DOI: 10.48011/asba.v2i1.1122

Controle Extremal Estocástico Baseado no Algoritmo do Gradiente na Presença de Atrasos

Paulo Cesar Souza da Silva * **Tiago Roux Oliveira** *

* *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro – RJ, Brasil (e-mail: cesar.paulo151@hotmail.com, tiagoroux@uerj.br)*

Abstract: This paper proposes the control design and analysis for a scalar Gradient-based stochastic extremum seeking under input-output delays. A new predictor based on estimate of the unknown Hessian will be presented and incorporated in the closed-loop. Exponential stability and convergence to a small neighborhood of the unknown extremum point can be obtained. This result is rigorously reached by using backstepping transformation and averaging in infinite dimensions. A numerical example is shown to illustrate the effectiveness of the proposed predictor-based stochastic extremum seeking for time-delay compensation.

Resumo: Neste artigo, é proposto o projeto e análise do controlador extremal estocástico baseado no algoritmo do Gradiente na presença de atrasos de entrada e saída. Um novo preditor baseado na estimativa da Hessiana desconhecida será apresentado e incorporado à malha fechada. A estabilidade exponencial e convergência a uma pequena vizinhança do ponto de extremo são obtidas. Este resultado é rigorosamente alcançado utilizando a transformação *backstepping* e teoria da média em dimensões infinitas. Um exemplo numérico é apresentado para ilustrar a eficiência do controlador extremal estocástico baseado em preditor para compensação de atrasos.

Keywords: Delays; Preditor; Stochastic Extremum Seeking; Gradient Methods; Backstepping Transformation; Averaging in infinite dimensions.

Palavras-chaves: Atrasos; Preditor; Controle Extremal Estocástico; Métodos Gradientes; Transformação *Backstepping*; Teoria da Média em Dimensões Infinitas.

1. INTRODUÇÃO

O controle extremal (*Extremum Seeking Control* - ESC) pode ser definido como um método adaptativo de otimização em tempo real, que visa determinar o ponto extremo de um mapeamento não-linear (Krstic, 2009). Ainda que exista um elevado número de trabalhos e artigos detalhando o controle extremal (Krstic, 2014; Adetola and Guay, 2007; Ghaffari et al., 2012; Oliveira et al., 2011), não existe na literatura um trabalho que examine rigorosamente o desafio do problema de ESC estocástico (Liu and Krstic, 2012) baseado no algoritmo do tipo Gradiente com inserção de atrasos na entrada e saída (Oliveira et al., 2017), respectivamente.

Além disso, vale comentar que as principais vantagens do controlador extremal estocástico sobre o controlador extremal determinístico (com sinais de excitação determinísticos) são a possibilidade de escapar dos extremos locais, bem como a garantia de uma taxa de convergência mais rápida (Liu and Krstic (2012)) e que o ESC está relacionado com uma boa taxa de convergência, enquanto que os atrasos quando são inseridos em um sistema de malha fechada e simplesmente ignorados, restringem severamente a taxa de convergência do sistema como um todo ou leva o sistema à instabilidade e da literatura sabe-se que o controle extremal não é robusto à presença de atrasos (Oliveira et al., 2017), que foi o ponto de partida para a jornada de estudos do ESC determinístico com a inserção dos atrasos de entrada e/ou saída. Desse modo, o desafio aqui consiste em realizar um estudo que pesquise os algoritmos do controle extremal no meio estocástico, mais uma vez inserindo os atrasos nos sinais de entrada e saída do sistema e fazendo o uso do preditor realimentado.

Neste trabalho, encontra-se uma solução para o problema de controle extremal estocástico na presença de atrasos de entrada e saída empregando o algoritmo escalar do tipo Gradiente (Krstic, 2014; Ghaffari et al., 2012) fundamentado na proposta de realimentação por preditor com a estimativa da Hessiana, bem como a análise de estabilidade, que são alcançadas via transformação *basckstepping* (Krstic, 2009) e a teoria da média em dimensões infinitas (Hale and Lunel, 1990; Lehman, 2002). O estudo baseado na teoria da média surge devido a inevitabilidade de se estimar em tempo corrente a segunda derivada (Hessiana desconhecida) (Ghaffari et al., 2012; Nesic et al., 2010) do mapeamento não-linear a ser otimizado.

⋆ P.C.S. Silva e T.R. Oliveira agradecem CNPq, CAPES e FAPERJ pelo suporte financeiro.

