sentido da norma*

$$\Psi(t) = \left( |\tilde{\Gamma}_{av}(t)|^2 + |\tilde{\theta}_{av}(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t U_{av}(\tau)^2 d\tau + U_{av}(t)^2 \right)^{1/2} \quad (23)$$

para todo  $c > c^*$ . Além disso, existe  $c^{**} > c^*$  tal que, para qualquer  $c \geq c^{**}$ , a lei de controle (22) minimiza a função custo

$$J = \int_0^\infty (\mathcal{L}(t) + \dot{U}_{av}(t)^2) dt, \quad (24)$$

onde  $\mathcal{L}(t)$  é um funcional de  $(\tilde{\Gamma}_{av}(t), \tilde{\theta}_{av}(t-D), U(\tau))$ ,  $\forall \tau \in [t-D, t]$ , tal que

$$\mathcal{L}(t) \geq \mu \Psi(t)^2 \quad (25)$$

para algum  $\mu(c) > 0$  com a propriedade que  $\mu(c) \rightarrow \infty$  à medida que  $c \rightarrow \infty$ .

**Prova:** A demonstração segue os passos 1 a 8 abaixo.

**Passo 1:** EDP para Representação do Atraso

De acordo com (Krstić, 2009), o atraso em (5) pode ser representado usando uma EDP de transporte como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = u(0, t), \quad (26)$$

$$u_t(x, t) = u_x(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (27)$$

$$u(D, t) = U(t), \quad (28)$$

onde a solução de (27)–(28) é  $u(x, t) = U(t+x-D)$ .

**Passo 2:** Sistema em Malha Fechada

Primeiramente, substituindo-se  $S(t)$  dado em (7) em  $\theta(t)$  na equação (6), obtém-se

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + \text{asen}(\omega(t+D)). \quad (29)$$

Agora, coloca-se (4) e (29) em (3) tal que a saída seja dada em termos de  $\hat{\theta}$ :

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\tilde{\theta}(t-D) + \text{asen}(\omega t))^2. \quad (30)$$

Substituindo-se  $M(t)$  definido por (7) em (6) e então resultando em (11). Além disto, representando o integrando em (22) e usando o estado da EDP de transporte, tem-se

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ z(t) + \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}, \quad (31)$$

$$z(t) = \Gamma(t) \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t) y(t). \quad (32)$$

Depois, substituindo (30) em (32), e então o resultado de (32) em (31), tem-se

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t-D) + H \text{asen}(\omega t) \tilde{\theta}(t-D) + \frac{a^2 H}{2} \text{sen}^2(\omega t) \right] \right. \\ \left. \times \left[ \Gamma(t) \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t) \right] - k \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right\}. \quad (33)$$

Substituindo (33) em (28), pode-se reescrever (26)–(28) como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = u(0, t), \quad (34)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (35)$$

$$u(D, t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t-D) + H \text{asen}(\omega t) \tilde{\theta}(t-D) + \frac{a^2 H}{2} \text{sen}^2(\omega t) \right] \times \left[ \Gamma(t) \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t) \right] - k \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right\} \\ = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ \Gamma(t) y^* \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t) + \Gamma(t) \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t-D) \text{sen}(\omega t) + 2\Gamma(t) H \text{sen}^2(\omega t) \tilde{\theta}(t-D) + \Gamma(t) a H \text{sen}^3(\omega t) + \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\} \\ = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ \Gamma(t) y^* \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t) + \Gamma(t) \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t-D) \text{sen}(\omega t) + \Gamma(t) H \tilde{\theta}(t-D) - \Gamma(t) H \cos(2\omega t) \tilde{\theta}(t-D) + \frac{3aH}{4} \Gamma(t) \text{sen}(\omega t) - \frac{aH}{4} \Gamma(t) \text{sen}(3\omega t) + \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (36)$$

**Passo 3:** Modelo Médio do Sistema em Malha Fechada

A versão média do sistema (34)–(36) é:

$$\dot{\tilde{\theta}}_{\text{av}}(t-D) = u_{\text{av}}(0, t), \quad (37)$$

$$\partial_t u_{\text{av}}(x, t) = \partial_x u_{\text{av}}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (38)$$

$$u_{\text{av}}(D, t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ \Gamma_{\text{av}}(t) H \tilde{\theta}_{\text{av}}(t-D) + \int_0^D u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (39)$$

