

Predição do Teor de Ferro em Processo de Beneficiamento Mineral usando Modelo Autorregressivo

Vinícius G. R. Gomes* Moisés T. Silva**
Thiago A. M. Euzébio**

* Vale S.A., Nova Lima, MG, Brasil (e-mail:
vinicius.gomes@vale.com)

** Instituto Tecnológico Vale, Ouro Preto, MG, Brasil (e-mail:
moises.silva@pq.itv.org, thiago.euzebio@itv.org)

Abstract: The task of measuring the iron content of ore processed at a plant is complex, but essential to the performance of the operation. In general, this measurement is carried out by means of laboratory analysis which produces a delay of several hours in obtaining the results. In this paper, the iron content prediction is made from the historical data of the laboratory analyzes. These data indicate the contents of the material that feeds the stage of magnetic concentration of a mineral processing unit of the mining company Vale S.A. Initially, analyzes of stationarity, autocorrelation and partial autocorrelation are performed. Then, autoregressive models and the recursive least squares algorithm are used to predict the iron content. The results indicate that the model is able to predict future samples and assist process engineer and control and automation engineer in making decisions.

Resumo: A tarefa de medir o teor de ferro do minério processado em uma usina é complexo, mas fundamental para o bom desempenho da operação. Em geral, esta medição é realizada por meio de análise laboratorial que insere um atraso de algumas horas na obtenção dos resultados. Neste artigo é realizada a predição do teor de ferro a partir dos dados históricos das análises laboratoriais. Estes dados indicam os teores do material que alimenta a etapa de concentração magnética de uma unidade de beneficiamento mineral da mineradora Vale S.A. Inicialmente, são realizadas análises de estacionariedade, autocorrelação e autocorrelação parcial. Em seguida, são usados modelos autorregressivos e o algoritmo de mínimos quadrados recursivos para predição do teor de ferro. Os resultados indicam que o modelo é capaz de realizar a predição das amostras futuras e assim auxiliar os engenheiros de automação e de processos da planta na tomada de decisões.

Keywords: System Identification; Time Series; Recursive least squares; Autorregressive Model; Iron Ore Grade.

Palavras-chaves: Identificação de Sistemas; Séries Temporais; Mínimos Quadrados Recursivos; Modelo Autorregressivo; Teor Minério de Ferro.

1. INTRODUÇÃO

A crescente demanda mundial por produtos industrializados tem levado ao aumento gradativo do consumo de minério de ferro (Lu, 2015). Devido a redução das reservas de alto teor de minério de ferro mundiais, processos de concentração mineral passaram a ter alta importância para as empresas mineradoras. As técnicas de concentração mineral resumem-se à separação do mineral de interesse, no caso o minério de ferro, daqueles que não despertam o interesse econômico. Os teores dos materiais alimentados nos processos de concentração afetam diretamente o desempenho dos circuitos de beneficiamento, sendo tratados, do ponto de vista de controle de processos, como distúrbios.

Dentre as diversas variáveis de um processo de concentração mineral, considera-se como variáveis de distúrbio os

teores de ferro (%Fe) e sílica (%SiO₂) na alimentação, este último é o principal contaminante. Os valores destas variáveis são obtidas através de análise laboratorial química, e possuem um tempo de amostra de algumas horas (a depender da importância do ponto específico do processo de beneficiamento que está sendo amostrado). Este período de amostragem insere atraso em variáveis de extrema importância no processo de beneficiamento mineral. Ou seja, os teores dos materiais a serem alimentados no circuito de beneficiamento no momento atual só serão conhecidos horas após a sua entrada no mesmo. Assim, não é possível utilizar esta medida para monitoramento e consequentes adequações do processo, tais como: taxas de vazão, densidade do material, controle de reagentes, *set-up* de equipamentos, dentre outros. Portanto, com o objetivo de eliminar perdas, torna-se essencial a predição do teor de ferro para realização dos devidos ajustes do processo.

