DOI: 10.48011/asba.v2i1.1134

# Abordagens de Solução do Problema de Fluxo de Carga baseadas em Aproximações de Padé com Denominador Comum

**Lara Raquel de Jesus Rodrigues Silva** *
**Francisco Damasceno Freitas** **

* *Departamento de Engenharia Elétrica - Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, DF (e-mail: lararaquel.eng@gmail.com)*
** *Departamento de Engenharia Elétrica - Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, DF (e-mail: ffreitas@ene.unb.br)*

**Abstract:** This paper presents approaches for calculating the solution of the Load Flow Problem (LFP) via the Holomorphic Embedding Model (HEM). Two approaches to the calculation of Padé approximants are proposed. Both of them are composed of a rational fraction which has a common denominator. From these approximations, modal equivalents in the form of poles and residues are calculated. Based on a modal dominance index, the contributions of each modal expansion term are assessed in order to determine a reduced order modal model. This result allows to determine a threshold, which is appropriated to suggest a maximum number of terms for the power series. The approximations are calculated from the real and imaginary parts of the voltages MacLaurin series. The evaluation of the proposed techniques was carried out based on simulations in a resistive electrical circuit and in a 14- and 118-bus power systems. The results indicate the potentiality of the approaches as a tool to provide a foundation for the modal analysis applied to the holomorphic embedding problem.

**Resumo**: Este artigo apresenta abordagens para o cálculo da solução do Problema de Fluxo de Carga (PFC) via método de adaptação holomórfica (*Holomorphic Embedding Method* - HEM). Duas abordagens para o cálculo de aproximações de Padé com fração racional tendo denominador comum são propostas. A partir destas aproximações, são calculados equivalentes modais obtidos na forma de polos e resíduos. Com base em um índice de dominância modal, são avaliadas as contribuições de cada termo da expansão modal visando determinar um modelo reduzido modal. A partir da redução modal, determina-se um limiar para o número máximo de termos das séries. As aproximações são calculadas a partir das partes real e imaginária das séries de MacLaurin de tensão que resultam da expansão das séries de potência. A avaliação das técnicas propostas foi efetuada com base em simulações em um circuito elétrico resistivo e em dois sistemas de potência com 14 e 118 barras. Os resultados indicam a potencialidade das abordagens como uma ferramenta para fornecer uma base para a análise modal aplicada ao problema de adaptação holomórfica.

*Keywords:* Dynamic system; Transfer function; Load Flow Problem; Padé Approximant; Poles; Residues; HELM; Modal analysis.

*Palavras-chaves:* Sistema dinâmico; Função de transferência; Problema de Fluxo de Carga; Aproximante de Padé; Polos; Resíduos; HELM; Análise modal.

## 1. INTRODUÇÃO

A solução do ponto de operação em sistemas elétricos de potência é obtida a partir do Problema de Fluxo de Carga (PFC). Diversas técnicas para resolver este problema são encontradas na literatura e em aplicativos computacionais Monticelli (1983), Zimmerman et al. (2011). As mais tradicionais são os métodos iterativos de Newton-Raphson e suas variantes.

Um método não iterativo que tem sido alvo de estudos recentes para resolução do PFC é o método com adaptação holomórfica, proposto por Trias (2012), mais conhecido como *Holomorphic Embedding Load-Flow Model* (HELM). A técnica foi originalmente proposta para resolver PFCs em redes síncronas de CA. Neste método as Equações de Balanço de Potência (EBP) originais são transformadas em um problema paramétrico. A estas equações é incorporado um parâmetro de escala complexo, *embedding parameter*, que será designado aqui como parâmetro de adaptação holomórfica. No entanto, o valor de interesse desse parâmetro ocorre para o valor unitário, pois é nesse estado que ocorre a solução numérica das EBPs. O desafio nesse processo é determinar uma adaptação holomórfica apropriada de modo a se obter a solução mais eficiente para o problema. Diversos outros trabalhos foram propostos com novas formas de adaptação holomórficas e estratégias de solução.

Na metodologia desenvolvida em Trias (2012), era resolvido um PFC de duas barras, na qual uma das barras caracterizava-se como de carga. Já em Rao et al. (2015), a aplicação foi desenvolvida para um sistema de múltiplas barras, sendo aí tratado o PFC com barras de carga e de controle de tensão. Para isto, foram propostas adaptações holomórficas para as EBPs nas barras tipo PQ, PV e *slack*. O problema de convergência das séries de potências resultantes da adaptação holomórfica e a expansão do raio de convergência por meio de aproximações de Padé foram estudados em Rao and Tylavsky (2018). Em Freitas et al. (2019), o problema foi estudado baseado em uma estratégia de reinicialização, aproveitando soluções parciais do HEM aplicado ao PFC. Em todas estas abordagens, o cálculo de aproximações de Padé são essenciais para expansão do raio de convergência das série de potência no parâmetro de adaptação holomórfica. As frações de Padé são calculadas individualmente para cada tensão holomórfica e considerando os coeficientes complexos das séries. Ou seja, cada fração de Padé é representada como uma função de transferência (FT) com polinômios tendo coeficientes complexos.

Neste artigo, investigam-se aproximações de Padé com aplicação ao problema de fluxo de carga. Diferentemente de outras abordagens, a formulação é baseada em frações racionais de polinômios cujos coeficientes são reais. Além disso, são exploradas abordagens que permitem se determinar um denominador comum para as frações formando assim as aproximações de Padé. Cada série de potência complexa associada a uma tensão holomórfica é convertida em suas partes real e imaginária correspondentes. Assim, duas aproximações de Padé são realizadas, cada uma com frações contendo apenas polinômios com coeficientes reais e denominador comum. Uma vez calculadas as frações com denominador comum, realiza-se o cálculo de polos e resíduos e obtêm-se equivalentes modais. A expansão desta forma permite o cálculo de um Índice de Dominância Modal (IDM), como sugerido em de Pinho Silveira et al. (2006). Com este índice avalia-se a dominância modal dos modos envolvidos nas aproximações. Interessante notar que a dominância modal pode ser utilizada como um indicador da máxima ordem das séries de potência para o problema. Testes para demonstrar a eficácia da metodologia são realizados em um circuito puramente resistivo e em dois modelos redes elétricas de potência, um com 14 barras e outro com 118.