A partir de (15) e (16) pode-se concluir que a linearização de  $\Gamma_{\text{av}}(t)$  em  $H^{-1}$  resulta na versão linearizada de (15) dada por (17), *i.e.*,  $z_{\text{av}}(t) = \tilde{\theta}_{\text{av}}(t-D)$ . Então, o termo  $\Gamma_{\text{av}}(t) H \tilde{\theta}_{\text{av}}(t-D)$  em  $\Gamma_{\text{av}}(t) H \tilde{\theta}_{\text{av}}(t-D)$  pode ser substituído por  $\tilde{\theta}_{\text{av}}(t-D)$  no modelo linearizado. Agora, denotando

$$\tilde{\vartheta}(t) = \tilde{\theta}(t-D), \quad (40)$$

tem-se  $\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) = z_{\text{av}}(t) = \tilde{\theta}_{\text{av}}(t-D)$  e a seguinte versão média linearizada do sistema (34)–(36) pode ser obtida:

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{\text{av}}(t) = u_{\text{av}}(0, t), \quad (41)$$

$$\partial_t u_{\text{av}}(x, t) = \partial_x u_{\text{av}}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (42)$$

$$\frac{d}{dt} u_{\text{av}}(D, t) = -c u_{\text{av}}(D, t) - ck \left[ \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^D u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (43)$$

onde o filtro  $c/(s+c)$  está também representado na forma do espaço de estado. A solução da EDP de transporte (42)–(43) é dada por  $u_{\text{av}}(x, t) = U_{\text{av}}(t+x-D)$ . Por outro lado, o modelo médio para a estimativa do erro associada a inversa da Hessiana em (14) é  $\frac{d\tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t) - \omega_r H \tilde{\Gamma}_{\text{av}}^2(t)$  e sua versão linearizada é descrita por

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t). \quad (44)$$

**Passo 4:** Transformação *backsteeping*, sua inversa e o sistema alvo

Considere a transformação *backsteeping* de dimensão infinita do estado do atraso

$$w(x, t) = u_{\text{av}}(x, t) + k \left[ \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^x u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (45)$$

que mapeia o sistema (41)–(43) no *sistema alvo*:

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{\text{av}}(t) = -k \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + w(0, t), \quad (46)$$

$$w_t(x, t) = w_x(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (47)$$

$$w(D, t) = -\frac{1}{c} \partial_t u_{\text{av}}(D, t). \quad (48)$$

Utilizando-se (45) para  $x = D$  e o fato de que  $u_{\text{av}}(D, t) = U_{\text{av}}(t)$ , a partir de (48) obtém-se (43), *i.e.*,

$$U_{\text{av}}(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^D u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (49)$$

Considerando-se  $w(D, t)$ , é fácil mostrar que

$$w_t(D, t) = \partial_t u_{\text{av}}(D, t) + k u_{\text{av}}(D, t), \quad (50)$$

onde  $\partial_t u_{\text{av}}(D, t) = \dot{U}_{\text{av}}(t)$ . A inversa de (45) é dada por

$$u_{av}(x, t) = w(x, t) - k \left[ e^{-kx} \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^x e^{-k(x-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (51)$$

Substituindo-se (48) e (51) em (50), obtém-se

$$w_t(D, t) = -cw(D, t) + kw(D, t) - k^2 \left[ e^{-kD} \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^D e^{-k(D-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (52)$$

**Passo 5:** *Funcional de Lyapunov-Krasovskii*

Considere o seguinte funcional de Lyapunov

$$V(t) = \frac{\tilde{\vartheta}_{av}^2(t)}{2} + \frac{\tilde{\Gamma}_{av}^2(t)}{2} + \frac{a}{2} \int_0^D (1+x)w^2(x, t)dx + \frac{1}{2}w^2(D, t), \quad (53)$$

onde o parâmetro  $a > 0$  será escolhido mais adiante. Com algum abuso de notação, este parâmetro não deve ser entendido como sendo a amplitude “ $a$ ” dos sinais de perturbação das equações (7) e (9).

