

# Análise e controle de um sistema com atraso de transporte sujeito a perturbações aditivas

Gabriel G. Maraschin\* Leonardo J. Fiori\*  
Manoel K. Dutra\*\* Rômulo L. Milhomem\*

\* *Instituto Federal de Santa Catarina, Chapecó (SC), Brasil (e-mail: gabriel\_germano10@hotmail.com, leonardo.jf@aluno.ifsc.edu.br, romulo.milhomem@ifsc.edu.br).*

\*\* *Instituto Federal de Santa Catarina, Tubarão (SC), Brasil (e-mail: manoel.kolling@ifsc.edu.br).*

---

**Abstract:** This work seek to present the applicability of an approach that involves the analysis and control of systems with transport delay subject to persistent additive disturbances. For the control methodology tests, a temperature control experiment is modeled for use in a Smith's Predictor, to compensate for the transport delay. Besides the application of the control using the predictor, it is desired to observe the convergence of the trajectories of the system states, in closed loop, to an invariant ellipsoidal set, which is an attractor for the system states. From formulated LMIs conditions, there is a matrix of gains for states feedback controller, from criteria that minimize an attractor set to which the state paths converged. The usefulness of the approach explored and practical application proposed is shown throughout the work.

**Resumo:** Este trabalho busca apresentar a aplicabilidade de uma abordagem que envolve a análise e o controle de sistemas com atraso de transporte sujeito a perturbações aditivas persistentes. Para os testes da metodologia de controle, um experimento de controle de temperatura é modelado para utilização em um Preditor de Smith, para compensação do atraso de transporte. Além da aplicação do controle com o preditor, deseja-se observar a convergência das trajetórias dos estados do sistema, em malha fechada, para um conjunto elipsoidal invariante, que é atrator para os estados do sistema. A partir de condições LMIs formuladas, encontra-se uma matriz de ganhos para um controlador por realimentação de estados, a partir de critérios que minimizam um conjunto atrator para o qual as trajetórias dos estados convergiram. A utilidade da abordagem explorada e da aplicação prática proposta é mostrada ao longo do trabalho.

*Keywords:* Robust Control; Transport Delay; Additives Disturbances; Applied Control.

*Palavras-chaves:* Controle Robusto; Atraso de Transporte; Perturbações Aditivas.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas que possuem algum tipo de atraso no sinal de controle são associados, em geral, à dissipação de energia, transporte de massa, ou transporte de dados. Este fenômeno, definido como atraso de transporte, é o período entre o instante em que é introduzida uma mudança na variável de entrada do processo e o instante em que sua saída começa a responder a esse estímulo (Normey-Rico and Camacho, 2008). Quando o controle de processos com atraso de transporte é tratado via abordagens convencionais surgem alguns fatores que dificultam sua solução: i) o efeito das perturbações não é percebido até que o tempo morto tenha decorrido; ii) o efeito de ação do controle leva algum tempo para ser observado na variável controlada; e iii) a ação de controle que é empregada com base no erro atual e tenta corrigir um evento que teve origem em instantes passados (Normey-Rico and Camacho, 2008).

Para tratar o problema de sistemas com atraso de transporte pode-se utilizar abordagens de controle clássico, ou quando o atraso é dominante, estratégias de controle preditivo podem ser utilizadas para garantir um bom desem-

penho do sistema de controle (Normey-Rico and Camacho, 2008; Santos et al., 2012). Uma solução candidata ao tratamento desse problema pode empregar um Preditor de Smith para eliminar o atraso da planta, permitindo o ajuste de controladores de forma mais simples (Normey-Rico and Camacho, 2008; Milhomem, 2013).

Além da abordagem envolvendo o atraso de transporte, o problema de rejeição de perturbação em um sistema de controle é uma das principais condições a serem resolvidas pela teoria de controle atual (Khlebnikov et al., 2011). Assim, para o caso de um sistema que apresente perturbações persistentes, o mesmo não apresentará um ponto de equilíbrio na origem, e neste caso, não é possível aplicar diretamente os resultados de estabilidade quadrática (Pomar et al., 2012). Neste contexto, o interesse passa a ser analisar a convergência das trajetórias do sistema, em tempo finito, para algum conjunto positivo e invariante que contenha a origem (Khalil and Grizzle, 2002). O problema então consiste em encontrar a maior região de estabilidade assintótica, de forma que, quando o sistema for perturbado, não exceda essa região (Pomar et al., 2012).

Uma forma de investigar o comportamento da perturbação é considerando-a como limitada, ou seja, quando é possível conhecer os valores máximos e mínimos que o sinal de perturbação pode atingir ao longo do tempo, determinando uma faixa de operação na qual esteja inserida (Milhomem, 2013). Em alguns casos, o comportamento da perturbação pode ser abordado através da noção de conjuntos invariantes, que é uma das soluções para problemas de sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas (Pomar et al., 2012). Entre as diversas formas de conjuntos invariantes destaca-se a representação elipsoidal, que possui uma estrutura simples, relação direta com as funções quadráticas de Lyapunov e podem ser resolvidas através de desigualdades matriciais lineares (LMIs) (Boyd et al., 1994). Neste caso, pode-se inserir um modelo do atraso de transporte ao conjunto invariante de perturbação, podendo-se então utilizar uma ferramenta de cálculo para síntese de uma lei de controle que considera a perturbação e o atraso (Milhomem, 2013).