Este artigo está estruturado da seguinte forma: na Seção 2, é apresentada a metodologia baseada no HELM. A Seção 3 descreve a proposta de aproximação de Padé com denominador comum e expansão na forma de poolos e resíduos. Também nessa seção é discutida abordagens por análise modal e dominância modal. Na Seção 4, testes e resultados ilustram as aplicações do artigo. Por fim, a Seção 5 apresenta as conclusões do trabalho.

## 2. METODOLOGIA DO HELM

Nesta seção apresenta-se a metodologia geral do HELM a fim de que se possa apresentar na sequência a proposta que envolve a dominância de função de transferência (FT).

A solução do problema de fluxo de carga (PFC) não linear seguindo a metodologia HELM processa-se de tal forma que os modelos das barras tipo PQ, PV e *slack* são adaptados de forma holomórfica pela inserção de um parâmetro complexo.

Assume-se que a rede elétrica CA seja constituída por uma barra de referência (*slack*), e $N$ barras do tipo PQ e PV, das quais $p$ são PQ e $q$ são PV, de modo que $N = p + q$.

Define-se a barra 0 como barra *slack*, ou seja, cuja magnitude $V_0$ e fase são conhecidas. Desta forma, um conjunto de equações não-lineares, desconsiderando a barra *slack*, permitem formar as denominadas equações de balanço de potência (EBP) do PFC apresentadas em Freitas et al. (2019). Essas equações podem ser representadas da seguinte forma:

$$S_i - V_i I_i^* = 0, i = 1, 2, ..., p + q \tag{1}$$

onde $V_i$ é a tensão nodal complexa na barra $i$, expressa por $V_i = V_{i(re)} + jV_{i(im)}$, em que $V_{i(re)}$ é a parte real e $V_{i(im)}$, a parte imaginária de $V_i$. A potência complexa injetada na barra é $S_i = P_i + jQ_i$, onde $P_i$ é a potência ativa e $Q_i$ a potência reativa; $I_i^*$ é o complexo-conjugado da corrente injetada na barra.

Em Rao et al. (2015) defini-se o parâmetro de adaptação holomórfica $s$, chamado também de *embedding parameter*. Para o caso de uma barra PQ, (1) pode ser adaptada na forma holomórfica como:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik} V_k(s) = sS_i^* W_i^*(s^*) - sY_i^{sh} V_i(s) \tag{2}$$

sendo $V_i(s)$ uma função complexa do parâmetro $s$ representando a tensão na barra $i$, e $W_i(s) = 1/V_i(s)$; $Y_{ik} \in \mathbb{C}$ é o elemento (i,k) da matriz de admitância de barra, $Y_{bus} \in \mathbb{C}^{(N+1)\times(N+1)}$, cuja formação se dá apenas com os elementos de circuito séries que modelam os componentes da rede; todos as ligações *shunts* da rede na barra $i$, incluindo cargas representadas por impedância constante, são representados pela admitância *shunt* $Y_i^{sh} \in \mathbb{C}$.

As barras do tipo PV precisam ter adaptação holomórfica a fim de preservar o controle da magnitude da tensão na barra e o valor constante da potência ativa na barra. Nesta modelagem, a potência reativa passa a ser uma das incógnitas do problema. Uma forma de adaptação holomórfica sugerida em Rao et al. (2015) é do tipo:

$$\sum_{k=0}^{N} Y_{ik} V_k(s) = sP_i W_i^*(s^*) - jQ_i(s) W_i^*(s^*) - sY_i^{sh} V_i(s) \tag{3}$$

$$V_i(s) V_i^*(s^*) = 1 + s[(V_i^{sp})^2 - 1] \tag{4}$$

em que $V_i^{sp}$ é a magnitude da tensão controlada na barra $\mathrm{PV}_i$.

Finalmente, a barra de referência (assumida aqui como $i = 0$) tem uma modelagem mais simples, dada por:

$$V_0(s) = 1 + s[(V_0 - 1)] \tag{5}$$

Note que ao se atribuir o valor $s = 1$ no conjunto de equações formado por (2)-(5), tem-se as EBPs originais do PFC. Portanto, a ideia da adpatação holomórfica é expandir as incógnitas de interesse em séries de MacLaurin em $s$,

$$V_i(s) = V_i[0] + V_i[1]s + V_i[2]s^2 + \ldots + V_i[n]s^n \quad i \in PQ \text{ ou } PV, \tag{6}$$

e calcular o valor dessas incógnitas para o valor unitário de $s$, sendo $n \in \mathbb{N}$ o grau da série; $V_i[k] \in \mathbb{C}$ o k-ésimo coeficiente da potência $s^k$ da série de potência $V_i(s)$.

Ocorre que a série de potência (6) pode ter raio de convergência muito pequeno e divergir sem que se consiga alcançar os resultados de interesse em $s = 1$. Assim, um melhoramento natural é buscar expandir o raio de convergência através de um processo denominado continuação analítica citado em Trias (2012). A melhor opção para esse tipo de processo é truncar a série $V_i(s)$ e representá-la por uma função racional em $s$ bem conhecido como *aproximação de Padé* (ver Trias (2012); Rao et al. (2015) para mais detalhes):

$$V_{i[m,m]}(s) = \frac{a_{0i} + a_{1i}s + a_{2i}s^2 + \ldots + a_{mi}s^m}{b_{0i} + b_{1i}s + b_{2i}s^2 + \ldots + b_{mi}s^m} \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{7}$$

Uma vez calculados os coeficientes da série em (6) (ver, por exemplo, Rao et al. (2015) para esses cálculos e detalhes), os coeficientes $a_{ki}$, $b_{ki}$, $k = 1, \ldots, m$ dos polinômios da fração de Padé são obtidos por identificação das potências nos lados esquerdo e direito quando se iguala a (6) a fim de se obter (7). Em (7), faz-se $b_{0i} = 1$, sem perdas de generalidade. Considera-se que os polinômios tanto do numerador quanto denominador tenham a mesma ordem $m$, com $m = n/2 \in \mathbb{N}$. Isto significa que $n$ é um inteiro par.