Calculando-se a derivada temporal de (53), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -k\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{av}(t)w(0, t) - \omega_r \tilde{\Gamma}_{av}^2(t) \\ &+ a \int_0^D (1+x)w(x, t)w_x(x, t)dx \\ &+ w(D, t)w_t(D, t) \\ &= -k\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{av}(t)w(0, t) - \omega_r \tilde{\Gamma}_{av}^2(t) \\ &+ \frac{a(1+D)}{2}w^2(D, t) - \frac{a}{2}w^2(0, t) \\ &- \frac{a}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx + w(D, t)w_t(D, t) \\ &\leq -k\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \frac{\tilde{\vartheta}_{av}^2(t)}{2a} - \omega_r \tilde{\Gamma}_{av}^2(t) - \frac{a}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx \\ &+ w(D, t) \left[ w_t(D, t) + \frac{a(1+D)}{2}w(D, t) \right]. \end{aligned} \quad (54)$$

Lembrando-se que  $k > 0$ , escolhe-se  $a = 1/k$ . Então,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{k}{2}\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \omega_r \tilde{\Gamma}_{av}^2(t) - \frac{1}{2k} \int_0^D w^2(x, t)dx \\ &+ w(D, t) \left[ w_t(D, t) + \frac{(1+D)}{2k}w(D, t) \right] \\ &= -\frac{1}{2a}\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \omega_r \tilde{\Gamma}_{av}^2(t) - \frac{a}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx \\ &+ w(D, t) \left[ w_t(D, t) + \frac{a(1+D)}{2}w(D, t) \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

Agora, considera-se (55) juntamente com (52). Completando-se os quadrados e lembrando-se que

$$\begin{aligned} |w(D, t)| \left\| k^2 e^{-k(D-\sigma)} \right\| \|w(t)\| \\ \leq \frac{a}{4} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{a} \left\| k^2 e^{-k(D-\sigma)} \right\|^2 w^2(D, t), \end{aligned} \quad (56)$$

pelo uso das inequações de Cauchy-Schwartz e de Young, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{4a}\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \omega_r \tilde{\Gamma}_{av}^2(t) - \frac{a}{4} \int_0^D w^2(x, t)dx \\ &+ a |k^2 e^{-kD}|^2 w^2(D, t) + \\ &\frac{1}{a} \left\| k^2 e^{-k(D-\sigma)} \right\|^2 w^2(D, t) \\ &+ \left[ \frac{a(1+D)}{2} + k \right] w^2(D, t) - cw^2(D, t). \end{aligned} \quad (57)$$

A partir de (57), chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{4a}\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \omega_r \tilde{\Gamma}_{av}^2(t) \\ &- \frac{a}{4(1+D)} \int_0^D (1+x)w^2(x, t)dx - (c-c^*)w^2(D, t), \end{aligned} \quad (58)$$

onde  $c^* = \frac{a(1+D)}{2} + k + a |k^2 e^{-kD}|^2 + \frac{1}{a} \left\| k^2 e^{-k(D-\sigma)} \right\|^2$ . Portanto, de (58), se  $c$  é escolhido tal que  $c > c^*$ , obtém-se

$$\dot{V}(t) \leq -\mu V(t), \quad (59)$$

para algum  $\mu > 0$ . Com isso, o sistema em malha fechada é exponencialmente estável no sentido da norma completa do estado

$$\left( |\tilde{\Gamma}_{av}(t)|^2 + |\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + \int_0^D w^2(x, t)dx + w^2(D, t) \right)^{1/2}, \quad (60)$$

i.e., na variável transformada  $(\tilde{\vartheta}_{av}, w)$ .

**Passo 6:** *Estabilidade Exponencial Estimada (na norma  $L_2$ ) para o Sistema Médio (41)–(43)*

Para se obter a estabilidade exponencial com relação à norma  $\left( |\tilde{\Gamma}_{av}(t)|^2 + |\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + \int_0^D u_{av}^2(x, t)dx + u_{av}^2(D, t) \right)^{1/2}$ , precisa-se mostrar que existem números positivos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tais que  $\alpha_1 \Psi(t) \leq V(t) \leq \alpha_2 \Psi(t)$ , onde  $\Psi(t) := |\tilde{\Gamma}_{av}(t)|^2 + |\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + \int_0^D u_{av}^2(x, t)dx + u_{av}^2(D, t)$ , ou equivalentemente,

$$\Psi(t) := |\tilde{\Gamma}_{av}(t)|^2 + |\tilde{\vartheta}_{av}(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t U_{av}^2(\tau)d\tau + U_{av}^2(t), \quad (61)$$

usando-se (40).

