

# Controle Vetorial Unitário Adaptativo via Funções de Barreira e Monitoração \*

Victor Hugo Pereira Rodrigues\* Liu Hsu\*  
Tiago Roux Oliveira\*\* Leonid Fridman\*\*\*

\* *Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ),  
Rio de Janeiro, RJ 21941-972, Brasil  
(e-mail: rodrigues.vhp@gmail.com and liu@coep.ufrj.br)*

\*\* *Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ),  
Rio de Janeiro, RJ 20550-900, Brasil  
(e-mail: tiagoroux@uerj.br)*

\*\*\* *Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM),  
Ciudad de México, CDMX 04510, México  
(e-mail: lfridman@unam.mx)*

---

**Abstract:** This paper proposes a new adaptive unit vector control approach via output feedback for a class of multivariable nonlinear systems. The sliding-mode based controller can deal with parametric uncertainties and bounded matched and unmatched disturbances with unknown upper bounds. Finite-time convergence of the tracking error to a predefined neighborhood of the origin of the closed-loop system is proved with guaranteed transient performance. Basically, the novelty of our result lies on combining two important adaptation tools: monitoring and barrier functions. The adaptation process is divided into two stages, where an appropriate monitoring function allows for the specification of performance criteria during the transient phase, including finite-time convergence, while the barrier function ultimately confines the tracking error within a small residual set. Simulation results illustrate the efficacy of the proposed adaptive control strategy.

**Resumo:** Este artigo propõe uma nova abordagem para o controle vetorial unitário adaptativo via realimentação de saída para uma classe de sistemas não-lineares multivariáveis. O controlador baseado em modo deslizante pode lidar com incertezas paramétricas e perturbações casadas e/ou descasadas com limitantes superiores desconhecidos. A convergência em tempo finito do erro de rastreamento a uma vizinhança predefinida da origem do sistema em malha fechada é garantida com desempenho transitório preestabelecido. Basicamente, a novidade de nosso resultado está na combinação de duas importantes ferramentas de adaptação: funções monitoração e de barreira. O processo de adaptação é dividido em duas fases, em uma a função de monitoração permite a especificação de critérios de desempenho durante a fase transitória, inclusive com convergência em tempo finito, enquanto na outra a função de barreira limita o erro de rastreamento a um pequeno conjunto residual. Os resultados de simulação ilustram a eficiência da estratégia de controle adaptativo proposta.

*Keywords:* Output-feedback, Unit Vector Control, Monitoring Function, Barrier Function, Norm Observer and Global Tracking.

*Palavras-chaves:* Realimentação de Saída, Controle Vetorial Unitário, Função de Monitoração, Função de Barreira, Observador de Norma e Rastreamento Global.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Originalmente, a função de monitoração foi projetada para controladores a estrutura variável adaptativos baseados em modelo de referência (Hsu et al., 1997) para lidar com plantas sem um conhecimento prévio do sinal do ganho de

alta frequência (Yan et al., 2008). A função de monitoração supervisiona o erro de rastreamento, alterando o sinal de controle toda vez que os respectivos sinais se encontram. Em seguida, é demonstrado que, após um número finito de comutações, a direção do controle é corrigida e o erro de rastreamento chega a zero pelo menos exponencialmente.

Em Oliveira et al. (2017), é proposta uma abordagem adaptativa para o controlador por modo deslizante de primeira ordem, baseada em funções de monitoração para lidar com perturbações uniformemente limitadas por constantes desconhecidas. O problema de rastreamento global é resolvido com sucesso, garantindo a convergência do sinal de

---

\* O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores também agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

erro a um conjunto residual, mesmo para plantas incertas com distúrbios não-suaves. No entanto, o conjunto residual não podia ser completamente caracterizado. Esse problema foi superado em Hsu et al. (2019). Além disso, *loc. cit.*, um novo esquema de comutação é capaz de garantir tempo assentamento pré-especificado, máximo *overshoot* e erro de estado estacionário com limitante especificado, mesmo para plantas multivariáveis, incertas, e com perturbações persistentes porém limitadas.

Observa-se que o problema de rejeição a distúrbio com limitante superior desconhecido não se restringe ao modo deslizante de primeira ordem. Por exemplo, em (Shtessel et al., 2010), é proposto um controlador por modo deslizante *super-twisting* adaptável para plantas com distúrbios limitados por limitantes superiores desconhecidos. O foco de (Utkin and Poznyak, 2013) é minimizar o esforço de controle do *super-twisting* usando controle equivalente. Em (Edwards and Shtessel, 2016), os ganhos constantes do controlador *super-twisting* clássico (Levant, 1998) dão lugar a ganhos adaptativos com base em estimativa do controle equivalente, permitindo seu aumento e diminuição conforme necessário, mas, novamente, o conjunto residual não pode ser completamente caracterizado.

A função de barreira foi aplicada com sucesso a uma classe de esquemas adaptáveis baseados em modo deslizante garantindo a convergência da variável de saída para uma vizinhança predefinida da origem, com um ganho de controle que não é superestimado e sem o uso de informações sobre o limitante superior da perturbação (Obeid et al., 2018). Apesar de existirem diversas publicações envolvendo funções de barreira no processo adaptativo de controladores por modo deslizante, são consideradas apenas plantas incertas do tipo SISO e sem especificação da fase transitória.