## 3. APROXIMAÇÃO DE PADÉ COM DENOMINADOR COMUM

As aproximações de Padé podem ser representadas por frações que possuem denominador comum entre si. Neste trabalho, propõe-se desenvolver esta formulação considerando duas abordagens de cálculo dos coeficientes. Além disso, são avaliadas formas de representar os polinômio na fração de Padé: uma com potências diretas de $s$, outra com inversas. Logo as aproximações têm a seguinte forma:

$$V_{i[m,m]}(s) = \frac{a_{0i} + a_{1i}s + a_{2i}s^2 + \ldots + a_{mi}s^m}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m} \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{8}$$

sendo $b_0$ normalizado e igual a 1.

### *3.1 Aproximação de Padé em circuito resistivo*

Antes de fazer a aplicação ao caso de redes elétricas CA em regime senoidal permanente, apresenta-se a metodologia para determinação da fração racional de Padé para uma rede elétrica CC com três nós. Espera-se que esse exemplo tutorial possa ser útil para melhor entendimento de abordagens mais genéricas.

A Figura 1 apresenta um circuito resistivo, tendo cargas de potência constante, $P_2$ e $P_3$, e uma fonte de tensão constante $V_1$.

As grandezas tensões e correntes devem atender as leis de Kirchhoff no circuito. Além disso, há as expressões não-lineares envolvendo as potências constantes $P_2 = V_2 I_2$ e $P_3 = V_3 I_3$, em que $I_2$ e $I_3$ são as correntes que alimentam as cargas 2 e 3, respectivamente. $V_2$ e $V_3$ são as tensões nodais indicadas no circuito.

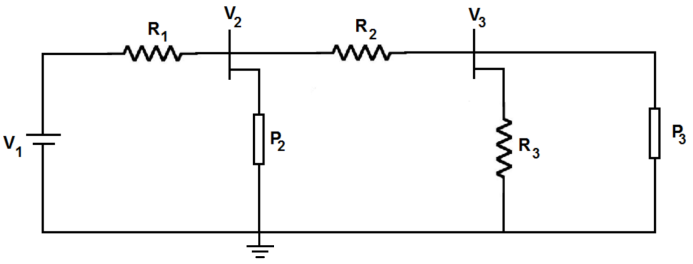


Figura 1. Circuito resistivo de 3 nós.

De acordo com a lei de Kirchhoff, as equações não-lineares de balanço de potência do sistema são:

$$\begin{aligned} \left(\frac{-V_1}{R_1}\right) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V_2 + \left(\frac{-1}{R_2}\right) V_3 &= \frac{P_2}{V_2} \\ \left(\frac{-V_2}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) V_3 &= \frac{P_3}{V_3} \end{aligned} \tag{9}$$

Fez-se a adaptação holomórfica com o parâmetro $s$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{-V_1}{R_1}\right) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V_2 + \left(\frac{-1}{R_2}\right) V_3 &= s\frac{P_2}{V_2} \\ \left(\frac{-V_2}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{R_2}\right) V_3 &= s\frac{P_3}{V_3} - s\frac{V_3}{R_3} \end{aligned} \tag{10}$$

Note-se que, atribuindo-se o valor unitário a $s$, (10) é recuperada em sua forma original.

Em (10), as tensões $V_2$ e $V_3$ passam a ser função do parâmetro $s$, representadas por $V_2(s)$ e $V_3(s)$. Estas grandezas podem ser expandidas em série de MacLaurin até a ordem $n$ como:

$$\begin{aligned} V_2(s) &= V_2[0] + V_2[1]s + V_2[2]s^2 + \ldots + V_2[n]s^n \\ V_3(s) &= V_3[0] + V_3[1]s + V_3[2]s^2 + \ldots + V_3[n]s^n \end{aligned} \tag{11}$$

Com os resultados em (11), propõe-se calcular as frações racionais de Padé, conforme (8). Adotando-se este procedimento, as tensões ficam:

$$\begin{aligned} V_{2[m,m]}(s) &= \frac{a_{02} + a_{12}s + a_{22}s^2 + \ldots + a_{m2}s^m}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m}, \\ V_{3[m,m]}(s) &= \frac{a_{03} + a_{13}s + a_{23}s^2 + \ldots + a_{m3}s^m}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m} \end{aligned} \tag{12}$$

A fim de calcular os polinômios do numerador e denominador das frações de Padé, considere inicialmente a operação de identificação dos coeficientes dos polinômios verificada para a grandeza $V_{2[m,m]}(s)$. Admitindo-se já calculados os coeficientes da série de potência de $V_2(s)$ em (11), o processo de identificação dos polinômios na aproximação de Padé consiste em se determinar os coeficientes a partir da expressão:

$$\begin{aligned} (1 + b_1 s + \ldots + b_m s^m) \cdot (V_2[0] + V_2[1]s + \ldots + V_2[n]s^n) \\ = (a_{02} + a_{12}s + \ldots + a_{m2}s^m) \end{aligned} \tag{13}$$

De (13), determina-se diretamente $a_{02} = V_2[0]$. Os demais coeficientes $a_{k2}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ dependem dos coeficientes do denominador da fração de Padé. Ou seja:

$$
\begin{aligned}
a_{12} &= V_2[1] + V_2[0]b_1 \\
a_{22} &= V_2[2] + V_2[1]b_1 + V_2[0]b_2 \\
&\vdots \\
a_{m2} &= V_2[m] + V_2[m-1]b_1 + \ldots + V_2[0]b_m
\end{aligned} \tag{14}
$$

Por sua vez, os coeficientes do denominador da fração aparecem sozinhos no sistema linear que é formado a partir dos coeficientes restantes da série de MacLaurin. Então, continuando o processo de identificação com base nas potências dos polinômios, tem-se

$$
\begin{aligned}
1 \cdot V_2[m+1] + b_1 \cdot V_2[m] + \ldots + b_m \cdot V_2[1] &= 0 \\
1 \cdot V_2[m+2] + b_1 \cdot V_2[m+1] + \ldots + b_m \cdot V_2[2] &= 0 \\
&\vdots \\
1 \cdot V_2[n] + b_m \cdot V_2[n-1] + \ldots + b_m \cdot V_2[n-m] &= 0
\end{aligned} \tag{15}
$$

Os mesmos tipos de equações em (14) e em (15) devem ser levantadas, agora para a variável $V_3(s)$ e os coeficientes de sua série. Da mesma forma, é possível estender o procedimento para um número genérico de nós no circuito.