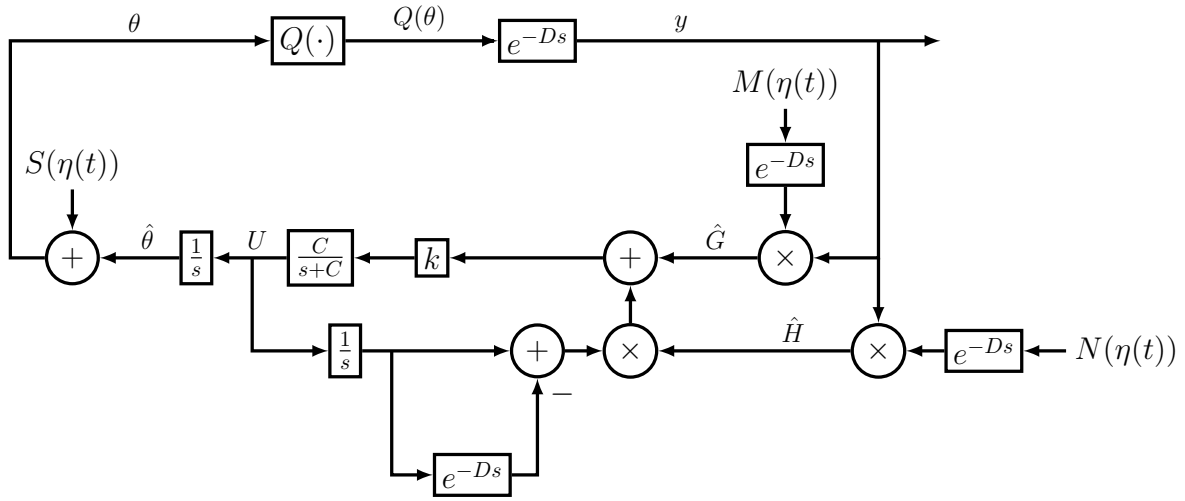

Figura 1. Diagrama de blocos do esquema de predição para compensação dos atrasos na saída por busca extremal estocástica empregando o algoritmo Gradiente. A realimentação por preditor com uma estimativa da Hessiana baseada em perturbações estocásticas e *averaging* obedece a equação (23) e os sinais de *dither* são dados por: $S(\eta(t)) = asen(\eta(t))$, $M(\eta(t)) = \frac{2}{a}sen(\eta(t))$ e sinal de demodulação $N(\eta(t)) = -\frac{8}{a^2}cos(2\eta(t))$.

Na seção 2, introduz-se o projeto do preditor para a compensação dos atrasos no ESC estocástico baseado no algoritmo do tipo Gradiente. Na seção 3, demonstra-se a estabilidade exponencial e a convergência em tempo real à uma pequena vizinhança do extremo desejado. Na seção 4, os resultados da simulação são apresentados com a finalidade de demonstrar a aplicabilidade da proposta de compensação do atraso na busca extremal estocástica. Na seção 5, o artigo é finalizado.

Notação: As derivadas parciais de $u(x,t)$ são denotadas por $u_t(x,t)$ e $u_x(x,t)$ ou, ocasionalmente, por $\partial_t u_{av}(x,t)$ e $\partial_x u_{av}(x,t)$ para se referir ao operador do sinal médio $u_{av}(x,t)$. Admitindo-se um sistema não-linear genérico $\dot{x} = f(t,x,\epsilon)$, onde $x \in R^n$, $f(t,x,\epsilon)$ é periódico em t com período T, isto é, $f(t+T,x,\epsilon) = f(t,x,\epsilon)$. Então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, é possível obter o modelo médio dado por $\dot{x} = f_{av}(x_{av})$, com $f_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x_{av}, 0)\, d\tau$, onde $x_{av}(t)$ denota a versão média do estado $x(t)$ (Khalil, 2002). Conforme definido em (Khalil, 2002), uma função vetorial $f(t,\epsilon) \in R^n$ é dita de ordem $O(\epsilon)$ dentro do intervalo $[t_1, t_2]$ se existem constantes positivas k e ϵ^* tais que $|f(t,\epsilon)| \leq k\epsilon$ $\forall \epsilon \in [0,\epsilon^*]$ e $\forall t \in [t_1, t_2]$. Por vezes, estimativas para as constantes k e ϵ^* serão fornecidas, podendo-se quantificar a correspondente aproximação $O(\epsilon)$. Caso contrário, $O(\epsilon)$ será satisfeito sendo uma ordem da relação de magnitude válida para ϵ suficientemente pequeno. A sigla EDO é usada para denotar equação diferencial ordinária, enquanto o acrônimo EDP designa equação diferencial parcial.