Neste artigo, a eficácia de um novo controle vetorial unitário adaptativo (ver Baida (1997)) utilizando funções de barreira é rigorosamente demonstrada. O esquema de adaptação é dividido em duas fases: a fase de alcance e a fase residual. Na fase de alcance, a ideia é o projeto de uma função de modulação adaptativa que garanta a convergência da variável de deslizamento  $\sigma(t)$  a uma pequena vizinhança  $\varepsilon$  da origem, aplicando uma função de monitoração que possui propriedades importantes que permitem a pré-especificação de tempo de assentamento e máximo *overshoot* durante a fase de alcance da vizinhança- $\varepsilon$ . Na fase residual, com emprego das funções de barreira, o raciocínio é manter a variável de deslizamento  $\sigma(t)$  dentro da vizinhança  $\varepsilon$  da origem independentemente do limitante superior desconhecido da perturbação e sem que o ganho de controle se torne demasiadamente grande. Note-se que, na ausência de perturbações, o deslizamento ideal ocorre com  $\sigma \equiv 0$ , após um tempo finito.

As principais vantagens do controlador por modo deslizante adaptativo baseado em funções de monitoração e barreira são:

- A garantia do tempo de assentamento pré-especificado e máximo *overshoot*.
- A convergência da saída em um tempo finito pré-especificado para uma vizinhança definida da origem.

- O ganho de controle na estratégia proposta não é superestimado, mesmo para sistemas MIMO não-lineares e incertos.
- O esquema proposto não exige limitantes conhecidos tanto para as perturbações casadas como descasadas.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere a planta MIMO não-linear e incerta de forma regular

$$\dot{\eta}(t) = A_{11}\eta(t) + A_{12}\sigma(t) + d_1(\eta(t), \sigma(t), t), \quad (1)$$

$$\dot{\sigma}(t) = A_{21}\eta(t) + A_{22}\sigma(t) + d_2(\eta(t), \sigma(t), t) + B_2u, \quad (2)$$

onde o estado é definido como  $x^T(t) := [\eta^T(t), \sigma^T(t)] \in \mathbb{R}^n$ ,  $\eta(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$  sua parte não-medida,  $\sigma(t) \in \mathbb{R}^m$  é a saída e também a variável de deslizamento,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle de entrada enquanto o mapeamento  $d_1 : \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^{n-m}$  e  $d_2 : \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^m$  representam as perturbações. A variável de deslizamento pode representar um erro de estabilização ou de rastreamento (Hsu et al., 2019, Sec. 6). Além disso, as seguintes hipóteses são consideradas ao longo do artigo:

**(H1)** As matrizes  $A_{11} \in R^{(n-m) \times (n-m)}$ ,  $A_{12} \in R^{(n-m) \times m}$ ,  $A_{21} \in R^{m \times (n-m)}$ ,  $A_{22} \in R^{m \times m}$  e  $B_2 \in R^{m \times m}$  são constantes e incertas.

**(H2)** É sabido que  $A_{11}$  é Hurwitz, *i.e.*, a planta (1)–(2) é de fase mínima.

**(H3)** A norma da matriz  $A_{12}$  é majorada por uma constante conhecida  $c_{\eta\sigma}$ .

**(H4)** As perturbações  $d_1(x(t), t)$  e  $d_2(x(t), t)$  são Lipschitz em  $x$ , contínuas por partes em  $t$  e uniformemente limitadas por constantes desconhecidas  $\bar{d}_1$  e  $\bar{d}_2$ :

$$\|d_1(x, t)\| \leq \bar{d}_1 \quad \text{e} \quad \|d_2(x, t)\| \leq \bar{d}_2, \quad \forall t \geq 0.$$

**(H5)** Existe uma matriz  $S_p$  tal que a matriz de ganho de alta frequência é definida por

$$K_p := B_2 S_p$$

e  $-K_p$  é Hurwitz.

**(H6)** Apenas a saída  $\sigma(t)$  está disponível para o projeto de realimentação.

O objetivo do controle é o confinamento da variável de deslizamento  $\sigma$  em uma  $\varepsilon$ -vizinhança da origem no sentido global para todo  $t$  maior que um tempo finito  $t_s$  ( $\|\sigma(t)\| \leq \varepsilon$ ,  $\forall t \geq t_s$ ) usando apenas realimentação de saída. Para alcançá-lo, mesmo desconhecendo os limitantes superiores  $\bar{d}_1$  e  $\bar{d}_2$ , se faz necessária alguma estratégia de adaptação.

## 3. OBSERVADOR DA NORMA

O primeiro passo para iniciar o projeto de controle é superar o problema da não-medição do estado. O observador de norma é uma ferramenta importante que permite o projeto de um limitante superior para norma do estado não-medido usando apenas informações de saída. Para mais detalhes, consulte (Cunha et al., 2008). O Lema 1 demonstra como a solução de

$$\dot{\bar{\eta}}(t) = -\gamma_1 \bar{\eta}(t) + c_{\eta\sigma} \|\sigma(t)\| + \bar{d}_1, \quad (3)$$

pode majorar a norma de  $\eta(t)$  fornecida por (1) tal que

$$\|\eta(t)\| \leq |\bar{\eta}(t)| + \pi_\eta(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (4)$$

onde  $\pi_\eta(t)$  é um termo que diminui exponencialmente e depende das condições iniciais  $\eta(0)$  e  $\bar{\eta}(0)$ .