Neste artigo, é realizada a predição do teor de ferro a partir dos dados históricos das análises laboratoriais de uma unidade de beneficiamento mineral da mineradora Vale S.A. A partir dos dados coletados, foram realizadas análises de estacionariedade, autocorrelação e autocorrelação parcial. Após estas análises, modelos autoregressivos foram selecionados para realizar a predição do teor de ferro. Devido a característica dinâmica dos dados coletados, é utilizado o algoritmo dos mínimos quadrados recursivos. Além disso, o desempenho dos modelos são avaliados a partir de três análises estatísticas: RMSE (*Root Mean Square Error*), MAPE (*Mean Absolute Percent Error*) e coeficiente U de Theil. Assim, é possível definir o modelo que apresenta melhor desempenho na predição de um passo a frente dos teores de ferro.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na seção 2, são apresentados os trabalhos que ressaltam a importância da predição dos teores de ferro na indústria mineral e que utilizam séries temporais. A planta de processamento mineral sob estudo é descrita na seção 3. Na seção 4, são apresentadas as análises dos dados de teor de ferro. Além disso, o algoritmo de predição é detalhado. Os resultados da predição do teor de ferro são apresentados na seção 5. Na seção 6, as conclusões são discutidas.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção são apresentados os trabalhos que ressaltam a importância da predição dos teores dos minerais de interesse na indústria mineral, bem como trabalhos que apresentam soluções utilizadas na modelagem de séries temporais.

Existem diferentes técnicas de predição de séries temporais, utilizadas de acordo com as restrições e objetivos que deseja-se alcançar. Em Weigend (2018) é apresentada uma comparação de diversas técnicas de predição de séries temporais. Já em Fan and Yao (2008), são apresentados diversos métodos para a predição de séries não lineares, seja através de modelos paramétricos ou não.

O trabalho de Kumral (2015) demonstra como as variações nos teores dos minérios impactam financeiramente nos resultados de uma planta de processamento mineral e propõe uma estratégia de minimização de perdas, baseada em conceitos e técnicas de gestão da qualidade. Em Tasdemir (2013) apresenta uma análise de série temporal, através de um modelo autorregressivo de ordem 1 para determinar as correlações entre os teores de cromita e ferro nos fluxos de alimentação, concentrado e rejeito de uma planta de processamento de cromita. Por outro lado, Guo (2010) apresenta um estudo que propõe a utilização de simulação através de redes neurais para a estimação do teor de minério de ferro. Neste caso, propõe-se a utilização de um dispositivo portátil que, através da leitura de sensores de susceptibilidade magnética instalados *in loco*, possibilita a simulação e estimação dos teores.

Uma outra abordagem é apresentada por Mahmoudabadi, Izadi, and Menhaj (2009), os autores propõem uma aproximação híbrida, baseada em rede neural, neste caso MLP (*Multilayer Perceptron*) e algoritmos genéticos, visando aumentar a eficiência da estimação dos teores de minério de ferro. Inicialmente, a rede MLP é utilizada para estimar

os teores, posteriormente a abordagem híbrida é aplicada para refinar o procedimento de treinamento. De outra forma, Patel, Chatterjee, and Gorai (2017) apresentam um estudo em que propõem o desenvolvimento de um sistema de visão, utilizando o algoritmo SVR (*Support Vector Regression*) para realizar a predição, em tempo real, dos teores de ferro nos minerais presentes em correias transportadoras em movimento.

3. A PLANTA DE PROCESSAMENTO MINERAL

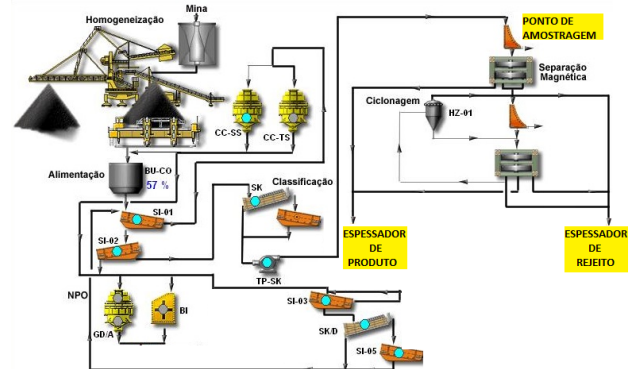


Figura 1. Representação da Planta de Processamento Mineral.