O objetivo consiste em se calcular inicialmente apenas as variáveis $b_k$, $k = 1, \ldots, m$, utilizando as equações do tipo apresentado em (15) que forem formadas para todas os nós. Uma vez calculadas as variáveis $b_k$, todas as variáveis $a_{ki}$, $k = 1, ..., m$ e $i = 1, ..., N_b$ poderão ser também calculadas. Note-se que a tensão no nó da fonte (nó 1) não precisa ser calculada.

Equações do tipo (15), para as tensões $V_2(s)$ e $V_3(s)$ podem ser arranjadas nos seguintes sistemas lineares, cada um com $(n-m)$ equações e $m$ incógnitas:

$$
\begin{bmatrix}
V_2[m] & V_2[m-1] & \ldots & V_2[1] \\
V_2[m+1] & V_2[m] & \ldots & V_2[2] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
V_2[n] & V_2[n-1] & \ldots & V_2[n-m]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
=
-\begin{bmatrix} V_2[m+1] \\ V_2[m+2] \\ \vdots \\ V_2[n] \end{bmatrix} \tag{16}
$$

$$
\begin{bmatrix}
V_3[m] & V_3[m-1] & \ldots & V_3[1] \\
V_3[m+1] & V_3[m] & \ldots & V_3[2] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
V_3[n] & V_3[n-1] & \ldots & V_3[n-m]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
=
-\begin{bmatrix} V_3[m+1] \\ V_3[m+2] \\ \vdots \\ V_3[n] \end{bmatrix} \tag{17}
$$

Os sistemas (16) e (17) são do tipo:

$$[\mathbf{A}_2]\mathbf{b} = -\mathbf{B}_2 \tag{18}$$

$$[\mathbf{A}_3]\mathbf{b} = -\mathbf{B}_3 \tag{19}$$

Os dois sistemas em (18)-(19), se resolvidos simultaneamente, geram um único sistema linear aumentado, agora com $2(n-m)$ equações. Porém, há um mesmo número de incógnitas $m$. Portanto, ocorre a formação de um sistema sobredeterminado, pois como assumido antes, $n = 2m$.

A partir de (18)-(19), propõe-se duas abordagens para calcular o vetor de variáveis $\boldsymbol{b} = [b_1\ b_2\ \ldots\ b_m]^T$, que serão denominadas de abordagem 1 e 2.

- Abordagem 1
  Nesta abordagem, usa-se o fato de $\boldsymbol{b}$ ser um vetor comum aos sistemas lineares parciais. Somando-se (18) e (19), obtém-se o seguinte sistema linear determinado
  $$([\mathbf{A}_2] + [\mathbf{A}_3])\mathbf{b} = -(\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3) \tag{20}$$
- Abordagem 2
  Por está abordagem, resolve-se o sistema linear sobredeterminado (18)-(19), via mínimos quadrados, de modo que resulta na solução:
  $$\mathbf{b} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \tag{21}$$
  em que $\mathbf{A}$ é a matriz aumentada formada empilhando-se[1] $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$ e $\mathbf{B}$ é obtida pelo empilhamento de $\mathbf{B}_2$ e $\mathbf{B}_3$.

A partir do resultado obtido em (21), determinam-se os coeficientes do numerador $a_{ki}$, $k = 1, \ldots, m$, como em (14), para o caso $i = 2$, e também para $i = 3$. Ficam, assim determinadas as frações de Padé $V_{2[m,m]}(s)$ e $V_{3[m,m]}(s)$. O procedimento é similar, caso mais tensões nodais precisassem ser calculadas, por exemplo, em um circuito genérico com mais nós. Além disso, este procedimento pode ser estendido para o caso de circuitos CA, regime senoidal permanente . Nesta situação, ao invés de fontes CC, estão presentes fontes CA representadas por fasores. Em função disso, os coeficientes $a_{ki}$ e $b_i$ resultarão em números complexos, ao invés de reais. Portanto, as funções de transferência formadas desse modo terão coeficientes complexos, diferentemente das FTs utilizadas para os sistemas dinâmicos tradicionais invariantes no tempo.

Na seção que se segue, demonstra-se que as frações de Padé têm grau de polinômios limitados, que pode ser estimado a partir de dominância modal. Quando se calcula somente a aproximação de Padé, este grau limitante é imperceptível.

### *3.2 Polos e resíduos da fração de Padé*

Interessante notar em (8) que o denominador comum é o mesmo que o polinômio característico de um sistema dinâmico linear. Desta forma, é possível calcular os valores característico, que são também os polos do referido sistema e avaliar suas contribuições para a função de transferência. Por sua vez, a função de transferência pode ser expandida na forma de polos e resíduos. Considerando polos simples, a expansão da aproximação de Padé na forma de FT $V_{i[m,m]}(s)$ é da seguinte forma:

$$V_{i[m,m]}(s) = K_i + \frac{R_{1i}}{s-p_1} + \frac{R_{2i}}{s-p_2} + \ldots + \frac{R_{mi}}{s-p_m} \tag{22}$$

sendo $K_i$ o termo constante da FT, $p_k$ e $R_{ki}$ o k-ésimo polo e o resíduo associado, respectivamente.

Observe-se que as tensões $i = 1, 2, \ldots, N$ do do problema de fluxo de carga podem ser colocadas na forma (22),

[1] Define-se o operador empilhamento $\mathbf{X}$ para os vetores (ou matrizes) $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_q$, como o vetor (ou matriz) resultante $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1^T\ \mathbf{X}_2^T \ldots \mathbf{X}_q^T]^T$

assumindo-se que todas as FTs tenham como entrada $U(s) = 1$, que corresponde a um impulso unitário no domínio da tradicional variável tempo em sistemas dinâmicos. Portanto, os termos com os polos e resíduos podem ser expressos na forma de uma matriz de transferência $\mathbf{H}(s) = [V_{1[m,m]}(s)\ V_{2[m,m]}(s) \ldots V_{N_b[m,m]}(s)]^T$ de um sistema dinâmico com uma única entrada e múltiplas saídas (*single-input single-output* - SIMO) que leva em conta todas as tensões, da seguinte forma (ver Gomes Jr. et al. (2009)):

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{K} + \sum_{k=1}^{N_d} \frac{\mathbf{R}_k}{s - \lambda_k} + \sum_{j=N_d+1}^{m} \frac{\mathbf{R}_j}{s - \lambda_j} \tag{23}$$

em que $\mathbf{K}$ é um vetor contendo os termos constantes da matriz de transferência; $\mathbf{R}_k$ e $\mathbf{R}_j$ são vetores contendo os resíduos associados aos respectivos polos $\lambda_k$ e $\lambda_j$ da matriz de transferência.