Lema 1. Considere a dinâmica  $\eta$  em (1) e suponha que as hipóteses (H1)-(H3) sejam atendidas. Então,  $\tilde{\eta}(t)$  em (3) é um observador de norma de  $\eta(t)$  satisfazendo (4).

**Prova.** Considere a seguinte função de energia

$$V_\eta(t) = \eta(t)^T \eta(t) = \|\eta(t)\|^2. \quad (5)$$

Tomando sua derivada temporal e usando (1), chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{V}_\eta(t) &= 2\eta(t)^T \dot{\eta}(t), \\ &= 2[\eta(t)^T A_{11}\eta(t) + \eta(t)^T A_{12}\sigma(t) + \eta(t)^T d_1(x(t), t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Na hipótese (H2),  $A_{11}$  é Hurwitz e, portanto, a equação (6) é delimitada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_\eta(t) &\leq 2[-\lambda_{\min}\{A_{11}\}\|\eta(t)\|^2 + \|\eta(t)\|\|A_{12}\|\|\sigma(t)\| + \\ &\quad + \|\eta(t)\|\|d_1(x(t), t)\|]. \end{aligned} \quad (7)$$

De (H3) e (H4),  $\|A_{12}\| \leq c_{\eta\sigma}$  e  $\|d_1(x(t), t)\| \leq \bar{d}_1$ , respectivamente, o que leva a

$$\begin{aligned} \dot{V}_\eta(t) &\leq 2[-\lambda_{\min}\{A_{11}\}\|\eta(t)\|^2 + \|\eta(t)\|c_{\eta\sigma}\|\sigma(t)\| + \\ &\quad + \|\eta(t)\|\bar{d}_1], \end{aligned} \quad (8)$$

e é possível reescrevê-la como

$$\dot{V}_\eta(t) \leq 2\sqrt{V_\eta}[-\lambda_{\min}\{A_{11}\}\sqrt{V_\eta} + c_{\eta\sigma}\|\sigma(t)\| + \bar{d}_1]. \quad (9)$$

Agora, é definida uma nova variável  $\tilde{\eta}(t) := \|\eta(t)\| = \sqrt{V_\eta(t)}$  cuja derivada é facilmente encontrada como  $\dot{\tilde{\eta}}(t) = \frac{\dot{V}_\eta(t)}{2\sqrt{V_\eta(t)}}$  e, portanto, majorada por

$$\dot{\tilde{\eta}}(t) \leq -\gamma_1 \tilde{\eta}(t) + c_{\eta\sigma}\|\sigma(t)\| + \bar{d}_1, \quad (10)$$

onde  $\gamma_1$  é uma constante positiva tal que  $\gamma_1 < \lambda_{\min}\{A_{11}\}$ . Então, invocando o Lema da Comparação (Khalil, 2002, pág. 102), a solução  $\tilde{\eta}(t)$  de (3) é um limitante superior para  $\eta(t)$  tal que a desigualdade (4) é satisfeita.  $\square$

Observe que, embora  $\tilde{\eta}(t)$  seja um majorante para a parte não-medida do estado  $\eta(t)$ , este não pode ser implementado, pois, pela hipótese (H5),  $\bar{d}_1$  é desconhecido. A próxima seção apresenta a função de monitoração, uma ferramenta importante que finalmente permite a implementação de um limitante superior para  $\|\eta(t)\|$  por meio de uma estimativa híbrida para a norma de  $\eta(t)$ .

#### 4. FUNÇÃO DE MONITORAÇÃO

A função de monitoração é um esquema de chaveamento que inicialmente foi desenvolvido para compensar adaptativamente a ausência de informações tal como a direção de controle (Yan et al., 2008), majorantes desconhecidos de perturbações (Oliveira et al., 2017) ou com taxa de crescimento desconhecida (Rodrigues and Oliveira, 2017). Aqui é apresentada sua versão mais recente (Hsu et al., 2019), na qual propriedades de desempenho transitório do sistema de malha fechada podem ser especificadas.

**Definição 2.** Diz-se que o erro de estabilização/rastreamento  $\sigma(t)$  satisfaz as especificações de fase residual e de alcance da mesma, se

- $\|\sigma(t)\| \leq \|\sigma(0)\| + \Delta, \forall t \in [0, T)$ ,
- $\|\sigma(t)\| \leq \varepsilon, \forall t \geq T$ ,

onde  $\Delta$  é o excedente máximo permitido,  $T > 0$  é o tempo transitório máximo,  $\varepsilon \in (0, \Delta]$  é o erro máximo permitido

em estado estacionário, sendo que os três parâmetros  $\Delta$ ,  $T$  e  $\varepsilon$  podem ser livremente especificados