Isto é estabelecido diretamente usando-se (45), (51), (53) e empregando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e outros cálculos, como na prova do Teorema 2.1 em (Krstić, 2009). Portanto, com (59), tem-se

$$\Psi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{-\mu t} \Psi(0), \quad (62)$$

que completa a prova da estabilidade exponencial.

**Passo 7:** *Otimilidade Inversa*

Baseando-se na prova do Teorema 6 em (Smyshlyayev and Krstic, 2004) e no Teorema 2.8 em (Krstic and Deng, 1999), no qual escolhe-se  $c^{**} = 4c^*$  e  $c = 2c^*$  e define-se  $\mathcal{L}(t)$  como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= -2c\dot{V}(t) + c(c-4c^*)w^2(D, t) \\ &\geq c \left( \frac{1}{2}k\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \frac{\tilde{\Gamma}_{av}^2(t)}{2} + \frac{a}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx + (c-2c^*)w^2(D, t) \right) \end{aligned} \quad (63)$$

onde  $\vartheta_{\text{av}}(t) := \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t-D)$ . Substituindo-se a transformação *backstepping* (52) na derivada do funcional de Lyapunov em (54), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -k\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t)w(0,t) - \omega_r\tilde{\Gamma}_{\text{av}}^2(t) + \frac{a(1+D)}{2}w^2(D,t) \\ &- \frac{a}{2}w^2(0,t) - \frac{a}{2}\int_0^D w^2(x,t)dx - 2c^*w^2(D,t) \\ &+ kw^2(D,t) - k^2w(D,t)e^{-kD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) \\ &- k^2w(D,t)\int_0^D e^{-k(D-\sigma)}w(\sigma,t)d\sigma. \end{aligned} \quad (64)$$

Então,  $\mathcal{L}(t)$  será:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= 2ck\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - 2c\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t)w(0,t) + 2c\omega_r\tilde{\Gamma}_{\text{av}}^2(t) \\ &- 2c\frac{a(1+D)}{2}w^2(D,t) + caw^2(0,t) + ca\int_0^D w^2(x,t)dx \\ &- 2ckw^2(D,t) + 2ck^2w(D,t)e^{-kD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) \\ &+ 2ck^2w(D,t)\int_0^D e^{-k(D-\sigma)}w(\sigma,t)d\sigma + c^2w^2(D,t). \end{aligned} \quad (65)$$

No entanto, substituindo-se a versão média do sistema (41) no sistema alvo em (46), tem-se

$$u_{\text{av}}(0,t) = -k\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + w(0,t). \quad (66)$$

Isolando-se  $w(0,t)$  em (66) tem-se:

$$w(0,t) = u_{\text{av}}(0,t) + k\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t). \quad (67)$$

Assim sendo, substituindo-se (67) em (65), somando e subtraindo  $\gamma\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t)$  e  $\tilde{\gamma}\tilde{\Gamma}_{\text{av}}^2(t)$  nos termos da equação, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= c\left(ak^2\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - 2(-ak+1)u_{\text{av}}(0,t)\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) \right. \\ &- a(1+D)w^2(D,t) - \gamma\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - (\tilde{\gamma} - 2\omega_r)\tilde{\Gamma}_{\text{av}}^2(t) + 2k^2w(D,t) \\ &\times \left[ e^{-kD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^D e^{-k(D-\sigma)}w(\sigma,t)d\sigma \right] \\ &+ au_{\text{av}}^2(0,t) + \frac{a}{2}\int_0^D w^2(x,t)dx + w^2(D,t)(2c^* - 2k) \\ &\left. + c(\gamma\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \tilde{\gamma}\tilde{\Gamma}_{\text{av}}^2(t) + \frac{a}{2}\int_0^D w^2(x,t)dx + (c-2c^*)w^2(D,t)) \right) \end{aligned} \quad (68)$$

sabe-se que  $a = \frac{1}{k}$ , então substituindo  $k$  por  $\frac{1}{a}$  em (68), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= c\left(\left[\frac{1}{a} - \gamma\right]\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \left(2c^* - a(1+D) - \frac{2}{a}\right)w^2(D,t) \right. \\ &- (\tilde{\gamma} - 2\omega_r)\tilde{\Gamma}_{\text{av}}^2(t) + au_{\text{av}}^2(0,t) + \frac{a}{2}\int_0^D w^2(x,t)dx + \frac{2}{a^2}w(D,t) \\ &\times \left[ e^{-kD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^D e^{-k(D-\sigma)}w(\sigma,t)d\sigma \right] \\ &\left. + c(\gamma\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \tilde{\gamma}\tilde{\Gamma}_{\text{av}}^2(t) + \frac{a}{2}\int_0^D w^2(x,t)dx + (c-2c^*)w^2(D,t)) \right). \end{aligned} \quad (69)$$