A planta de processamento mineral da Vale S.A., em Mina de Fábrica, é composta por uma etapa de beneficiamento mineral e por uma etapa de pelotização. O produto alimentado na etapa de pelotização possui limites muito específicos de ferro e sílica e, para o correto funcionamento desta etapa, é necessário haver um fluxo contínuo de *Pellet-Feed*¹.

A etapa do processo responsável pela concentração do teor de ferro do material a ser alimentado na pelotização é a separação magnética. A eficiência desta etapa depende do desempenho das estratégias de controle deste processo, que, por sua vez, é altamente afetado pela variação dos teores do material alimentado. A imprevisibilidade destas variáveis acarretam, portanto, variações nos parâmetros de eficiência da separação magnética. Assim, impacta diretamente o desempenho da etapa de pelotização, gerando prejuízos financeiros.

O material alimentado na etapa de separação magnética, no processo em questão, passa por algumas etapas de pré-processamento, são elas: britagem, peneiramento e classificação espiral. Estas etapas são responsáveis pela cominuição, peneiramento e classificação do ROM² (*Run Of Mine*), garantindo que o material apresente granulometrias desejadas, para que sejam processados adequadamente nos diferentes processos. A Figura 1 representa a planta de processamento mineral em estudo. Além disso, o ponto onde são retiradas as amostras analisadas em laboratório é destacado.

¹ *Pellet-Feed* é o produto de uma planta de beneficiamento mineral, destinado ao processo de pelotização, possuindo características físicas e químicas de acordo com as especificações.

² ROM - material extraído da frente de lavra da mina e destinado à planta de beneficiamento mineral.

Com objetivo de realizar a predição do teor de ferro, foram coletados dados históricos das análises laboratoriais, através do PIMS (*Plant Information Management System*), durante aproximadamente 14 meses. Os dados utilizados são provenientes de análises químicas dos teores do material presente no tanque pulmão, que alimenta a etapa de concentração magnética da Mina de Fábrica em Congonhas - MG. A coleta do material a ser analisado em laboratório é realizada a cada duas horas. A Figura 2 apresenta um excerto dos dados amostrados em laboratório no período em questão. Conforme apresentado nas próximas seções, estes dados são utilizados para predição do teor de ferro.

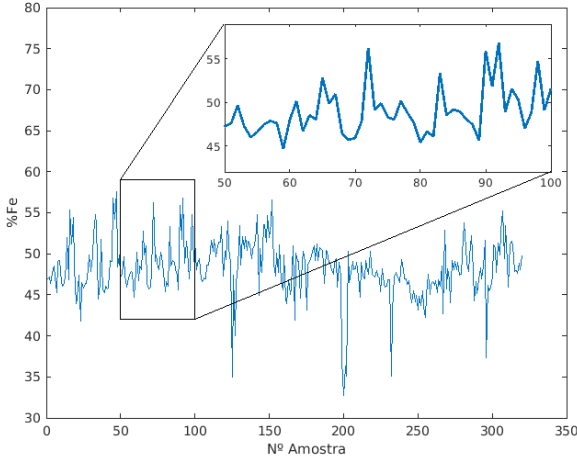


Figura 2. Série temporal do %Fe - Excerto dos dados retirados do PIMS.

4. O MODELO AUTORREGRESSIVO

Um modelo geral pode ser representado por:

$$\begin{aligned} A(q)y(k) &= \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}v(k), \\ y(k) &= \frac{B(q)}{F(q)A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)A(q)}v(k), \\ y(k) &= G(q)u(k) + H(q)v(k), \end{aligned} \quad (1)$$

sendo q^{-1} o operador de atraso, tal que $y(k)q^{-1} = y(k-1)$, $v(k)$ representa o ruído branco. Os polinômios $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ e $F(q)$ são definidos a seguir:

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 - a_1q^{-1} - \dots - a_{n_y}q^{-n_y}, \\ B(q) &= b_1q^{-1} - \dots - b_{n_u}q^{-n_u}, \\ C(q) &= 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_v}q^{-n_v}, \\ D(q) &= 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d}, \\ F(q) &= 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f}. \end{aligned} \quad (2)$$