2. BUSCA EXTREMAL ESTOCÁSTICA COM ATRASOS

O ESC escalar apresenta aplicação na qual o objetivo é maximizar ou minimizar a saída $y \in R$ de um mapeamento estático não-linear $Q(\theta)$ desconhecido através da variação em tempo-real da entrada $\theta \in R$. Aqui, considera-se adicionalmente que existe um atraso constante e desconhecido D no caminho de atuação ou no sistema de medição, tal que a saída medida é dada por:

$$y(t) = Q(\theta(t-D)). \tag{1}$$

Para o melhor entendimento da notação, assume-se ao longo do artigo que o sistema tem apenas a saída atrasada conforme visto na Figura 1. Os resultados encontrados neste artigo podem ser diretamente estendidos ao caso de entrada atrasada, uma vez que qualquer atraso de entrada possa ser direcionado para a saída do mapeamento estático. O caso no qual os atrasos de entrada D_{in} e de saída D_{out} ocorrem simultaneamente também pode ser tratado assumindo-se que o atraso total a ser neutralizado seja $D = D_{in} + D_{out}$, com D_{in} , $D_{out} \geq 0$. Sem perda de generalidade, assume-se o problema de busca pelo máximo de tal forma que o valor de θ que maximiza y é denotado por θ^*. Por simplicidade, considera-se que o mapeamento *escalar não-linear quadrático* é da forma:

$$Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2, \tag{2}$$

que além das constantes $\theta \in R$ e $y \in R$ serem desconhecidas, o escalar desconhecido $H < 0$ é a Hessiana do mapeamento estático.

Na Figura 1, exemplifica-se a versão escalar para o controle por busca extremal estocástica baseado no algoritmo do Gradiente empregando a realimentação por preditor para a compensação dos atrasos.

2.1 Sinais do Sistema

Substituindo-se (2) em (1), obtém-se o mapeamento quadrático e estático com atraso de interesse:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\theta(t-D) - \theta^*)^2. \tag{3}$$

Seja $\hat{\theta}$ a estimativa de θ^* e

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^* \tag{4}$$

o erro de estimativa. Da Figura 1, tem-se que $\dot{\hat{\theta}}(t) = U(t)$ e conclui-se que a dinâmica do erro pode ser escrita da seguinte maneira (atrasando-se em D ambos os lados da equação resultante):

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = U(t-D)\,. \tag{5}$$

Além disso, tem-se

$$G(t) = M(\eta(t))y(t)\ ,\ \ \theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(\eta(t)), \tag{6}$$

em que os sinais de perturbação senoidais (chamados de sinais de *dither*) são dados por:

$$S(\eta(t)) = asen(\eta(t))\ ,\ \ M(\eta(t)) = \frac{2}{a}sen(\eta(t)), \tag{7}$$

com amplitude a e frequência ω não-nulas. Perturbações senoidais estocásticas são empregadas via processo de Wiener sobre o limite de um círculo (Liu and Krstic, 2012; Mills and Krstic, 2018),

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a\ sen(\eta(t))\ , \tag{8}$$

no qual

$$\eta(t) = \omega\pi(1 + sen(W_{\omega t})) \tag{9}$$

representa um processo de Markov homogeneamente ergódico e utilizando-se o calculo estocastico baseado em Ito (Liu and Krstic, 2012), obtém-se:

$$d\eta = -\omega\frac{\pi}{2}sen(W_{\omega t})dt + \omega\pi cos(W_{\omega t})dW_{\omega t}\,. \tag{10}$$

Uma vez que o atraso na saída pode ser transferido para a saída do integrador com a finalidade de análise ou equivalentemente para a entrada do sistema então, o deslocamento de fase D é aplicado para compensar o efeito do atraso no sinal de dither. A estimativa da Hessiana H desconhecida é

$$\hat{H}(t) = N(\eta(t))y(t), \tag{11}$$

cujo sinal de demodulação é dado por:

$$N(\eta(t)) = -\frac{8}{a^2}cos(2\eta(t)). \tag{12}$$

Em (Ghaffari et al., 2012; Liu and Krstic, 2012), foi provado que

$$\frac{1}{\Pi}\int_0^{\Pi} N(\sigma)yd\sigma = H, \quad \Pi = 2\pi/\omega, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\Pi}\int_0^{\Pi} M(\sigma)yd\sigma = H\tilde{\theta}_{av}, \quad \Pi = 2\pi/\omega, \tag{14}$$

se um mapeamento quadrático como em (2) é considerado. Assim sendo, a versão média de $H(t)$ é dada por $\hat{H}_{av}(t) = (Ny)_{av}(t) = H$ e $G_{av}(t) = H\tilde{\theta}_{av}$.

2.2 Realimentação por preditor com estimativa da Hessiana

Utilizando a análise média, verifica-se que a versão média do sinal $G(t)$ em (6) é dada por:

$$G_{av} = H\tilde{\theta}_{av}(t-D). \tag{15}$$

De (5), os seguintes modelos médios podem ser obtidos

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t) = U_{av}(t-D), \tag{16}$$

$$\dot{G}_{av} = HU_{av}(t-D), \tag{17}$$

em que $U_{av} \in R$ é o controle médio resultante para $U \in R$.