Na fase de alcance, a função de monitoração deve forçar  $\|\sigma(t)\| \leq \varepsilon/r_2$  antes do instante  $T$  garantindo também a não violação da especificação de *overshoot*. O esquema de comutação da monitoração é tal que, para cada  $k$  para o qual  $\|\sigma(t_k)\| > \varepsilon/r_2$ , o próximo instante de comutação é definido como

$$t_{k+1} := \min \left\{ \begin{array}{l} t \geq t_k : \|\sigma(t)\| \geq \|\sigma(0)\| + \Delta \left(1 - \frac{1}{r_1^k}\right) \\ \text{ou} \\ t \geq t_k + T \left(1 - \frac{1}{r_1^k}\right) \text{ e } \|\sigma(t)\| > \varepsilon/r_2 \end{array} \right\}, \quad (11)$$

Se, para algum instante de tempo  $\bar{t} < T$ , a condição  $\|\sigma(\bar{t})\| = \varepsilon/2$  for atingida, a Fase Residual é iniciada.

O índice de chaveamento  $k$  é empregado no projeto de sequências positivas monotonicamente crescentes  $\hat{d}_1(k)$  e  $\hat{d}_2(k)$  para contra-atacar a ausência das constantes  $\bar{d}_1$  e  $\bar{d}_2$ , respectivamente, *v.g.*,

$$\hat{d}_1(k) = c_1 b_1^k, \quad (12)$$

$$\hat{d}_2(k) = c_2 b_2^k, \quad (13)$$

onde  $c_1, c_2 > 0$  e  $b_1, b_2 > \max\{r_1, r_2\}$  são constantes escolhidas arbitrariamente. Em seguida, é introduzido um esquema de estimativa de norma de estado híbrido, com base em (3) - (4),

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = -\gamma_1 \hat{\eta}(t) + c_{\eta\sigma}\|\sigma(t)\| + \hat{d}_1(k), \quad (14)$$

tal que

$$\|\eta(t)\| \leq |\hat{\eta}(t)| + \pi_\eta(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (15)$$

que flui através de um espaço de estado contínuo, mas também se move por diferentes modos de comutação discretos, conforme definido por (Goebel et al., 2012).

Na fase de alcance, o chaveamento da função de monitoração faz com que  $\hat{d}_1(k)$  e  $\hat{d}_2(k)$  tendam a infinito monotonicamente com  $k \rightarrow \infty, \forall t \leq \bar{t}$ , de modo que  $\sigma(t)$  seja forçado a convergir para um conjunto residual de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  enquanto o *overshoot* permanece dentro da especificação  $\Delta$  (Hsu et al., 2019).

#### 5. FUNÇÃO DE BARREIRA

A Função Barreira, para um dado e fixo  $\varepsilon > 0$ , é definida como uma função contínua  $\rho_B : \chi \in (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \rho_B(\chi) \in [b, \infty)$  estritamente crescente em  $[0, \varepsilon)$  tal que  $\lim_{|\chi| \rightarrow \varepsilon} \rho_B(\chi) = +\infty$ ,  $\rho_B(\chi)$  tem um mínimo único em zero e  $\rho_B(0) = b \geq 0$ .

Na fase residual, a introdução de uma função de barreira impõe um limite rígido à variável de deslizamento, restringindo-a a uma  $\varepsilon$ -vizinhança da origem. As características principais dos controladores baseados em funções de barreira são a irrelevância do conhecimento de um limitante superior para perturbação e a garantia do esforço de controle não superestimado. Basicamente, na estrutura de controle por modo deslizante, existem dois tipos de funções de barreira comumente utilizadas:

- Função de Barreira Definida Positiva (PB):

$$\rho_{PB}(\chi) := \frac{\varepsilon \bar{F}}{\varepsilon - |\chi|}, \quad i.e., \quad \rho_{PB}(0) = \bar{F} > 0. \quad (16)$$

- Função de Barreira Semi-definida Positiva (PSBF):

$$\rho_{PSB}(\chi) := \frac{|\chi|}{\varepsilon - |\chi|}, \quad i.e., \quad \rho_{PSB}(0) = 0. \quad (17)$$

Para mais detalhes, consulte (Obeid et al., 2018).

A próxima seção mostra como as funções de barreira podem ser empregadas como uma estratégia adaptativa para esquemas de controle vetorial unitário.

## 6. CONTROLE VETORIAL UNITÁRIO

O sinal de controle vetorial unitário

$$u = -\rho(t)S_p \frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|}, \quad (18)$$

onde a matriz  $S_p$  é escolhida para verificar a suposição **(H2)** e  $\rho(t)$  é a função de modulação tal que

$$\rho(t) = \begin{cases} \rho_M(t), & \text{se } t < \bar{t} \\ \rho_B(t), & \text{se } t \geq \bar{t} \end{cases}. \quad (19)$$

Enquanto o sistema de malha fechada está na fase de alcance, ele está sob ação da função de monitoração e usa o observador da norma híbrido (14) e estimativa de perturbação (13) com a função de modulação projetada como

$$\rho_M(t) = c_\sigma \|\sigma(t)\| + c_{d_\sigma} \hat{d}_2(k) + c_\eta \hat{\eta}(t) + \delta, \quad (20)$$

com constantes positivas apropriadas  $c_\sigma$ ,  $c_{d_\sigma}$ ,  $c_\eta$  e  $\delta$ . Por outro lado, quando na fase residual, a função de modulação é acionada pela função de barreira, de modo que  $\rho_B(t)$  é (16) ou (17).