Em (23), $N_d$ representa uma quantidade de termos que supostamente dominam o vetor da matriz de transferência $\mathbf{H}(s)$ em relação aos demais $(m - N_d)$. Uma importante contribuição ao se realizar essa separação é a detecção de possíveis polos espúrios que podem estar presentes em função de elevada ordem da fração de Padé. A conversão da aproximação de Padé por FT pode ser útil para filtrar esses polos, que na realidade podem ter contribuição desprezível ou nula para a FT. Isto indica que a dominância modal pode ser utilizada para determinar a ordem máxima do polinômio do denominador da aproximação.

Seja o seguinte exemplo ilustrativo em que a FT é definida por $H(s) = \frac{1}{1-0.5s}$. Suponha os termos da expansão em série de $H(s)$ até a ordem 4. Ou seja, $H(s) \approx 1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{8}s^3 + \frac{1}{16}s^4$. Assuma também que a aproximação de Padé tenha a forma (8). Para essa série, há infinitas formas para a aproximação de Padé. Foi determinada, por exemplo, a fração racional $H(s) \approx \frac{1+2s}{1+(3/2)s-s^2}$. Esta FT tem polos em $s = -1/2$ e $s = 2$, com respectivos resíduos iguais a 0 e -2. Como resultado, a aproximação de Padé por polos/resíduos é simplesmente $H(s) = -\frac{2}{s-2} = \frac{1}{1-0.5s}$. Note-se que o polo em $s = -1/2$ não apresenta contribuição para a fração de Padé original. Isto significa que para a expansão em série abordada, a dominância modal é totalmente relativa ao polo $s = 2$. Comportamento similar seria obtido se a série fosse expandida com 6, 8, 10, $\ldots N$ termos, com $N$ inteiro par. Sempre seria otido o polo $s = 2$ com o resíduo -2 e outros polos (espúrios), porém todos com resíduos nulos.

Evidentemente que no exemplo ilustrativo a expansão em série levou a uma aproximação de Padé que tem uma expansão por polos/resíduos que coincide com a função original, geradora da série de potência. Na prática e em sistemas SIMO, as aproximações levarão a polos dominantes e polos espúrios. Portanto, torna-se importante destacar os polos dominantes do conjunto total de polos. Procedimento como este permite determinar a ordem do sistema dinâmico ou da aproximação de Padé adequada para a variável que se busca calcular em $s = 1$.

### *3.3 HEM com denominador comum em circuito CA*

Nesta subseção, discute-se sobre uma nova modelagem para apresentação e cálculo de uma aproximação de Padé de uma série de potência com coeficientes complexos. Adicionalmente, as frações de Padé são representadas na forma de denominador comum.

As séries de potência das tensões sao representadas em função das potências do parâmetro de adaptação holomórfica $s$. Trata-se de tensões obtidas da resolução do problema de fluxo de carga em redes CA. Neste problema, as tensões nodais são tratadas como funções holomórficas, cujas séries têm coeficientes complexos. Visando apresentar uma formulação em que se manuseie séries com apenas coeficientes reais, propõe-se neste trabalho separar a série de coeficientes complexos em duas de coeficientes reais. Ou seja, em (6), $V_i(s) = V_i^{re}(s) + jV_i^{im}(s)$. Agora, formula-se o problema de modo que as séries sejam representadas por coeficientes reais, definidas por $V_i^{re}(s)$ e $V_i^{im}(s)$, dadas por:

$$V_i^{re}(s) = V_i^{re}[0] + V_i^{re}[1]s + \ldots + V_i^{re}[n]s^n \tag{24}$$

$$V_i^{im}(s) = V_i^{im}[0] + V_i^{im}[1]s + \ldots + V_i^{im}[n]s^n \tag{25}$$

Assim, cada equação em (24) e (24), $i \in PQ\ ou\ PV$, pode ser tratada como uma série de coeficientes reais. Desta forma, a ideia é determinar uma aproximação de Padé para a série $V_i^{re}(s)$, definida por $V_{i[m,m]}^{re}(s)$ e outra para $V_i^{im}(s)$, $V_{i[m,m]}^{im}(s)$. Em função disso, as frações de Padé agora passam a ter também somente polinômios com coeficientes reais. Ao final, a tensão complexa na barra $i$ pode ser calculada como $V_i(s)|_{s=1} = V_{i[m,m]}^{re}(s)|_{s=1} + V_{i[m,m]}^{im}(s)|_{s=1}$.

O objetivo é tratar $V_{i[m,m]}^{re}(s)$ e $V_{i[m,m]}^{im}(s)$ por duas aproximações de Padé independentes, cada uma com seu próprio denominador comum, como representado em (8). Como consequência, o cálculo das frações de Padé pode ser interpretado como a solução de dois circuitos resistivos independentes. Portanto, a mesma discussão tratada para o circuito resistivo da Subseção 3.1 pode igualmente ser aplicada ao caso aqui tratado para as partes real e imaginária das frações de Padé. A partir destes resultados, aplicam-se similarmente as abordagens relativas à representação modal, por polos e resíduos.

Na próxima seção discutem-se resultados de testes realizados para demonstrar a eficácia da metodologia proposta neste artigo.

## 4. TESTES E RESULTADOS

Nesta seção, avaliam-se teste e resultados das metodologias propostas para determinação das aproximações de Padé, destacando-se o cálculo das frações de Padé com e sem denominador comum. Também é feita avaliação da equivalência modal da fração de padé com os seus equivalentes modais. A avaliação leva em conta simulações em testes no circuito resistivo de três nós apresentado na Fig. 1 e em redes CA de 14 e 118 barras.