Com o intuito de motivação do projeto de controle por preditor, a ideia consiste em compensar o atraso pela realimentação do estado futuro $G(t+D)$ ou $G_{av}(t+D)$ no sistema médio equivalente. Dado qualquer ganho de estabilização $k > 0$ para o sistema não atrasado, deseja-se ter uma lei de controle da seguinte maneira

$$U_{av}(t) = kG_{av}(t+D),\ \ \forall t \geq 0, \tag{18}$$

o que parece ser não implementável, pois exige valores futuros do estado. No entando, aplicando a fórmula da variação das constantes para (16) e (17), expressa-se o estado futuro como:

$$G_{av}(t+D) = G_{av}(t) + H\int_{t-D}^{t} U_{av}(\sigma)d\sigma, \tag{19}$$

que fornece o estado futuro $G_{av}(t+D)$ em termos do sinal de controle médio $U_{av}(\sigma)$ da janela causal de tempo $[t-D, t]$. Isso produz (vide Figura 1) a seguinte lei de realimentação:

$$U_{av}(t) = k\left[G_{av}(t) + H\int_{t-D}^{t} U_{av}(\sigma)d\sigma\right]. \tag{20}$$

Portanto, a partir de (19) e (20), a lei de realimentação média (18) pode ser obtida realmente como desejada. Consequentemente,

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t) = kG_{av}(t+D),\ \ \forall t \geq 0. \tag{21}$$

Dessa maneira, a partir de (15), chega-se a:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}(t)}{dt} = kH\tilde{\theta}_{av}(t),\ \ \forall t \geq D, \tag{22}$$

com um equilíbrio $\tilde{\theta}^e_{av} = 0$ exponencialmente atrativo, uma vez que $k > 0$ no projeto de controle e $H < 0$ por hipótese.

No próximo tópico, mostra-se que os objetivos de controle podem ainda ser alcançados se uma modificação simples, que utiliza um filtro passa-baixas, é aplicada ao controlador baseado em preditor. Neste caso, propõe-se a seguinte versão filtrada do preditor de dimensão infinita para a compensação do atraso (Krstic, 2008):

$$U(t) = \frac{c}{s+c}\left\{k\left[G(t) + \hat{H}(t)\int_{t-D}^{t} U(\tau)d\tau\right]\right\}, \quad (23)$$

onde $c > 0$ é suficientemente grande. A versão média do sinal (23) é um filtrado de (20). Esta filtragem passa-baixas é particularmente necessária na análise de estabilidade quando o teorema da média em dimensões infinitas (Hale and Lunel, 1990; Lehman, 2002) é invocado, já que não existe resultados de teorema da méia para sistemas com atrasos na saída/entrada. Dessa maneira, manipula-se matematicamente o sistema, inserindo o filtro e transformando atrasos de saída em atrasos distribuídos no estado, assim como a variável de controle $U(t)$ passa a ser vista como uma variável de estado do sistema em malha fechada. Note que na equação (23), utiliza-se uma notação mista tempo-frequência com o domínio do tempo representado pela variável t e o domínio da transformada de Laplace pela variável s.

A realimentação por preditor é baseada em perturbação porque $\hat{H}$ é atualizado de acordo com a estimativa da média (11) da Hessiana H, satisfazendo a propriedade (13).

3. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

O principal resultado de estabilidade/convergência para o sistema em malha fechada é dado a seguir. Os operadores $\mathbf{E}\{\cdot\}$ e $\mathbf{P}\{\cdot\}$ denotam respectivamente, o valor esperado e a probabilidade dos sinais.

Teorema 1 Considere o sistema em malha fechada da Figura 1, com saída atrasada (3). Existe $c^* > 0$ tal que, $\forall c \geq c^*$, $\exists\ \omega^*(c)$ de maneira tal que, $\forall\ \omega \geq \omega^*$, o sistema atrasado em malha fechada (5) e (23), com $G(t)$ em (6), $\hat{H}(t)$ em (11), e o estado $\tilde{\theta}(t-D), U(\sigma), \forall\sigma \in [t-D, t]$, tem uma única solução periódica exponencialmente estável em t de período $\Pi = 2\pi/\omega$, denotada por $\tilde{\theta}^{\Pi}(t-D)$, $U^{\Pi}(\sigma)$, $\forall\sigma \in [t-D, t]$, satisfazendo $\forall t \geq 0$:

$$\mathbf{E}\left\{|\tilde{\theta}^{\Pi}(t-D)|^2 + [U^{\Pi}(t)]^2 + \int_{t-D}^{t}\left[U^{\Pi}(\tau)\right]^2 d\tau\right\}^{1/2} \leq O(1/\omega). \quad (24)$$

Além disso,

$$\lim_{(1/\omega)\to 0}\mathbf{P}\left\{\lim_{t\to\infty} sup\,|\theta(t) - \theta^*|\right\} = O(a + 1/\omega), \quad (25)$$

$$\lim_{(1/\omega)\to 0}\mathbf{P}\left\{\lim_{t\to\infty} sup\,|y(t) - y^*|\right\} = O(a^2 + 1/\omega^2). \quad (26)$$

A demonstração do **Teorema 1** segue os passos detalhados nas seções a seguir.