## 7. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Os Teoremas 3 e 4 resumem os principais resultados das propriedades de estabilidade/rastreamento do sistema de malha fechada.

No entanto, antes que os Teoremas sejam apresentados, analisa-se brevemente o comportamento dinâmico (1)–(2) quando o sistema em malha fechada está sob o regime residual. De (1), fica claro que sua solução é

$$\eta(t) = \exp(A_{11}t)\eta(0) + \exp(A_{11}t) * A_{12}\sigma(t) + \exp(A_{11}t) * d_1(x, t), \quad (21)$$

na qual  $*$  representa a operação de convolução. Definindo  $\lambda_{\max}(A_{11}) < \gamma_1 < 0$  e lembrando que,  $d_1(x, t) \leq \bar{d}_1$  e, nesta fase,  $\|\sigma(t)\| \leq \varepsilon$ , então

$$\|\eta(t)\| \leq \frac{\gamma_1 \|\eta(0)\| + \|A_{12}\| \varepsilon + \bar{d}_1}{\gamma_1}. \quad (22)$$

Portanto, usando a lei de controle (18) com função de modulação (20), a equação (2) pode ser reescrita como

$$\dot{\sigma}(t) = K_p \left[ K_p^{-1} d(t) - \rho_B(\sigma(t)) \frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|} \right], \quad (23)$$

com perturbação resultante  $d(t)$  satisfazendo

$$\begin{aligned} \|d(t)\| &\leq \|A_{21}\| \|\eta(t)\| + \|A_{22}\| \|\sigma(t)\| + \|d_2(x, t)\| \\ &\leq \|A_{21}\| \frac{(\gamma_1 \|\eta(0)\| + \|A_{12}\| \varepsilon + \bar{d}_1)}{\gamma_1} + \|A_{22}\| \varepsilon + \bar{d}_2, \end{aligned} \quad (24)$$

*i.e.*, na fase residual, a perturbação  $d(t)$  é delimitada por uma constante desconhecida.

Teorema 3. Considere a planta multivariável (1)–(2), função de monitoração satisfazendo (11), estimativas de perturbações (12) e (13), observador híbrido da norma (14), função de barreira (16), e a lei de controle por vetor unitário via realimentação de saída (18) com função de modulação (19). Suponha que (H1)–(H6) sejam satisfeitas. Então, existe um limitante superior  $d_{\max}$ , desconhecido, para a perturbação equivalente em (2) e a estabilização prática, ou rastreamento, é alcançada, com o erro de saída convergindo para o interior de  $\varepsilon$ -vizinhança da da origem tal que  $\|\sigma(t)\| \leq \varepsilon_1$  com  $\|\sigma(t)\| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$  onde  $\varepsilon_1 = \varepsilon(1 - \bar{F}/d_{\max})$  se  $\bar{F} < d_{\max}$  e  $\varepsilon_1 = 0$  se  $\bar{F} \geq d_{\max}$ . Além disso, todos os sinais de malha fechada são uniformemente limitados e os critérios de desempenho são satisfeitos.

**Prova.** O primeiro passo da prova consiste em demonstrar que, em malha fechada, ao se empregar a lei de controle (18) com função de modulação (20), a variável de deslizamento alcança a região  $\|\sigma\| \leq \varepsilon/r_2$  com a garantia de que as especificações do tempo de assentamento e máximo overshoot não sejam infringidas. Por meio de uma análise rigorosa, tal fato já foi provado no Teorema 1 de Hsu et al. (2019). Portanto, dá-se início à segunda etapa da prova.

Considere a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V(\sigma) = \sigma^T P \sigma + \frac{1}{2} (\rho_{PB}(\sigma) - \bar{F})^2, \quad (25)$$

na qual  $P = P^T$  é a solução da Equação de Lyaunov  $PK_p + K_p^T P = I$ . Então, na fase residual ( $t \geq \bar{t}$ ), a derivada temporal de (25), com a auxílio de (24) e (23), satisfaz

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma^T P \dot{\sigma} + \dot{\sigma}^T P \sigma + (\rho_{PB} - \bar{F}) \dot{\rho}_{PB} \\ &\leq -(-2\lambda_{\max}(P)\|d\| + \rho_{PB})\|\sigma\| + (\rho_{PB} - \bar{F})\dot{\rho}_{PB}. \end{aligned} \quad (26)$$