### *4.1 Sistema Teste com 3 nós*

No circuito da Fig. 1, foram adotados os seguintes dados: $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 0,5\ \Omega$, $R_3 = 0,95\ \Omega$, $V_1 = 3$ V, bem como as injeções de potências nos nós, $P_2 = -0,15$ W, $P_3 = -0,3$ W.

Efetuou-se simulação com o método NR para se determinar a solução considerada de referência para comparação

com o HEM. Foi calculada a solução $V_2^+ = 1,5963$ V e $V_3^+ = 0,9415$, com tolerância $10^{-8}$ para o *mismatch*. Este resultado foi obtido com cinco iterações, partindo-se de valores iniciais de tensão de $1V$ em ambos os nós.

Quando usadas estimativas iniciais para o NR com valores próximos de zero, foi determinada também uma outra solução, de baixa tensão para a barra 2, igual $0,1897V$. Para a barra 3, foi de $1,082V$. Estas duas tensões são consideradas instáveis [2] e por isso somente as tensões $V_2^+$ e $V_3^+$ foram consideradas como referência para comparação das soluções buscadas com as abordagens via HEM.

Realizaram-se simulações para determinação das séries de potência para as tensões $V_2(s)$ e $V_3(s)$. Foram consideradas diferentes ordens $N$ para as séries. Em todos os casos, $N$ é um inteiro par e as frações de Padé têm polinômios no numerador e denominador com mesmos graus máximos, $m = N/2$. Após estes cálculos, foram determinadas aproximações de Padé sem denominador comum para as duas tensões (HEM único) e com denominador comum (DC). As abordagens 1 e 2 foram consideradas separadamente, denominadas DC1 e DC2, respectivamente. Na sequência, foi efetuada a expansão por polos e e resíduos para essas duas abordagens. Por fim, efetuou-se o truncamento modal da expansão em polos e resíduos, considerando-se um índice de dominância modal (IDM), como definido em de Pinho Silveira et al. (2006). Os truncamentos modais para as abordagens 1 e 2 foram denominados, respectivamente, MDC1 e MDC2.

Os índices de Dominância Modal (IDM) são calculados segundo um critério baseado em uma norma pré-estabelecida da fração parcial correspondente ao resíduo $\mathbf{R}_k$ e ao modo $\lambda_k$. Neste artigo, adotou-se o IDM definido para o modo $k$ da seguinte forma $IDM_k = ||\mathbf{R}_k||_\infty / |1 - \lambda_k|$. Usou-se o termo $|1-\lambda_k|$ no denominador, diferentemente de $real(\lambda_k)$, como usualmente recomendado para modelos no domínio da frequência, porque o interesse é pelo resultado para o valor pontual do parâmetro holomórfico em $s = 1$.

As séries de potência foram calculadas variando-se o grau máximo da série em uma faixa de 10 a 50. Portanto, para um dado $N$, foram efetuados os demais cálculos relativos às aproximações de Padé e modal em $s$ (HEM único, DC1, DC2, equivalentes modais para DC1 e DC2, MDC1, MDC2). Fazendo-se $s = 1$, foram determinados os valores das tensões nodais $V_2$ e $V_3$. A Fig. 2 ilustra a evolução dos mismatches das soluções para os procedimentos investigados, como uma função de $N$. Os valores no eixo das ordenadas estão em escala logaritmica na base dez. As frações de Padé calculadas nas simulações, bem como seus respectivos equivalentes modais pleno apresentaram mesmos resultados, como esperado.

A partir da Fig. 2 algumas observações podem ser destacadas:

- A abordagem 2 (DC2) apresenta menor erro que a 1 (DC1);
- A abordagem 2 apresenta erro numérico similar ao HEM com denominador não comum (HEM único) para a faixa de $N$ até 28. Porém, para valores superiores, o HEM único é ligeiramente superior;
- A aproximação dos resultados por truncamento modal (*model order reduction* - MOR) são aproximadamente iguais aos resultados com a expansão completa (*full order model* - FOM)

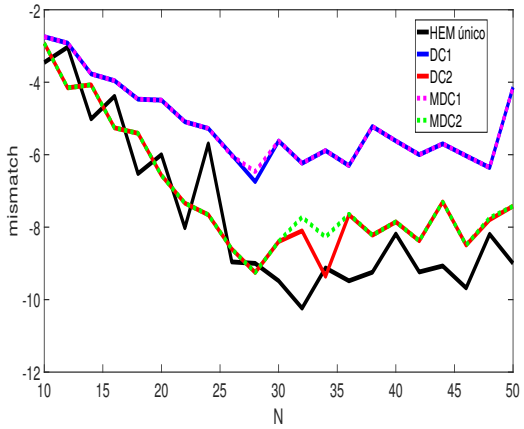


Figura 2. *Mismatch* das abordagens em função da ordem da série de MacLaurin

A Fig. 3 exibe a quantidade de termos, $N_{MOR}$, de polos e resíduos, para se obter os modelos truncados MDC1 e MDC2. Note-se que a partir de $N = 28$ ocorre ligeira estagnação no número de termos das aproximações truncadas. Nestes testes, verifica-se que em média 13 a 14 modos são suficientes para se alcançar soluções com baixos mismatches. Este resultado indica que a ordem $N = 28$ é bastante adequada para a aproximação de Padé, já que o seu equivalente modal além dessa ordem não produz melhoramentos no mismatch. Cabe destacar que esta avaliação é válida para a precisão utilizada nos cálculos (precisão dupla do Matlab, ou seja, com até 15 dígitos de acurácia). Evidentemente, com precisão estendida além disso ocorre modificação na tendência de estagnação nas curvas de mismatches da Fig. 2. Também, causaria saturação mais acentuada, possivelmente sem os picos na Fig. 3. Porém, investigação com precisão mais estendida está fora do escopo deste trabalho e também não é a usual em aplicações práticas envolvendo cálculos em Matlab.

### *4.2 Aplicação para Fluxo de Carga*

Nesta subseção, são descritos os testes e principais resultados sobre aplicação do método HEM ao problema de fluxo de carga. As simulações foram realizados em sistemas testes de 14 e 118 barras. As informações da rede elétrica, incluindo seu carregamento, são as mesmas disponibilizadas nos arquivos *case14.m* e *case118.m* extraídos do aplicativo Matpower em Zimmerman et al. (2011).