O modelo autoregressivo (AR, do inglês *autoregressive*) pode ser obtido tomando-se $C(q) = D(q) = F(q) = 1$ e, desconsiderado os sinais exógenos, ou seja, $u(k) = 0$. Nesse caso (1) pode ser reescrito como:

$$A(q)y(k) = v(k), \quad (3)$$

ou

$$\begin{aligned} y(k) &= a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + \\ &\quad a_{n_y}y(k-n_y) + v(k) \end{aligned} \quad (4)$$

Os modelos AR são usados, frequentemente, para predição de séries temporais, ou situações em que somente se tem um sinal, $y(k)$. Nessas situações, deve-se estimar $A(q)$ usando o sinal $y(k)$, além de uma aproximação de $v(k)$ obtida através de uma distribuição de probabilidade. Convencionou-se a indicação do modelo AR com polinômio $A(q)$ com ordem p , por $AR(p)$, ou, considerando-se a equação (2), por $AR(n_y)$.

4.1 Análise de Estacionariedade

De acordo com Hamilton (1994), um processo é estacionário se para todo valor de $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$, a distribuição de probabilidade conjunta da série temporal $(y_t, y_{t+k_1}, y_{t+k_2}, \dots, y_{t+k_n})$ depende exclusivamente do intervalo de tempo separando as amostras $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$ e não do momento em que as amostras ocorreram.

Considerando o modelo autorregressivo

$$y(k) = \rho y(k-1) + v(k), \quad (5)$$

a série temporal $y(k)$ converge ($k \rightarrow \infty$) para uma série estacionária, quando $|\rho| < 1$. Se $|\rho| \geq 1$ a série temporal não é estacionária.

Em Dickey and Fuller (1979) foi definido o teste estatístico denominado *Dickey-Fuller test*, que verifica a hipótese nula da presença de um círculo unitário em um modelo autorregressivo. Utilizando o teste *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) é possível verificar se um modelo autorregressivo é estacionário, ou se apresenta alguma tendência, sendo necessário, neste caso algum pré-processamento. A partir do teste ADF, é possível confirmar que o teste rejeita a hipótese de círculo unitário em um modelo autorregressivo da série temporal em questão, indicando que o comportamento desta série é estacionário.

4.2 Análise de Autocorrelação

A função de autocorrelação (ACF), como apresentado por Box, Jenkins, Reinsel, and Ljung (2015), demonstra como a correlação entre duas amostras quaisquer de uma série temporal se alteram a medida que a separação entre elas se modifica. Conforme Nounou, Bakshi, and Walczak (2000), um processo autocorrelacionado (AR, ARMA ou ARIMA), apresenta valores diferentes de zero para os atrasos, indicando uma correlação entre diferentes amostras. Comumente, para um sinal com erro v_t , a ACF é definida como:

$$\rho(k) = \frac{Cov(v_t, v_{t+k})}{\sqrt{Var(v_t)Var(v_{t+k})}}. \quad (6)$$

Para um sinal estocástico estacionário de variância σ^2 , (6) pode ser reduzida em

$$\rho(k) = \frac{Cov(v_t, v_{t+k})}{\sigma^2}. \quad (7)$$

A análise de autocorrelação dos dados em questão, como apresentado na Figura 3, apresenta um decaimento e um padrão sinusoidal que, conforme Montgomery, Jennings, and Kulahci (2015), trata-se de um padrão típico de séries estacionárias.

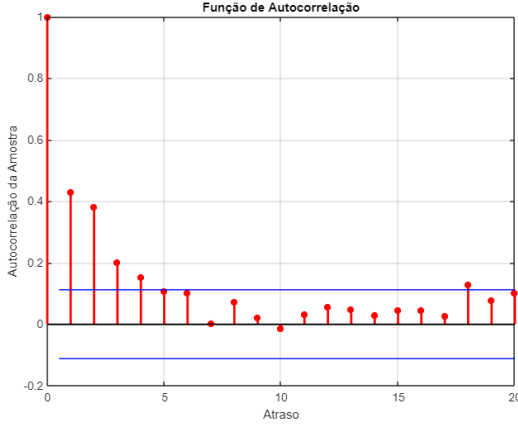


Figura 3. Função de autocorrelação da série temporal.