3.1 Sistema Médio EDO-EDP

De acordo com (Krstic, 2009), o atraso em (5) pode ser representado empregando uma EDP de transporte como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = u(0,t)\ , \quad (27)$$

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x u(x,t), \quad x \in [0, D]\ , \quad (28)$$

$$u(D,t) = U(t)\ . \quad (29)$$

onde a solução de (28)-(29) é

$$u(x,t) = U(t + x - D)\ , \quad (30)$$

no qual t é o tempo, D é o atraso e x o estado que permite a representação do sistema EDO-EDP acima.

3.2 Sistema em Malha Fechada

Representando o integrando em (23) usando o estado da equação de transporte, tem-se

$$U(t) = \frac{c}{s+c}\left\{k\left[G(t) + \hat{H}\int_{0}^{D} u(\sigma,t)d\sigma\right]\right\} \quad (31)$$

$$G(t) = \frac{2}{a}sen(\eta(t-D))y(t), \quad (32)$$

$$\hat{H}(t) = -\frac{8}{a^2}cos(2\eta(t))y(t). \quad (33)$$

Finalmente, substituindo (31) em (29), pode-se reescrever (27)-(29) como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = u(0,t)\ , \quad (34)$$

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x\ u(x,t)\ , \quad x \in [0, D]\ , \quad (35)$$

$$u(D,t) = \frac{c}{s+c}\left\{k\left[M(t)y(t) + N(y)y(t)\int_{0}^{D} u(\sigma,t)d\sigma\right]\right\}, \quad (36)$$

3.3 Modelo Médio do Sistema em Malha Fechada

De maneira semelhante ao cálculo realizado em (Ghaffari et al., 2012), as duas seguintes propriedades de média podem ser obtidas caso um mapeamento quadrático como em (31) seja considerado:

$$\frac{1}{\Pi}\int_{0}^{\Pi} M(\lambda)yd\lambda = H\tilde{\theta}_{av}(t-D) \quad (37)$$

e

$$\frac{1}{\Pi}\int_0^{\Pi} N(\lambda)y\bar{u}d\lambda = H\int_0^{D} u_{av}(\sigma,t)d\sigma, \tag{38}$$

onde $\bar{u}(t) = \int_0^D u(\sigma,t)d\sigma$, enquanto que $\tilde{\theta}_{av}(t-D)$ e $u_{av}(\sigma,t)$ indicam as versões médias de $\tilde{\theta}(t-D)$ e $u(\sigma,t)$ respectivamente.

Agora, denotando-se

$$\tilde{\vartheta}(t) = \tilde{\theta}(t-D) \tag{39}$$

e usando (23), a versão média do sistema (34)-(36) é

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{av}(t) = u_{av}(0,t), \tag{40}$$

$$\partial_t u_{av}(x,t) = \partial_x\, u_{av}(x,t)\ , \quad x\in[0,D]\ , \tag{41}$$

$$\frac{d}{dt}u_{av}(D,t) = -cu_{av}(D,t)+ckH\left[\tilde{\vartheta}_{av}(t)+\int_0^D u_{av}(\sigma,t)d\sigma\right] \tag{42}$$

onde o filtro $c/s+c$ também foi representado na forma de espaço de estado. A solução da EDP de transporte (41)-(42) é dada por

$$u_{av}(x,t) = U_{av}(t+x-D)\ . \tag{43}$$

3.4 Transformação Backstepping, sua Inversa e o Sistema Alvo

Considera-se a seguinte transformação *backstepping* de dimensão infinita do estado atrasado

$$w(x,t) = u_{av}(x,t)-kH\left[\tilde{\vartheta}_{av}(t)+\int_0^x u_{av}(\sigma,t)d\sigma\right]\ , \tag{44}$$

que mapeia o sistema linearizado (34)-(36) em

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{av}(t) = kH\tilde{\vartheta}_{av}(t)+w(0,t)\ , \tag{45}$$

$$\partial_t w(x,t) = \partial_x\, w(x,t)\ , \quad x\in[0,D]\ , \tag{46}$$

$$\partial_t u_{av}(D,t) = -cw(D,t)\ . \tag{47}$$

Empregando (34), deriva-se parcialmente o estado transformado $w(x,t)$ em (44) em relação ao tempo t e considera-se $x=D$ tal que

$$\partial_t w(D,t) = \partial_t u_{av}(D,t)-kHu_{av}(D,t). \tag{48}$$

Além disso, considere a transformação inversa (44)

$$u_{av}(x,t) = w(x,t)+kH\left[e^{kHx}\tilde{\vartheta}_{av}+\int_0^x e^{kH(x-\sigma)}w(\sigma,t)d\sigma\right]. \tag{49}$$

Substituindo-se (47) e (49) em (48)

$$\begin{aligned}\partial_t w(D,t) &= -cw(D,t)-kHw(D,t)\\ &-(kH)^2\left[e^{kHD}\tilde{\vartheta}_{av}(t)+\int_0^D e^{kH(D-\sigma)}w(\sigma,t)d\sigma\right].\end{aligned} \tag{50}$$