Assim,  $\mathcal{L}(t)$  pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= \Upsilon(D,t) \\ &+ c(\gamma\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \tilde{\gamma}\tilde{\Gamma}_{\text{av}}^2(t) + \frac{a}{2}\int_0^D w^2(x,t)dx + (c-2c^*)w^2(D,t)), \end{aligned} \quad (70)$$

no qual  $\Upsilon(D,t)$  é dado por

$$\begin{aligned} \Upsilon(D,t) &= c\left(\left[\frac{1}{a} - \gamma\right]\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \left(2c^* - a(1+D) - \frac{2}{a}\right)w^2(D,t) \right. \\ &- (\tilde{\gamma} - 2\omega_r)\tilde{\Gamma}_{\text{av}}^2(t) + au_{\text{av}}^2(0,t) + \frac{a}{2}\int_0^D w^2(\sigma,t)d\sigma \\ &\left. + \frac{2}{a^2}w(D,t)e^{-kD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \frac{2}{a^2}w(D,t)\int_0^D e^{-k(D-\sigma)}w(\sigma,t)d\sigma\right). \end{aligned} \quad (71)$$

Para satisfazer a inequação em (63), é necessário garantir  $\Upsilon(D,t) \geq 0$ . Para satisfazer essa condição, serão analisados os termos não quadráticos presentes em (71) de modo que se assegure que estes sejam iguais ou maiores que zero. Após a adição e subtração de termos em (71),  $\Upsilon(D,t)$  pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \Upsilon(D,t) &= c\left(\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} - \gamma\right]\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - (\tilde{\gamma} - 2\omega_r)\tilde{\Gamma}_{\text{av}}^2(t) \right. \\ &+ \left(2c^* - a(1+D) - \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{2\sqrt{D}}{a^2}\right)w^2(D,t) \\ &+ au_{\text{av}}^2(0,t) + \left[\frac{a}{2} - \frac{2\sqrt{D}}{a^2}\right]\int_0^D w^2(\sigma,t)d\sigma \\ &+ \frac{2}{a^2}w(D,t)e^{-kD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \frac{1}{a^2}w^2(D,t) + \frac{1}{a^2}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) \\ &+ \frac{2}{a^2}w(D,t)\int_0^D e^{-k(D-\sigma)}w(\sigma,t)d\sigma \\ &\left. + \frac{2\sqrt{D}}{a^2}w^2(D,t) + \frac{2\sqrt{D}}{a^2}\int_0^D w^2(\sigma,t)d\sigma\right). \end{aligned} \quad (72)$$

Através das desigualdades de Young e Cauchy-Schwartz é possível verificar o majorante dos termos adicionados e subtraídos em (72), de modo que:

$$\frac{1}{a^2}w^2(D,t) + \frac{1}{a^2}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) \geq \frac{2}{a^2} \left| w(D,t)e^{-kD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) \right|, \quad (73)$$

e

$$\begin{aligned} &\frac{2\sqrt{D}}{a^2} \left( w^2(D,t) + \int_0^D w^2(\sigma,t)d\sigma \right) \\ &\geq \frac{2}{a^2} \left| w(D,t)\int_0^D e^{-k(D-\sigma)}w(\sigma,t)d\sigma \right|. \end{aligned} \quad (74)$$