4.3 Análise de Autocorrelação Parcial

Como apresentado por Montgomery, Jennings, and Kulahci (2015), a função de autocorrelação parcial (PACF) entre y_t e y_{t-k} equivale à função de autocorrelação entre y_t e y_{t-k} após realizados ajustes para $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$. Sendo y_t um modelo de série temporal estacionária (não necessariamente um modelo AR). A princípio, as equações de Yule-Walker³ da ACF de um modelo AR(p) são dadas por:

$$\rho(j) = \sum_{i=1}^k \phi_{ik} \rho(j-i), j = 1, 2, \dots, k \quad (8)$$

Para quaisquer valores de k , o último coeficiente ϕ_{kk} é chamado de correlação parcial do processo para o atraso k . Nesse caso, para um processo AR(p), $\phi_{kk} = 0$ para $k > p$. Sendo assim, diz-se que a função PACF interrompe após atraso p para um processo AR(p).

O gráfico de autocorrelação parcial dos dados sob análise é apresentado na Figura 4. Pode-se observar que a função apresenta um decaimento abrupto após o atraso 2, se aproximando de zero, considerando os limites de significância estatística.

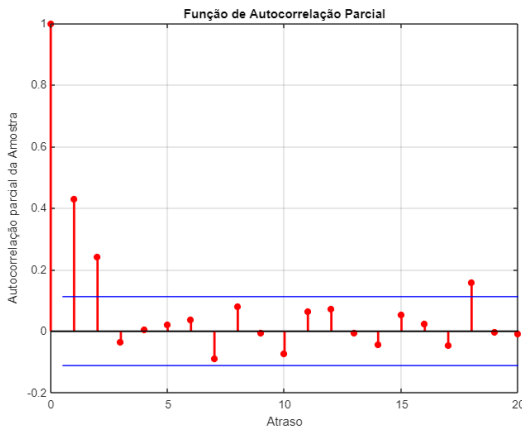


Figura 4. Função de autocorrelação parcial da série temporal.

³ Conhecido método estatístico que fornece uma correlação direta entre os parâmetros de um modelo AR e sua função de covariância.

A Tabela 1, como descrita por Montgomery, Jennings, and Kulahci (2015), apresenta o comportamento de autocorrelação e autocorrelação parcial teóricos para modelos estacionários. Através do comportamento teórico apresentado na Tabela 1, e considerando os comportamentos apresentados pelas análises de ACF (Figura 3) e de PACF (Figura 4), podemos considerar que um modelo autorregressivo de segunda ordem - **AR(2)** - é um bom candidato para representar o comportamento da série temporal dos teores de ferro do processo em estudo.

Tabela 1. Comportamentos teóricos para modelos estacionários.

Modelo	ACF	PACF
AR(p)	<i>Decaimento exponencial</i>	<i>Decaimento abrupto após atraso p</i>
MA(q)	<i>Decaimento abrupto após atraso q</i>	<i>Decaimento exponencial</i>
ARMA(p,q)	<i>Decaimento exponencial</i>	<i>Decaimento exponencial</i>

4.4 Identificação do Modelo

Após determinar a estrutura e a ordem do modelo, é necessário estimar os respectivos parâmetros. O método usado nesta etapa é o método dos mínimos quadrados recursivo. Este método é escolhido devido a característica dinâmica dos dados do processo.

O principal objetivo é obter um modelo que forneça uma representação dos teores de ferro dos minerais alimentados da plantas de beneficiamento mineral. Assim, é obtida uma representação mais próxima da realidade do que a utilizada comumente, a do modelo ingênuo (*naive model*). O modelo ingênuo simplesmente define o último valor observado como uma previsão para o valor futuro que deseja-se estimar, ou seja:

$$y_{k+1} = y_k. \quad (9)$$

No método dos mínimos quadrados, conforme demonstrado por Aguirre (2004), dado um sistema matricial

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Psi} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\xi}, \quad (10)$$

sendo $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$ o vetor de resíduos, é possível observar que $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{y} - \mathbf{\Psi} \hat{\boldsymbol{\theta}}$, ou seja, os resíduos são formados pela diferença entre o vetor de variáveis independentes $\mathbf{y}$ (no caso em questão os valores amostrados dos teores de ferro) e do vetor de valores dos regressores $\mathbf{\Psi}$, através do vetor de parâmetros estimados $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Busca-se o melhor modelo aproximado, neste caso, um vetor de parâmetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ que minimize $\boldsymbol{\xi}$. Sendo a função de custo dos mínimos quadrados dada por:

$$\sum_{k=1}^N \xi(k)^2 = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} = \|\boldsymbol{\xi}\|^2. \quad (11)$$