3.5 Funcional de Lyapunov

Dado o seguinte funcional de Lyapunov

$$V(t) = \frac{(\tilde{\vartheta}_{av}(t))^2}{2}+\frac{b}{2}\int_0^D(1+x)w^2(x,t)dx+\frac{1}{2}w^2(D,t)\ , \tag{51}$$

cujo parâmetro $b>0$. Relembrando que $k>0$, $H<0$ e $c>0$ suficientemente grande, escolhe-se

$$b = -\frac{1}{kH}. \tag{52}$$

Mostra-se que

$$\dot{V}(t)\le -\mu V(t) \tag{53}$$

para algum $\mu>0$ apropriado. Portanto, O sistema em malha fechada é exponencialmente estável no sentido de norma completa do estado:

$$\sqrt{|\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2+w^2(D,t)+\int_0^D w^2(x,t)dx}\ , \tag{54}$$

i.e., na variável transformada $(\tilde{\vartheta}_{av},\omega)$.

3.6 Estabilidade Exponencial do Sistema Médio

Para obter a estabilidade exponencial no sentido de norma

$$\sqrt{|\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2+u_{av}^2(D,t)+\int_0^D u_{av}^2(x,t)dx}\ , \tag{55}$$

precisa-se demonstrar que

$$\alpha_1\Psi(t)\le V(t)\le\alpha_2\Psi(t), \tag{56}$$

para α_1 e α_2 sendo numeros positivos apropriados e

$$\Psi(t) := |\tilde{\theta}_{av}(t-D)|^2+U_{av}^2(t)+\int_{t-D}^t(U_{av}(\tau))^2d\tau. \tag{57}$$

Isso é realizado utilizando uma abordagem similar àquela em (Krstic, 2009, Theorem 1). Assim, obtém-se:

$$\Psi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{-\mu t} \Psi(0) \ , \tag{58}$$

que completa a prova da estabilidade exponencial para o sistema médio nas variáveis originais $(\tilde{\theta}_{av}(t-D), u_{av}(x,t))$.

3.7 Invocando o Teorema da Média

Reescrevendo as equações (5) e (23), o sistema em malha fechada é obtido como:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = U(t-D) \, , \tag{59}$$

$$\dot{U}(t) = -cU(t) + c\left\{ k \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D}^{t} U(\tau) d\tau \right] \right\}, \tag{60}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t-D) \\ U(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -cU(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kU(t-D) \\ ckG(t) + ck\hat{H}(t) \int_{t-D}^{t} U(\tau) d(\tau) \end{bmatrix} . \tag{61}$$

no qual $z^{\epsilon}(t) = [\tilde{\theta}(t-D), U(t)]^T$ é o vetor de estado. Definindo da seguinte forma:

$$\mathbf{z}^{\epsilon}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t-D) \\ U(t) \end{bmatrix} \ , \tag{62}$$

que geralmente permite expressar (61) na forma de uma equação diferencial funcional estocástica tridimensional

$$\frac{d}{dt}\mathbf{z}^{\epsilon}(t) = G(\mathbf{z}_t^{\epsilon}) + \epsilon F(t, \mathbf{z}_t^{\epsilon}, \eta(t), \epsilon), \tag{63}$$

da qual $\epsilon := 1/\omega$. Portanto, uma vez que $\eta(t)$ é um processo de Markov homogeamente ergódico (assumindo valores no espaço de fase Y) com medida invariante $\mu(d\eta)$ e propriedade de ergodicidade exponencial, $\mathbf{z}_t^{\epsilon}(\delta) = \mathbf{z}^{\epsilon}(t+\delta)$ para $-D \leq \delta \leq 0$ e $G : \mathbf{C}_3([-D,0]) \to R^3$, bem como a função Lipschitz $F : R_+ \times \mathbf{C}_3([-D,0]) \times Y \times [0,1] \to R^3$ com $F(t,\ 0,\ \eta,\ \epsilon) = 0$ são mapeamentos contínuos e $\mathbf{C}_3([-D,0])$ denotando a classe de funções vetoriais contínuas de dimensão 3 no intervalo $[-D,0]$, pode-se aplicar o teorema da média de (Katafygiotis and Tsarkov, 1999) para concluir o resultado exponencial de p-estabilidade (com p=2) do sistema aleatório inicial considerando ϵ suficientemente pequeno e obter assim a desigualdade (24).

3.8 Convergência Assintótica para um Resíduo

Define-se o tempo de parada (Liu and Krstic, 2010):

$$\tau_{\epsilon}^{\Delta(\epsilon)} := inf \left\{ t \geq 0 : |\mathbf{z}^{\epsilon}(t)| > M|\mathbf{z}^{\epsilon}(0)|e^{-\lambda t} + O(\epsilon) \right\} . \tag{64}$$

Além disso, aparecem as cosntantes da seguinte forma: $M > 0$, $\lambda > 0$ e a função $T(\epsilon) : (0,1) \to N$.