Analisando  $\Upsilon(D,t)$ , pelos limitantes inferiores, tem-se

$$\begin{aligned} \Upsilon(D,t) &\geq c\left(\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} - \gamma\right]\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + (2\omega_r - \tilde{\gamma})\tilde{\Gamma}_{\text{av}}^2(t) \right. \\ &+ \left(2c^* - a(1+D) - \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{2\sqrt{D}}{a^2}\right)w^2(D,t) \\ &+ au_{\text{av}}^2(0,t) + \left[\frac{a}{2} - \frac{2\sqrt{D}}{a^2}\right]\int_0^D w^2(\sigma,t)d\sigma \\ &+ \frac{2}{a^2}w(D,t)e^{-kD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \frac{2}{a^2} \left| w(D,t)e^{-kD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) \right| \\ &+ \frac{2}{a^2}w(D,t)\int_0^D e^{-k(D-\sigma)}w(\sigma,t)d\sigma \\ &\left. + \frac{2}{a^2} \left| w(D,t)\int_0^D e^{-k(D-\sigma)}w(\sigma,t)d\sigma \right| \right). \end{aligned} \quad (75)$$

Logo, para garantir  $\Upsilon(D,t) \geq 0$  é necessário seguir as seguintes condições:

**1ª Condição:**

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} - \gamma > 0$$

$$\gamma < \frac{a-1}{a^2}$$

**2ª Condição:**

$$2\omega_r - \bar{\gamma} > 0$$

$$\bar{\gamma} < 2\omega_r$$

**3ª Condição:** Sabendo que  $c = 2c^*$

$$2c^* - a(1+D) - \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{2\sqrt{D}}{a^2} > 0$$

$$c > a(1+D) + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2\sqrt{D}}{a^2}$$

**4ª Condição:**

$$\frac{a}{2} - \frac{2\sqrt{D}}{a^2} > 0$$

$$a > \sqrt[3]{4\sqrt{D}}$$

Assim sendo, então  $\mathcal{L}(t)$  dado em (72) e  $\Upsilon(D, t)$  dado em (71), perante as condições impostas para  $\gamma, \bar{\gamma}, a$  e  $c$ , pode-se afirmar que  $\Upsilon(D, t) \geq 0$ , logo:

$$\mathcal{L}(t) \geq c \left( \frac{1}{2} k \bar{\vartheta}_{av}^2(t) + \frac{\bar{\Gamma}_{av}^2(t)}{2} + \frac{a}{2} \int_0^D w^2(x, t) dx + (c - 2c^*) w^2(D, t) \right),$$

com  $\gamma = k/2$  and  $\bar{\gamma} = 1/2$ . Ou seja,  $\mathcal{L}(t) \geq \mu \Psi(t)^2$  pela mesma razão que mantém a condição vista em (61), completando a prova da otimalidade inversa.  $\square$

**Teorema 2.** *Existe  $c^* > 0$  tal que,  $\forall c \geq c^*, \exists \omega^*(c) > 0$  em que,  $\forall \omega > \omega^*$ , o sistema atrasado em malha fechada (5) e (22), com  $z(t)$  em (11),  $G(t)$  em (6),  $\Gamma(t)$  em (12) e estado  $\tilde{\Gamma}(t), \tilde{\theta}(t-D), U(\sigma), \forall \sigma \in [t-D, t]$ , tem uma solução periódica localmente exponencialmente estável em  $t$  de período  $\Pi = 2\pi/\omega$ , denotada por  $\tilde{\Gamma}^\Pi(t), \tilde{\theta}^\Pi(t-D), U^\Pi(\sigma), \forall \sigma \in [t-D, t]$ , satisfazendo,  $\forall t \geq 0$ :*

$$\left( |\tilde{\Gamma}^\Pi(t)|^2 + |\tilde{\theta}^\Pi(t-D)|^2 + [U^\Pi(t)]^2 + \int_{t-D}^t [U^\Pi(\tau)]^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \mathcal{O}(1/\omega). \quad (77)$$

Além do mais,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega), \quad (78)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(a^2 + 1/\omega^2). \quad (79)$$

A prova do Teorema 2, pode ser obtida através dos passos 7 e 8 do Teorema 1 em (Oliveira and Krstić, 2015).

#### 4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Buscando avaliar a otimalidade inversa no controle extremal do tipo Newton na preseça de atrasos, o seguinte mapa estático é considerado

$$Q(\theta) = 5 - 0.1(\theta - 2)^2, \quad (80)$$

com a saída atrasada em  $D = 5$  s. De acordo com (80), o ponto extremo é  $(\theta^*, y^*) = (2, 5)$  e a Hessiana do mapa é  $H = -0.2$ .