O método NR foi utilizado para determinação da solução do PFC para os dois sistemas teste investigados. Para o sistema de 14 barras, foram necessárias 4 interações para convergência, usando tolerância $10^{-8}$. Já para o sistema de 118 barras, foram 3 iterações com a mesma tolerância. As estimativas iniciais para o método NR foram as mesmas utilizadas em Zimmerman et al. (2011).

[2] São tensões que atendem às potências demandadas, tal como em redes CA. No entanto, fisicamente, são tensões instáveis pois, havendo incremento de carga essas tensões tendem a aumentar.

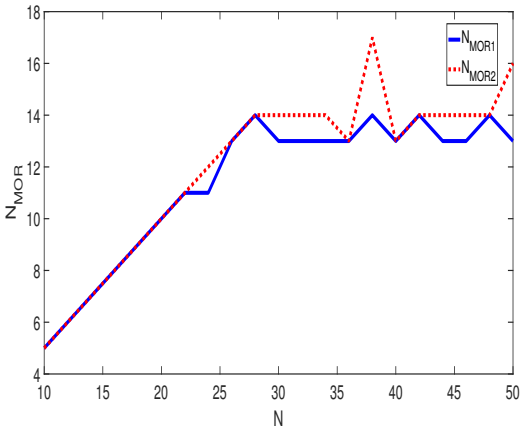


Figura 3. Ordem do modelo reduzido modal para as abordagens 1 e 2, em função da ordem da série de MacLaurin

Resultados similares aos encontrados para o NR, foram obtidos utilizando-se as abordagens do método HEM proposto neste artigo, ao se considerar uma ordem $N$ apropriada para as séries de potência e aproximação de Padé. Verificou-se, para os dois sistemas testes, que ordens em torno de 30 termos são suficientes para prover precisão de mismatch inferior à precisão $10^{-8}$ adotada para o método NR. Note-se que as abordagens via HEM precisam de apenas uma fatoração LU da matriz jacobiana, que ocorrem quando são calculados os primeiros coeficientes das séries de potência. Já o método NR requer fatoração LU a cada iteração. Neste aspecto, considerando que a carga computacional na solução pode ser considerável nessas fatorações, o método HEM apresenta vantagem. Por outro lado, cálculos envolvendo as aproximações de Padé podem demandar carga computacional inexistente no método NR e desta forma onerar o custo computacional do HEM. Este tipo de avaliação é melhor avaliada em sistemas de grande porte, o que está fora do escopo deste trabalho. Na sequência, avalia-se o impacto da ordem $N$ das séries de MacLaurin, bem como das respectivas aproximações por frações, na precisão da solução do problema de fluxo de carga via HEM.

O método HEM foi aplicado de modo semelhante ao descrito para o circuito elétrico de três nós da Subseção 4.1. A diferença dos procedimentos é que aqui os cálculos são realizados para duas séries de coeficientes reais, resultados de uma série com coeficientes complexos de cada tensão de barra. O objetivo é avaliar como a ordem da série, da fração de Padé e de seus equivalentes modais (FOM e MOR) impactam na precisão da solução do problema de fluxo de carga. As variantes discutidas com relação às aproximações de Padé e dominância modal são investigadas.

As séries de potência foram calculadas para $N$ variando de 10 a 80, em passos de 10. As partes real e imaginária da tensão complexa foram separadas, formando duas séries de MacLaurin com coeficiente reais. Em seguida, foram determinadas as frações de Padé de cada uma dessas séries de potência. As abordagens 1 e 2 (simulações DC1 e DC2) foram utilizadas para esta finalidade. Foram calculados os equivalentes modais das aproximações de Padé e investigada a dominância modal para esses equivalentes (MDC1 e MDC2).

Realizou-se também o cálculo da aproximação de Padé para cada tensão complexa diretamente, sem utilizar denominador comum (HEM único). Nesta simulação, não foram determinados equivalentes modais.

A Fig. 4 ilustra os gráficos de mismatches das soluções para as variantes dos métodos investigados para o sistema de 14 barras. Os dados no eixo das ordenadas são em escala logaritmica na base 10.

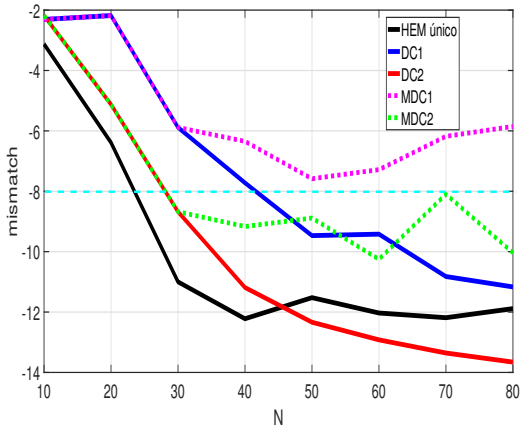


Figura 4. Mismatches das abordagens em função da ordem da série de MacLaurin para o sistema de 14 barras

Dos métodos investigados para o sistema de 14 barras, e considerando uma referência de $10^{-8}$ (ver linha ciano pontilhada na Fig. 4), verifica-se que a abordagem por aproximação de Padé com denominador não comum e usando coeficientes complexos (HEM único) é o que requer menor grau $N$ da série de MacLaurin para alcançar essa referência, com $N$ inferior a 30. Todavia, o método DC2 (aproximação de Padé, abordagem 2, com denominador comum) e seu equivalente modal também precisam de ordem inferior a 30, porém com tendência de maior ordem que a abordagem HEM único. O truncamento modal (MDC2) indica que, para ordens $N$ superiores a 30, ocorre estabilização nos mismatches. Este é um indicativo que serve, por exemplo, como limitador para a ordem das aproximações de Padé. O truncamento modal foi efetuado com IDM máximo igual a $10^{-7}$. A abordagem DC1, apesar de atingir a referência $10^{-8}$, precisa de ordem superior a 30. Portanto, com desempenho inferior às abordagens HEM único e DC2/MDC2. A redução modal para o método DC1 não alcançou a tolerância $10^{-8}$. Neste caso, o índice de truncamento modal, IDM, precisaria ser reduzido para essa abordagem.