Como a primeira vez em que a norma do vetor de erro deixa de satisfazer a propriedade de decaimento exponencial. A norma do vetor erro $|\mathbf{z}^{\epsilon}(t)|$ converge para um valor menor do que o valor residual $\Delta(\epsilon) = O(\epsilon)$. Trata-se de uma convergência exponencial e rápida, que pode se dar de duas formas: *almost surely (a.s.)* e *in probability*:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \inf\{t \geq 0 : |\mathbf{z}^{\epsilon}(t)| > M|\mathbf{z}^{\epsilon}(0)|e^{-\lambda t} + \Delta\} = \infty, \text{a.s.}, \tag{65}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathbf{P}\{|\mathbf{z}^{\epsilon}(t)| \leq M|\mathbf{z}^{\epsilon}(0)|e^{-\lambda t} + \Delta \, , \forall t \in [0, T(\epsilon)]\} = 1, \tag{66}$$

com $\lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{T}(\epsilon) = \infty$. De (65) fica claro que $\tau_{\epsilon}^{\Delta(\epsilon)}$ se aproxima de infinito à medida que ϵ tende a zero. De forma similar, em (66) a função determinística $T(\epsilon)$ tende a infinito à medida que ϵ vai a zero. Segue de (65) e (66) que a convergência exponencial é satisfeita dentro de um intervalo de tempo arbitrariamente longo. Qualquer componente do vetor erro converge para um valor menor que $\Delta(\epsilon) = O(\epsilon)$, particularmente o componente $\tilde{\theta}(t)$. Então, pode-se dizer que $\lim_{\epsilon \to 0} \mathbf{P}\left\{ \lim\sup_{t \to \infty} |\tilde{\theta}(t)| \right\} = O(\epsilon)$. A partir das equações (4) e (8), chega-se a

$$\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + a \, \mathrm{sen}(\eta(t)) \ . \tag{67}$$

Uma vez que o primeiro termo no lado direito de (67) é da ordem de $O(\epsilon)$ e o segundo termo é da ordem de $O(a)$, chega-se à equação (25). Finalmente, a partir de (3) e (25), obtém-se (26).

4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Com o objetivo de avaliar a compensação do atraso no ESC estocástico, considera-se o seguinte mapeamento estático

$$Q(\theta) = 5 + \frac{H}{2}(\theta - 2)^2, \tag{68}$$

aplicando-se uma saída atrasada de $D = 170s$. A partir de (68), o ponto de extremo é (θ^*, y^*) e a Hessiana do mapeamento é $H = -1/2$. As simulações numéricas do preditor (23) são apresentadas, onde $\hat{H}$ é dado em (11) e $C = 20$. Os testes foram realizados empregando os seguintes valores: $a = 0.22$, $Q^* = 5$, $\theta^* = 2$ e $k = 0.8$. Para as simulações do algoritmo do Gradiente sem atrasos, com atrasos sem compensação via preditor e com atrasos com compensação via preditor, foram utilizadas condições iniciais $\theta(0) = 0.1$.

Pela Figura 2, confere-se a preservação da estabilidade do sistema em malha fechada e a convergência da entrada da planta para a vizinhança do valor ótimo $\theta^* = 2$.

Pela Figura 3, verifica-se o que foi demonstrado na literatura que o controle extremal não é robusto na presença de atrasos de entrada ou saída, levando o sistema em malha fechada à instabilidade.

Através da Figura 4, observa-se que o atraso total inserido foi devidamente compensado pelo preditor, a estabilidade do sistema em malha fechada foi completamente preservada ao longo do tempo e a saída da planta convergiu para a vizinhança do valor desejado $y^* = 5$.

Na Figura 5, constata-se uma vez mais a estabilidade do sistema em malha fecahada e a estimativa da Hessiana convergindo para o valor desejado $H = -1/2$.

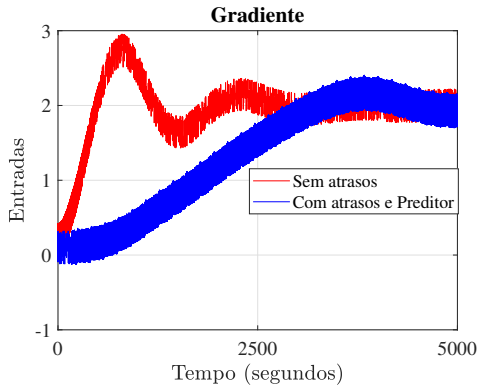

Figura 2. Entradas do Algoritmo Gradiente estocástico.