O pólo do filtro passa-baixa do predito (22),  $c = 40$  foi calculado levando em consideração as condições impostas para  $\gamma, c$  e  $a$ , presentes no Passo 7. O sinal mensurável  $z$  é dado por (11) com  $G$  em (6) e  $\Gamma$  em (12). Os parâmetros utilizados na simulação foram:  $a = 0.2, \omega = 10, k = 0.2, \theta(0) = -5, \Gamma(0) = -1$  e  $\omega_r = 0.1$ .

Com o intuito de comparar os dois projetos, um garantindo a otimalidade inversa e o outro não, a Figura 2 apresenta essa diferenciação. Fica claro que no projeto em que se garantiu a otimalidade inversa (curvas em azul), a convergência ocorre de maneira mais uniforme, livre de sobrepessos e oscilações, além de um sinal de controle com amplitudes menores.

#### 5. CONCLUSÕES

Uma nova estratégia de realimentação via preditor baseado em perturbações e estimativa da inversa da Hessiana por um filtro de Riccati é introduzida para lidar com atrasos na entrada e/ou saída na malha de controle extremal através do método de Newton. A abordagem resultante preserva a estabilidade exponencial e a convergência da saída do sistema a uma pequena vizinhança do ponto extremo, mesmo na presença de atrasos. Uma demonstração rigorosa é dada explorando a transformação *backstepping* e o teorema da média em dimensões infinitas. A taxa de convergência pelo método de Newton é independente da Hessiana, sendo atribuída de maneira arbitrária pelo projetista. Uma melhora significativa no desempenho do sistema em malha fechada pôde ser observada com a propriedade da otimalidade inversa, comprovando os resultados teóricos. As simulações corroboram para ilustrar uma considerável diminuição do esforço de controle e uma busca mais suave do ponto de extremo, eliminando-se sobrepessos e oscilações nas respostas dos sinais de entrada-saída da planta. Embora apenas o caso com atrasos tenha sido considerado ao longo deste artigo, a otimalidade inversa também pode ser garantida em sistemas cujas plantas não possuem atrasos.

#### REFERÊNCIAS

- Adetola, V. and Guay, M. (2007). Guaranteed parameter convergence for extremum-seeking control of nonlinear systems. *Automatica*, 43, 105–110.
- Ferreira, D.C. and Oliveira, T.R. (2019). Otimalidade inversa em controle extremal com atrasos. *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Vol. 1.
- Ghaffari, A., Krstić, M., and Nesić, D. (2012). Multivariable Newton-based extremum seeking. *Automatica*, 1759–1767.
- Hale, J.K. and Lunel, S.M.V. (1990). Averaging in infinite dimensions. *Journal of Integral Equations and Applications*, 2, 463–494.
- Kalman, R.E. (1964). When is a linear control system optimal? *ASME, J. Basic Eng.*, 86, 51–61.
- Krstić, M. (2008). Lyapunov tools for predictor feedbacks for delay systems: inverse optimality and robustness to delay mismatch. *Automatica*, 44, 2930–2935.
- Krstić, M. (2009). *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhäuser.