Com a função de barreira dada em (16) e a desigualdade (26), chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(-d_{\max} + \rho_{PB})\|\sigma\| + \\ &\quad - (\rho_{PB} - \bar{F}) \frac{\varepsilon \bar{F} \lambda_{\min}(K_p)}{(\varepsilon - \|\sigma\|)^2} (-d_{\max} + \rho_{PB}) \\ &= -\beta_\sigma \|\sigma\| - \zeta \beta_\sigma |\rho_{PB} - \bar{F}|, \end{aligned} \quad (27)$$

onde  $\beta_\sigma = -d_{\max} + \rho_{PB}$ ,  $\zeta = \frac{\varepsilon \bar{F} \lambda_{\min}(K_p)}{(\varepsilon - \|\sigma\|)^2}$ , e usando (24), a constante desconhecida

$$\begin{aligned} d_{\max} &= \max \left( 2\lambda_{\max}(P), \frac{1}{\lambda_{\min}(K_p)} \right) \times \\ &\quad \times \left( \|A_{21}\| \frac{(\gamma_1 \|\eta(0)\| + \|A_{12}\| \varepsilon + \bar{d}_1)}{\gamma_1} + \|A_{22}\| \varepsilon + \bar{d}_2 \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Lembrando-se que  $\lambda_{\min}(P)\|\sigma\|^2 \leq \sigma^T P \sigma \leq \lambda_{\max}(P)\|\sigma\|^2$ ,

$$\begin{aligned} V^{1/2} &= \sqrt{\sigma^T P \sigma + \frac{1}{2} (\rho_{PB}(\sigma) - \bar{F})^2} \\ &\leq \sqrt{\lambda_{\max}(P)\|\sigma\|^2 + \frac{1}{2} (\rho_{PB}(\sigma) - \bar{F})^2} \\ &\leq \max \left\{ \sqrt{\lambda_{\max}(P)}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} (\|\sigma\| + |\rho_{PB}(\sigma) - \bar{F}|). \end{aligned} \quad (29)$$

Das desigualdades (27) e (29) é possível escrever

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\beta_\sigma \|\sigma\| - \zeta \beta_\sigma |\rho_{pb} - \bar{F}| \\
&\leq -\beta_\sigma \min\{1, \zeta\} (\|\sigma\| + |\rho_{pb} - \bar{F}|) \\
&= -\beta_\sigma \min\{1, \zeta\} \frac{\max\left\{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}}{\max\left\{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}} \times \\
&\quad \times (\|\sigma\| + |\rho_{pb} - \bar{F}|) \\
&\leq -\beta_1 V^{1/2}, \quad \text{com } \beta_1 = \frac{\beta_\sigma \min\{1, \zeta\}}{\max\left\{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}}. \quad (30)
\end{aligned}$$

Então, a desigualdade (30) satisfaz (Obeid et al., 2018, Lemma 5) e conclui-se que, com a função de barreira definida positiva (16), a variável deslizamento alcançará, em tempo finito, e permanecerá dentro de uma região limitada  $\epsilon_1$  tal que  $\|\sigma(t)\| \leq \epsilon_1 < \epsilon$  onde  $\epsilon_1 = \epsilon(1 - \bar{F}/d_{\max})$  se  $\bar{F} < d_{\max}$  e  $\epsilon_1 = 0$  se  $\bar{F} \geq d_{\max}$ .  $\square$

**Teorema 4.** Considere a planta multivariável (1)–(2), função de monitoração satisfazendo (11), estimativas de perturbações (12) e (13), observador híbrido da norma (14), função de barreira (17), e a lei de controle por vetor unitário via realimentação de saída (18) com função de modulação (19). Suponha que (H1)–(H6) sejam satisfeitas. Então, existe um limitante superior  $d_{\max}$ , desconhecido, para a perturbação equivalente em (2) e a estabilização prática, ou rastreamento, é alcançada, com o erro de saída convergindo para o interior de  $\epsilon$ -vizinhança da origem tal que  $\|\sigma(t)\| \leq \epsilon_2$  com  $\|\sigma(t)\| \leq \epsilon_2 < \epsilon$  onde  $\epsilon_2 = \epsilon d_{\max}/(1 + d_{\max})$ . Além disso, todos os sinais de malha fechada são uniformemente limitados e os critérios de desempenho são satisfeitos.

**Prova.** O primeiro passo da prova consiste em demonstrar que, em malha fechada, ao se empregar a lei de controle (18) com função de modulação (20), a variável de deslizamento alcança a região  $\|\sigma\| \leq \epsilon/r_2$  com a garantia de que as especificações do tempo de assentamento e máximo *overshoot* não sejam infringidas. Por meio de uma análise rigorosa, tal fato já foi provado no Teorema 1 de Hsu et al. (2019). Portanto, dá-se início à segunda etapa da prova.

Considere a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V(\sigma) = \sigma^T P \sigma + \frac{1}{2} \rho_{PSB}^2(\sigma), \quad (31)$$

na qual  $P = P^T$  é a solução da Equação de Lyapunov  $PK_p + K_p^T P = I$ . Então, na fase residual ( $t \geq \bar{t}$ ), a derivada temporal de (31), com a auxílio de (24) e (23), satisfaz