Resolvendo o gradiente desta função de custo, obtém-se a equação dos parâmetros do sistema matricial (10), através da seguinte equação:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi}]^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{y}. \quad (12)$$

De acordo com Isermann and Münchhof (2010), para o algoritmo dos mínimos quadrados recursivos, tem-se:

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{\Psi}^T(k) \mathbf{\Psi}(k)]^{-1}, \quad (13)$$

$$\mathbf{y}(k) = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(k)]^T, \quad (14)$$

$$\mathbf{\Psi}(k) = [\psi^T(1) \ \psi^T(2) \ \dots \ \psi^T(k)]^T, \quad (15)$$

e sendo

$$\boldsymbol{\psi}^T = [-y(k-1), \dots, -y(k-m)|u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)]. \quad (16)$$

A estimação dos parâmetros para o passo $k+1$ pode ser dada por:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1) = \mathbf{P}(k+1)\mathbf{\Psi}^T(k+1)\mathbf{y}(k+1). \quad (17)$$

Através das devidas manipulações (para detalhes ver Isermann and Münchhof (2010)), obtém-se:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1) = \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{P}(k+1)\boldsymbol{\psi}(k+1)e(k+1). \quad (18)$$

As equações (18), (16) e (15), quando reescritas na forma da (10), permitem realizar a predição de um passo a frente do modelo com os parâmetros e amostras realizadas até o passo k .

De acordo com Isermann and Münchhof (2010) é necessário definir um peso maior das medidas recentes em relação as medições antigas, caso o algoritmo recursivo seja utilizado na estimação de parâmetros de processos que sejam levemente variantes no tempo. Assim, deve-se considerar um fator de esquecimento, que pode ser incorporado ao algoritmo original, dado por:

$$w(k) = \lambda^{N-k}, \ 0 < \lambda < 1, \quad (19)$$

Neste caso, os erros $e(k)$ são contabilizados com os pesos $w(k)$, considerando fator de esquecimento λ exponencial. A escolha deste fator deve ser realizada considerando um compromisso entre melhor supressão de distúrbios ($\lambda \rightarrow 1$) e melhor predição de sistemas variantes no tempo ($\lambda < 1$).

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentadas as análises estatísticas do modelo de predição do teor de ferro. Além disso, os resultados obtidos são discutidos.

5.1 Avaliação de Desempenho do Modelo de Predição

De acordo com Montgomery, Jennings, and Kulahci (2015), a avaliação do desempenho dos modelos de predição deve ser realizada verificando a capacidade da técnica de predição de efetivamente prever as amostras futuras. Neste artigo, utilizaremos as seguintes análises estatísticas:

RMSE - Root Mean Square Error: A representação deste índice pode ser definida como

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (20)$$

A consideração central quando da utilização deste índice, conforme Chai and Draxler (2014), é que os erros das amostras não sejam tendenciosos, mantendo uma distribuição relativamente normal.

MAPE - Mean Absolute Percent Error: Para utilizar esta análise estatística, considerando o erro de predição dos modelos, define-se o erro relativo de predição (em percentual) de um passo a frente, como sendo:

$$re_k(1) = \frac{y_k - \hat{y}_k(k-1)}{y_k} \times 100 = \frac{e_k(1)}{y_k} \times 100, \quad (21)$$

assim sendo, o valor MAPE de um modelo de predição de série temporal pode ser definido por:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |re_k(1)|. \quad (22)$$

Coefficiente U de Theil: Esta análise estatística avalia quanto os resultados obtidos por um modelo de predição são melhores do que uma previsão ingênua ou trivial, ou seja, quando a melhor estimativa do próximo valor é o próprio valor atual. O coeficiente U de Theil é dado por:

$$U = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (y(k) - \hat{y}(k))^2}{\sum_{k=1}^n (y(k) - y(k-1))^2}}. \quad (23)$$

Através deste coeficiente é possível analisar a qualidade de uma previsão através dos seguintes valores do coeficiente:

- Quando $U > 1$, o erro do modelo é maior do que o erro na previsão ingênua;
- Quando $U < 1$, o erro do modelo é menor que o erro na previsão ingênua.