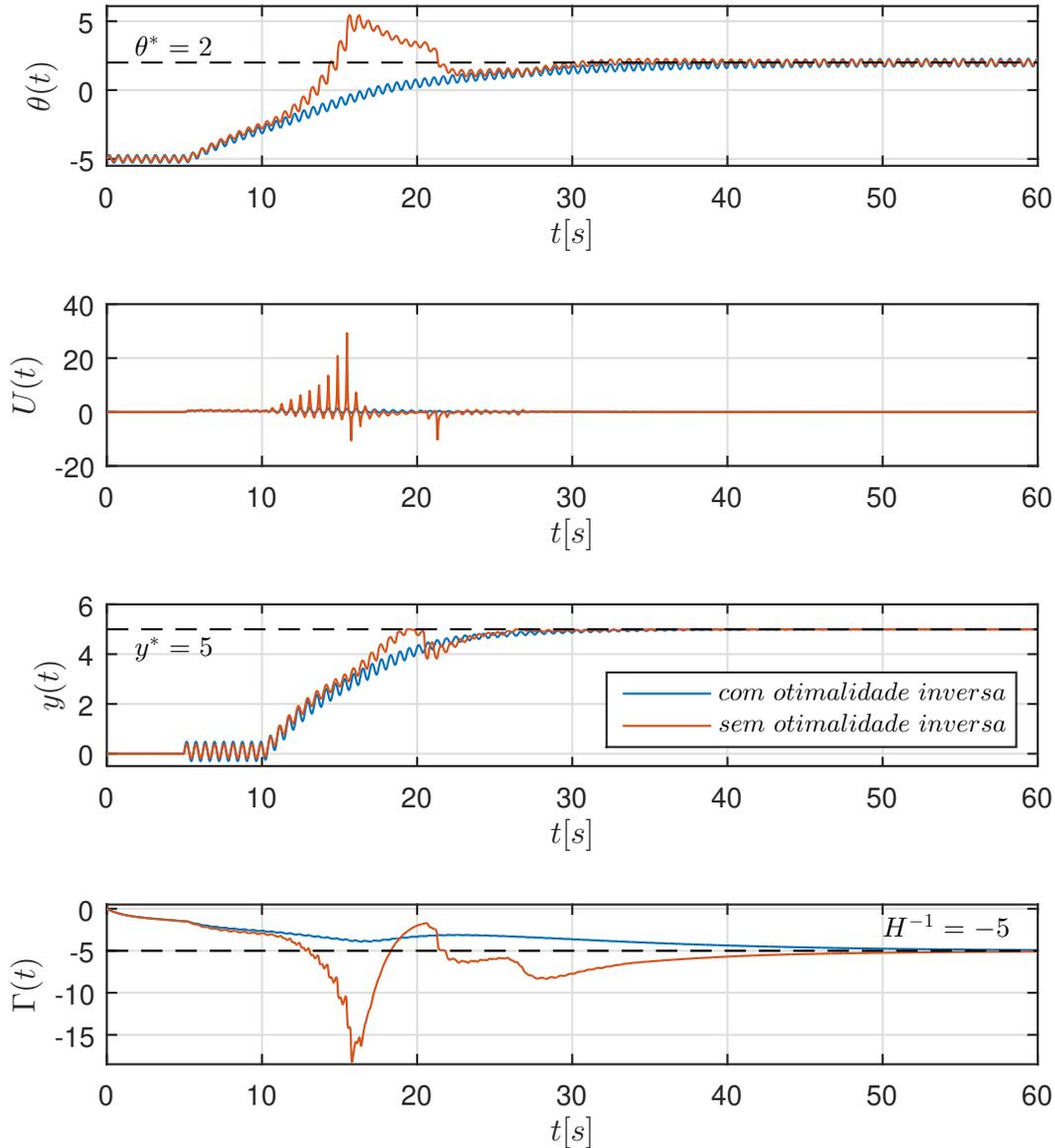


Figura 2. Controle extremal do tipo Newton com e sem otimalidade inversa: (a) parâmetro  $\theta(t)$  (sinal de entrada); (b) sinal de controle  $U(t)$ , (c) sinal de saída  $y(t)$  e sinal de  $\Gamma(t)$ .

- Krstić, M. (2014). Extremum seeking control. in T. Samad and J. Baillieul, *Encyclopedia of Systems and Control*, Springer.
- Krstic, M. and Deng, H. (1999). *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*. Springer.
- Liu, S.J. and Krstić, M. (2012). *Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking*. Springer.
- Nesić, D., Tan, Y., Moase, W., and Manzie, C. (2010). A unifying approach to extremum seeking: adaptive schemes based on the estimation of derivatives. *IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta*, 4625–4630.
- Oliveira, T.R., Hsu, L., and Peixoto, A.J. (2011). Output-feedback global tracking for unknown control direction plants with application to extremum-seeking control. *Automatica*, 2029–2038.
- Oliveira, T.R. and Krstić, M. (2015). Newton-based extremum seeking under actuator and sensor delays. *IFAC-PapersOnLine*, 48, 304–309.
- Oliveira, T.R., Peixoto, A.J., and Hsu, L. (2012). Global real-time optimization by output-feedback extremum-seeking control with sliding modes. *Journal of The Franklin Institute*, 1397–1415.
- Smyshlyaev, A. and Krstic, M. (2004). Closed form boundary state feedbacks for a class of 1-D partial integro-differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(12), 2185–2202.
- Tan, Y., Nesić, D., Mareels, I.M.Y., and Astolfi, A. (2009). On global extremum seeking in the presence of local extrema. *Automatica*, 45, 245–251.