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -(-2\lambda_{\max}(P)\|d\| + \rho_{PSB})\|\sigma\| + \rho_{PSB}\dot{\rho}_{PSB} \\
&\leq -(-2\lambda_{\max}(P)\|d\| + \rho_{PSB})\|\sigma\| + \\
&\quad + \rho_{PSB} \frac{\epsilon \lambda_{\min}(K_p)}{(\epsilon - \|\sigma\|)^2} \left( \frac{1}{\lambda_{\min}(K_p)} \|d\| - \rho_{PSB} \right) \\
&\leq -(-d_{\max} + \rho_{PSB})\|\sigma\| + \\
&\quad - \rho_{PSB} \frac{\epsilon \lambda_{\min}(K_p)}{(\epsilon - \|\sigma\|)^2} (-d_{\max} + \rho_{PSB}) \\
&= -\beta_\sigma \|\sigma\| - \zeta \beta_\sigma |\rho_{PSB}|, \quad (32)
\end{aligned}$$

onde  $\beta_\sigma = -d_{\max} + \rho_{PSB}$ ,  $\zeta = \frac{\epsilon \lambda_{\min}(K_p)}{(\epsilon - \|\sigma\|)^2}$ , e usando (24), a constante desconhecida  $d_{\max}$  fornecida por (28).

Então, seguindo os passos dados na prova do Teorema 3, chega-se a

$$\dot{V} \leq -\beta_2 V^{1/2}, \quad \text{com } \beta_2 = \frac{\beta_\sigma \min\{1, \zeta\}}{\max\left\{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}}. \quad (33)$$

Então, a desigualdade (33) satisfaz (Obeid et al., 2018, Lemma 6) e conclui-se que, com a função de barreira definida semi-positiva (17), a variável deslizamento alcançará, em tempo finito, e permanecerá dentro de uma região limitada  $\epsilon_2$  tal que  $\|\sigma(t)\| \leq \epsilon_2 < \epsilon$  onde  $\epsilon_2 = \epsilon d_{\max}/(1 + d_{\max})$ .  $\square$

Cada função de barreira possui suas vantagens e desvantagens. A função de barreira definida positiva garante maior precisão ao rastreamento, no entanto, o sinal de controle chaveia em alta frequência. Por outro lado, a função definida semi-positiva gera um sinal de controle suave limitando a variável de deslizamento a uma região maior. Independente da função de barreira utilizada, a condição  $\|\sigma\| \leq \epsilon$  para todo  $t \geq \bar{t}$  sempre é verificada.

## 8. EXEMPLO ACADÊMICO

Para validar a estratégia de controle proposta, esta seção considera um exemplo acadêmico de estabilização via realimentação de saída para um sistema MIMO, não-linear e instável (1)–(2) tal que  $A_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d_1(x, t) =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin(10t) \text{sgn}(\eta_1 \eta_2) \\ \arctan(\eta_1 + \eta_2 + \sigma_1 + \sigma_2) + \cos(2t) + \exp(-\sigma_2^2/2) \end{bmatrix} \times \\ \times [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 25)],$$

$$d_2^T(x, t) = \begin{bmatrix} 0.25 \text{sgn}(\sigma_2)(1 - \exp(-|\eta_2|)) - \exp(-\sigma_2^2/2) \\ \exp(-\sigma_1^2/2) + \cos(t) \end{bmatrix} \times \\ \times [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 25)],$$

$$\text{e condições iniciais } \eta^T(0) = [3, -2] \text{ e } \sigma^T(0) = [2, -1].$$

Foi escolhido como critério de desempenho um *overshoot* máximo  $\Delta = 0.5$ , tempo de assentamento máximo  $T = 5$  [sec] e resíduo máximo da ordem de  $\epsilon = 0.01$ . Em seguida, a lei de chaveamento baseada na função de monitoração segue (11) com parâmetros  $r_1 = 2$  e  $r_2 = 1.2$ . Estimativas de limites de perturbações  $\bar{d}_1$  e  $\bar{d}_2$  são encontrados em (12) e (13), respectivamente, definindo  $b_1 = 1.5$ ,  $b_2 = 1.2$ ,  $c_1 = 0.05$  e  $c_2 = 0.1$ . Os parâmetros do observador da norma híbrido (14) são  $\lambda_1 = -0.8$  e  $c_{\eta\sigma} = 1.1$ . A barreira definida positiva (16) tem parâmetro  $\bar{F} = 20$  e os parâmetros de controlador vetorial unitário (18) são  $c_\sigma = 3$ ,  $c_{d\sigma} = 4$ ,  $c_\eta = 5$ , e  $S_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Os resultados obtidos para o controlador vetorial unitário proposto, combinando funções de monitoração e barreira, são mostrados nas Figs. 1 a 2.

Diferentemente das abordagens encontradas na literatura, aqui a função de monitoração é capaz de permitir a determinação exata do momento de comutação da função de

barreira. Em outras palavras, pode-se garantir atenuação causada pela transição entre as funções de monitoração e barreira. E, mais do que a estabilização/convergência em tempo finito, garante-se a estabilização/convergência em tempo fixo.