A Fig. 5 exibe as características similares de mismatches levantadas quando as simulações são realizadas no sistema de 118 barras. Comportamento bastante parecido é identificado ao verificado para o sistema de 14 barras. Entretanto, os mismatches caem abaixo da referência $10^{-8}$ já para $N < 20$ para a abordagem HEM único. Essa referência é alcançada com $N = 24$ quando as abordagens DC2 e MDC2 são empregadas. Quando a abordagem DC1 e seu equivalente modal são utilizados, são necessários 28

termos na série de MacLaurin. Observa-se que os equivalentes modais truncados (MDC1 e MDC2) tendem a estabilizar para valores de $N$ superiores a 30, indicando, no entanto, que valores acima desse limite não melhoram a qualidade das aproximações. Esta constatação é confirmada observando os mismatches das abordagens HEM único, DC2 e DC1, que estabilizam completamente a partir de $N = 40$. Portanto, para o sistema de 118 barras, valores de $N > 40$ são ineficazes para se obter aproximações de Padé e de equivalentes modais reduzidos, qualquer que seja a abordagem empregada.

As análises destacadas valem para os pontos de operação pontuais das redes em estudo. Havendo alteração dos carregamentos, despacho de geração e topologia da rede elétrica, outro comportamento poderá ser observado.

No estudo para os dois sistemas testes, a abordagem HEM único foi a que apresentou melhor convergência para a referência estabelecida, em comparação às abordagens DC1 e DC2. Porém, a mesma é baseada no cálculo de uma aproximação de Padé, com denominador não comum às variáveis holomórficas de tensão. Além disso, usa grandezas complexas. A vantagem de utilizar as outras abordagens, porém, é o fato das mesmas utilizarem denominador comum para todas as tensões holomórficas. Outro aspecto positivo é o fato de se lidar com coeficientes reais, permitindo o manuseio de técnicas de controle linear clássico, como a abordagem modal.

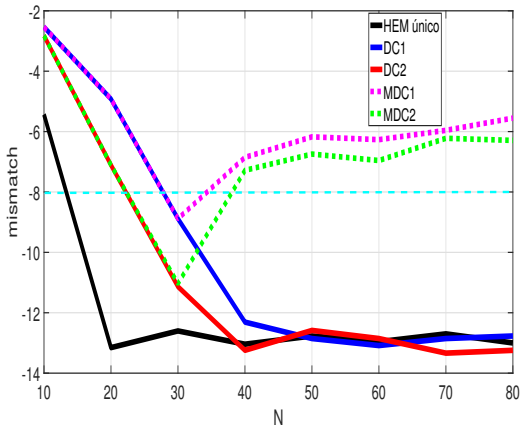


Figura 5. Mismatches das abordagens em função da ordem da série de MacLaurin para o sistema de 118 barras

## 5. CONCLUSÃO

Este artigo apresentou estudo sobre a aplicação do método HEM ao problema de fluxo de carga. Foram propostas duas abordagens para o cálculo de aproximações de Padé com fração racional tendo denominador comum. Estas aproximações são realizadas a partir das partes real e imaginária das séries de MacLaurin que resultam das tensões holomórficas expandidas em séries de potência. Cada uma dessas partes da série gera uma aproximação com o seu próprio denominador comum. Portanto, apenas séries do parâmetro holomórfico $s$, com coeficientes reais, são manipuladas. Este procedimento permitiu que técnicas de controle linear fossem utilizadas para se obter um equivalente modal das aproximações de Padé. Neste caso, o denominador comum nas frações permitiu o cálculo dos polos para todas as tensões holomórficas. Com isto, foi possível aproximar as frações de Padé por expansão em frações na forma de polos e resíduos. Este resultado possibilitou que as contribuições de polos e resíduos fossem avaliadas por meio de um índice de dominância modal a fim de se obter uma expansão reduzida. A redução modal fornece um limiar para o número máximo de termos das séries.

A avaliação das técnicas propostas foi efetuada com base em simulações em um circuito elétrico resistivo e em dois sistemas de potência com 14 e 118 barras. Os testes no circuito elétrico ilustram o uso de séries com apenas coeficientes reais. Já os testes nos sistemas de potência servem para ilustrar o tratamento de séries com coeficientes complexos. Em todos os casos avaliados de séries reais, foi possível calcular as aproximações de Padé com denominador comum e convertê-las em somatórios de termos na forma polos e resíduos. Além disso, determinar a dominância modal com base em um índice IDM.

Nos próximos trabalhos, os autores pretendem investigar outras abordagens de aproximação de Padé com frações contendo denominador comum e expansão na forma de polos e resíduos. Também, aplicar a metodologia a sistemas de grande porte, com diversos carregamentos.

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## REFERÊNCIAS

de Pinho Silveira, B., Pellanda, P.C., Ades, R., and Martins, N. (2006). Redução de ordem de funções de transferência escalares de sistemas elétricos de potência via truncamento modal e reajuste Ótimo da resposta em frequência.

Freitas, F.D., Santos Jr., A.C., Fernandes, L.F.J., and Acle, Y.G.I. (2019). Restarted holomorphic embedding load-flow method based on low-order padé approximant and estimated bus power injection. *Elsevier*, 112, 326–338.

Gomes Jr., S., Martins, N., and Portela, C. (2009). Sequential computation of transfer function dominant poles of s-domain system models. 24. doi:10.1109/TPWRS.2008.2012179.

Monticelli, A.J. (1983). *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. Edgard Blücher.

Rao, S. and Tylavsky, D.J. (2018). Theoretical convergence guarantee versus numerical convergence behavior of the holomorphically embedded power flow method. 98.

Rao, S., Tylavsky, D.J., Feng, Y., and Subramanian, M.K. (2015). The holomorphic embedding applied to the power-flow problem.

Trias, A. (2012). The holomorphic embedding load flow method. doi:10.1109/PESGM.2012.6344759.

Zimmerman, R.D., Murillo-Sánchez, C.E., and Thomas, R.J. (2011). Matpower: steady-state operations, planning and analysis tools for power systems research and education. 26(01), 12–19.