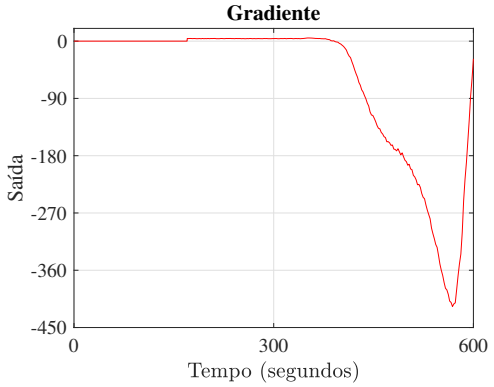

Figura 3. Algoritmo Gradiente estocástico com inserção de atraso de $D = 170s$, mas sem compensação via preditor.

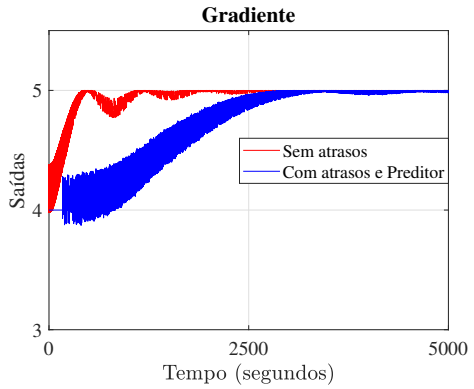

Figura 4. Saídas do algoritmo Gradiente sem atraso e na presença de atraso de $D = 170s$, com compensação via preditor.

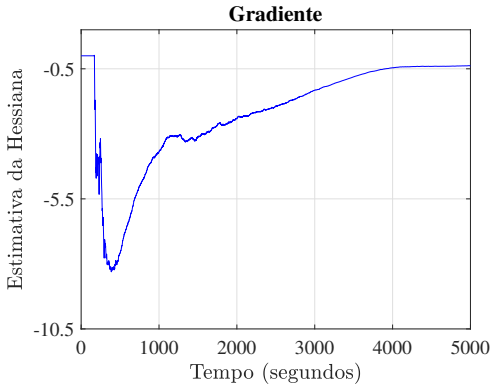

Figura 5. Estimativa da Hessiana convergindo para a vizinhança do valor desejado $H = -1/2$.

5. CONCLUSÃO

Neste artigo, foi proposta uma nova estratégia de realimentação via preditor com estimativa da Hessiana baseada em perturbações estocásticas, que é apresentada para lidar com os atrasos na entrada e/ou saída da malha de controle extremal estocástico, utilizando-se o algoritmo Gradiente. A nova abordagem preserva a estabilidade exponencial e a convergência da saída do sistema à uma pequena vizinhança do ponto de extremo, mesmo na presença de atrasos. Realizou-se uma rigorosa demonstração de estabilidade via transformação *backstepping* e teorema da média em dimensões infinitas. Os resultados numéricos mostram os desafios e vantagens de lidar com a inserção dos atrasos no sistema e a posterior implementação do preditor no algoritmo do Gradiente para a compensação dos atrasos.

REFERÊNCIAS

Adetola, V. and Guay, M. (2007). Guaranteed parameter convergence for extremum-seeking control of nonlinear systems. *Automatica*, 43, 105–110.

Ghaffari, A., Krstic, M., and Nesic, D. (2012). Multivariable newton-based extremum seeking. *Automatica*, 48, 1759–1767.

Hale, J.K. and Lunel, S.M.V. (1990). Averaging in infinite dimensions. *Journal of Integral Equations and Applications*, 2, 463–494.

Katafygiotis, L. and Tsarkov, Y. (1999). Averaging and stability of quasilinear functional differential equations with markov parameters. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 12, 1–15.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Englewood Cliffs: Prentcie-Hall.

Krstic, M. (2008). Lyapunov tools for predictor feedback for delays systems: Inverse optimality and robustness to delays mismatch. *Automatica*, 44, 2930–2935.

Krstic, M. (2009). *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptative, and PDE Systems*. Birkhauser.

Krstic, M. (2014). *Extremum Seeking Control, in T.Samad and J. Baillieul, Encyclopedia of Systems and Control*. Springer.

Lehman, B. (2002). The influence of delays when averaging slow and fast oscilations systems: Overview. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 19, 201–215.

Liu, S.J. and Krstic, M. (2010). Stochastic averaging in continuous time and its applications in to extremum seeking. *IEEE Trans. Autom. Control*, 55, 2235–2250.

Liu, S.J. and Krstic, M. (2012). *Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking*. springer.

Mills, G. and Krstic, M. (2018). Maximizing map sensitivity and higher derivatives via extremum seeking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63, 3237–3247.

Nesic, D., Tan, Y., and Manzie, C. (2010). A unifying approach to extremum seeking: adaptive schemes based on the estimation of derivatives. *IEEE conference on Decision and Control*.

Oliveira, T.R., Hsu, L., and Peixoto, A.J. (2011). Output-feedback global tracking for unknown control direction plants with applications to extremum-seeking control. *Automatica*, 47, 2029–2038.

Oliveira, T.R., Krstic, M., and Tsubakino, D. (2017). Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62, 1911–1926.