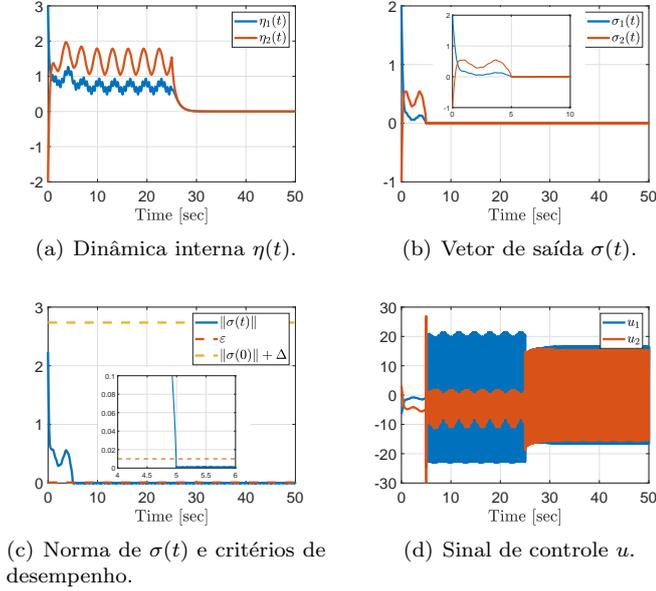


Figura 1. Resultados de simulação - controle vetorial unitário com monitoração e barreira definida positiva.

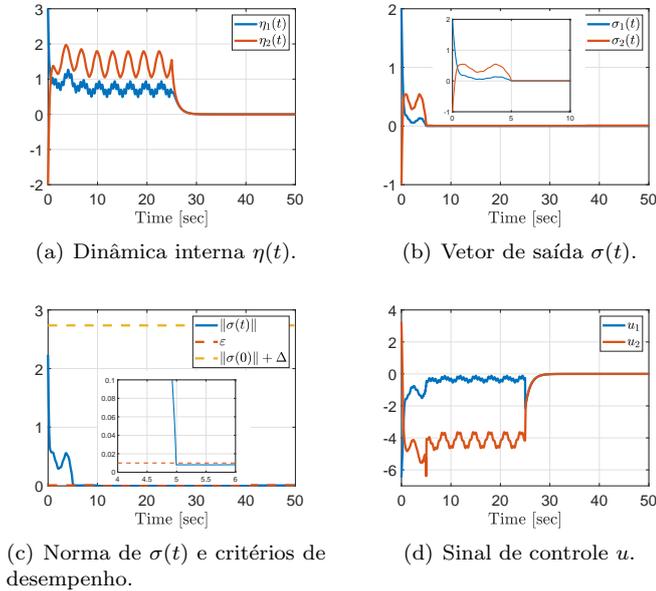


Figura 2. Resultados de simulação - controle vetorial unitário com monitoração e barreira definida semi-positiva.

## 9. CONCLUSÕES

Um novo controlador adaptativo por vetor unitário via realimentação de saída foi proposto para plantas com incertezas paramétricas e perturbações casadas e descasadas com

majorantes desconhecidos. Ao combinar a função de monitoração com as funções de barreira, o novo controlador exibiu as vantagens de cada uma das abordagens adaptativas relacionadas. A estratégia permite que o comportamento transitório seja especificado alcançando a convergência em tempo finito a um conjunto residual invariante arbitrariamente pequeno enquanto evita superestimação do esforço de controle.

## REFERÊNCIAS

- Baida, S.V. (1997). Unit sliding mode control in continuous-and discrete-time systems. *International Journal of Control*, 57, 1125–1132.
- Cunha, J.P.V.S., Costa, R.R., and Hsu, L. (2008). Design of first-order approximation filters for sliding-mode control of uncertain systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55, 4037–4046.
- Edwards, C. and Shtessel, Y. (2016). Adaptive dual-layer super-twisting control and observation. *International Journal of Control*, 89, 1759–1766.
- Goebel, R., Sanfelice, R.G., and Teel, A.R. (2012). *Hybrid dynamical systems – Modeling, stability, and robustness*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Hsu, L., Lizarralde, F., and Araujo, A.D. (1997). New results on output-feedback variable structure model-reference adaptive control: Design and stability analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42, 386–393.
- Hsu, L., Oliveira, T.R., Cunha, J.P.V.S., and Yan, L. (2019). Adaptive unit vector control of multivariable systems using monitoring functions. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 29, 583–600.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34, 379–384.
- Obeid, H., Fridman, L.M., Laghrouche, S., and Harmouche, M. (2018). Barrier function-based adaptive sliding mode control. *Automatica*, 93, 540–544.
- Oliveira, T.R., Melo, G.T., Hsu, L., and Cunha, J.P.V.S. (2017). Monitoring functions applied to adaptive sliding mode control for disturbance rejection. In *Proceedings of the 20th IFAC World Congress*, 2684–2689.
- Rodrigues, V.H.P. and Oliveira, T.R. (2017). Monitoring function for switching adaptation in control and estimation schemes with sliding modes. In *Proceedings of the 1st IEEE Conference on Control Technology and Applications*, 608–613.
- Shtessel, Y.B., Moreno, J.A., Plestan, F., Fridman, L.M., and Poznyak, A.S. (2010). Super-twisting adaptive sliding mode control: a lyapunov design. In *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, 5109–5113.
- Utkin, V.I. and Poznyak, A.S. (2013). Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: Equivalent control method. *Automatica*, 49, 39–47.
- Yan, L., Hsu, L., Costa, R.R., and Lizarralde, F. (2008). A variable structure model reference robust control without a prior knowledge of high frequency gain sign. *Automatica*, 44, 1036–1044.