5.2 Resultados da Predição do Modelo AR

A partir dos dados históricos (Figura 2) e utilizando o algoritmo dos mínimos quadrados recursivos apresentado na Seção 4.4, foi realizada a predição de um passo a frente do teor de ferro. A predição um passo a frente permite aos engenheiros de automação e de processos da planta de beneficiamento mineral realizar os devidos ajustes no processo no instante adequado.

Tabela 2. Resultados de predição do teor de ferro amostrado da alimentação da concentração magnética

λ	RMSE	MAPE	U de Theil
Naive	3,6351	5,3093	
1,00	3,2782	4,6807	0,7849
0,99	3,2949	4,7019	0,7875
0,98	3,3155	4,7299	0,7899
0,97	3,3382	4,7719	0,7927
0,96	3,3629	4,813	0,7958
0,95	3,3897	4,8571	0,7992
0,5	6,7618	8,3984	1,3922

A Tabela 2 apresenta os resultados dos índices de desempenho para diferentes valores do parâmetro do fator de esquecimento λ . Como pode ser verificado, o melhor resultado obtido, em todos os três índices, foi com o fator de esquecimento $\lambda = 1$. A variação dos índices de desempenho indica que quanto menor o valor do fator de esquecimento, menor é a eficiência da predição. Este resultado demonstra que para obtenção do melhor desempenho, todas as amostras da série temporal devem ter o mesmo peso no cálculo dos mínimos quadrados. Foi possível verificar também, que a faixa de variação ideal para o fator de esquecimento é de $0,95 \leq \lambda \leq 1,00$, e que o fator com valores muito inferiores a este patamar acarretam na perda significativa da memória da série temporal, degradando seu desempenho.

As Figuras 5, 6 e 7 apresentam, respectivamente, o resultado da predição, a variação do erro de predição (comparado com o erro de predição do modelo *naive*) e a variação dos dois parâmetros do modelo AR(2), considerando o fator de esquecimento $\lambda = 1$.

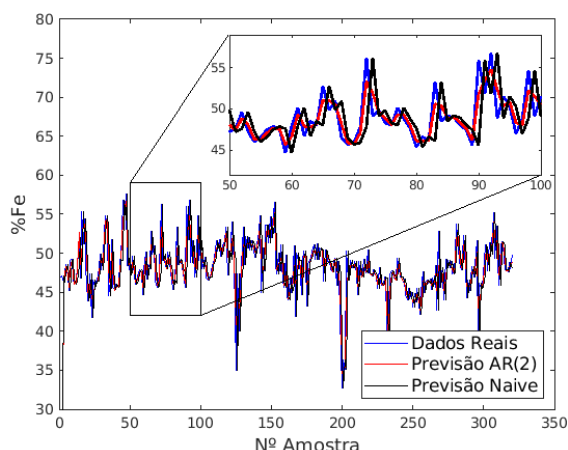


Figura 5. Resultado da predição do teor de ferro na alimentação da concentração magnética - $\lambda = 1$.

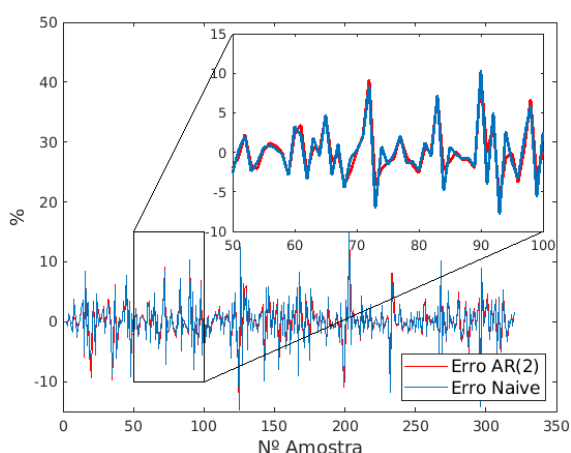


Figura 6. Erros da predição do teor de ferro na alimentação da concentração magnética - $\lambda = 1$.

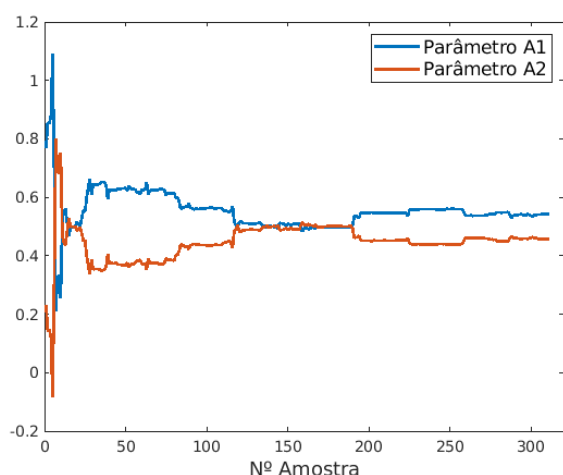


Figura 7. Parâmetros da predição do teor de ferro na alimentação da concentração magnética - $\lambda = 1$.

6. CONCLUSÃO

Neste artigo foi apresentada a predição do teor de ferro de um processo de beneficiamento mineral. A partir da análise dos dados coletados foi selecionado o modelo autorregressivo de ordem 2. Além disso, devido as características

dinâmica dos dados do processo, foi utilizado o algoritmo dos mínimos quadrados recursivo. A partir dos resultados apresentados, pode-se concluir que o modelo AR apresentou bom desempenho na predição do teor de ferro do processo de beneficiamento mineral, agregando informação que anteriormente não era possível de ser obtida, atendendo às necessidades da operação. A abordagem descrita neste artigo também pode ser usado para predição de outras variáveis importantes do processo sob estudo, tais como o teor de sílica ou outros componentes importantes do minério de ferro.

REFERÊNCIAS

- Aguirre, L.A. (2004). *Introdução à identificação de sistemas-Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. Editora UFMG.
- Box, G.E., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., and Ljung, G.M. (2015). *Time series analysis: forecasting and control*. John Wiley & Sons.
- Chai, T. and Draxler, R.R. (2014). Root mean square error (rmse) or mean absolute error (mae)?-arguments against avoiding rmse in the literature. *Geoscientific model development*, 7(3), 1247-1250.
- Dickey, D.A. and Fuller, W.A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American statistical association*, 74(366a), 427-431.
- Fan, J. and Yao, Q. (2008). *Nonlinear time series: non-parametric and parametric methods*. Springer Science & Business Media.
- Guo, W.W. (2010). A novel application of neural networks for instant iron-ore grade estimation. *Expert Systems with Applications*, 37(12), 8729-8735.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time series analysis*, volume 2. Princeton New Jersey.
- Isermann, R. and Münchhof, M. (2010). *Identification of dynamic systems: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media.
- Kumral, M. (2015). Grade control in multi-variable ore deposits as a quality management problem under uncertainty. *International Journal of Quality & Reliability Management*.
- Lu, L. (2015). *Iron Ore: Mineralogy, Processing and Environmental Sustainability*. Elsevier.
- Mahmoudabadi, H., Izadi, M., and Menhaj, M.B. (2009). A hybrid method for grade estimation using genetic algorithm and neural networks. *Computational Geosciences*, 13(1), 91-101.
- Montgomery, D.C., Jennings, C.L., and Kulahci, M. (2015). *Introduction to time series analysis and forecasting*. John Wiley & Sons.
- Nounou, M., Bakshi, B., and Walczak, B. (2000). Multiscale methods for denoising and compression. *Wavelets in Analytical Chemistry*, 119-150.
- Patel, A.K., Chatterjee, S., and Gorai, A.K. (2017). Development of machine vision-based ore classification model using support vector machine (svm) algorithm. *Arabian Journal of Geosciences*, 10(5), 107.
- Tasdemir, A. (2013). Analysis of chromite processing plant data by first order autoregressive model. *Physicochemical Problems of Mineral Processing*, 49.
- Weigend, A.S. (2018). *Time series prediction: forecasting the future and understanding the past*. Routledge.