Diferentes autores já trataram sobre o problema de sistemas lineares sujeitos à perturbações limitadas e persistentes, como: Abedor et al. (1996), Fei Hao et al. (2003), Dilda et al. (2012), Pomar et al. (2012) e Milhomem (2013), no caso de sistemas contínuos no tempo; ou JI et al. (2007) e Milhomem et al. (2016) no caso de sistemas discretos no tempo, dentre outros. Nestes trabalhos, estuda-se a convergência das trajetórias do sistema para conjuntos elipsoidais a partir da utilização de funções de Lyapunov quadráticas e de conceitos de conjuntos atratores, adotado em Pomar et al. (2012), Milhomem (2013) e Milhomem et al. (2016), ou o de estabilidade do tipo *ultimate boundedness*, usado por Dilda et al. (2012). Estas soluções podem ser estendidas tratar o caso de análise e projeto de controladores para sistemas com atrasos na entrada de controle, como explorados em Santos et al. (2012) e Milhomem (2013).

Assim, o objetivo do trabalho consiste em apresentar uma aplicação prática para síntese de uma lei de controle que considera a perturbação e o atraso, abordada por Milhomem (2013), para um sistema linear e discreto no tempo, com atraso de transporte e sujeito a perturbações persistentes, que podem ser consideradas limitadas dentro de um conjunto invariante. A utilidade da metodologia abordada por Milhomem (2013), aplicada neste trabalho, permite a inserção dos limites de operação para os parâmetros de perturbação e do atraso de transporte.

O trabalho apresenta a seguinte estrutura. Para imersão do leitor ao assunto, na Seção 2, são discutidos alguns conceitos e definições abordados por Milhomem (2013), que formulam o problema de síntese de realimentação de estados através da abordagem por LMIs, e uma análise dos efeitos do atraso de transporte e das perturbações limitadas abordadas por Santos et al. (2012), para o estudo do problema de controle que consideram esses fatores. Na Seção 3, é apresentado o sistema utilizado para os ensaios, seu funcionamento e modelo matemático. Na Seção 4, são mostradas as ferramentas e os métodos utilizados para o projeto de controle e da sua implementação no *hardware* do sistema usado no experimento. Na Seção 5, são apresentados os resultados das simulações e da implementação do controlador no sistema. Por fim, serão discutidas as conclusões do trabalho.

## 2. SOBRE A SOLUÇÃO IMPLEMENTADA

Apresentam-se, de forma breve, os conceitos abordados em Milhomem (2013) e Santos et al. (2012) para que o leitor se familiarize com a solução teórica estudada. A partir da apresentação do problema de controle, a síntese de uma lei de controle por realimentação de estados é abordada e mostrada sua aplicabilidade em sistemas com atraso de transporte sujeitos a perturbações persistentes. Ao final da seção é feita uma análise da malha de controle com o uso de uma estrutura de compensação explícita do atraso, que utiliza um modelo equivalente do sistema a controlar, sem o atraso, para calcular uma lei de controle que é aplicada ao sistema do experimento.

### 2.1 Apresentação do Problema e Preliminares

Seja o sistema linear, em tempo discreto, com atraso no tempo e sujeito a perturbações

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-d) + w(k), \quad (1)$$

onde:  $k$  é a variável de tempo discreto;  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  e  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  são, respectivamente, os vetores de estados e de entrada de controle, com  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ;  $d$  é o atraso em tempo discreto;  $w(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de perturbações, que por hipótese, é persistente e limitado em um conjunto politópico compacto  $W$  que contém a origem,

$$w(k) \in W \in \mathbb{R}^n, \forall k = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

O conjunto de perturbações  $W$  é definido através de uma representação politópica, construída a partir dos limites do sinal, representado por

$$W = \left\{ w \in \mathbb{R}^n : w = \sum_{j=1}^N \alpha_j w_j, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0 \right\}, \quad (3)$$

onde  $w_j = w_1, \dots, w_N \in \mathbb{R}^n$  são os vértices do politopo.

Portanto, objetiva-se: i) compensar o atraso do sistema apresentado em (1) sujeito a condição (2); ii) encontrar uma lei de controle do tipo realimentação de estados que garanta a convergência dos estados  $x(k)$  para um conjunto atrator, a partir de qualquer estado inicial  $x(0)$  e sujeito a uma perturbação  $w(k) \in W$ .

É possível resolver o problema de controle de (1) desconsiderando o atraso  $d$ , a partir da utilização de um Preditor de Smith (Milhomem, 2013). Assim, considere o sistema,

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k). \quad (4)$$

Se  $u(k) = 0$  e  $w(k) = 0$  em (4), uma condição suficiente para a estabilidade assintótica de  $x(k+1) = Ax(k)$  é que exista uma função de Lyapunov quadrática nos estados do sistema  $V(x(k)) = x(k)'Px(k)$ , com  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz definida positiva, tal que sua variação seja negativa, isto é  $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$ ,  $\forall x(k) \neq 0$ , ou equivalentemente, que as LMIs (5) sejam verificadas (Boyd et al., 1994):

$$P \succ 0; \quad A'PA - P \prec 0. \quad (5)$$

Onde a função  $V(x(k))$  é a matriz  $P$  são conhecidas como função quadrática e matriz de Lyapunov, respectivamente.

Na presença de perturbações  $w(k)$  limitadas, como em (2), e com  $u(k) = 0$ , não é possível aplicar diretamente

os resultados de estabilidade quadrática, uma vez que a origem, em geral, não será um ponto de equilíbrio do sistema. Em consequência, não é possível garantir  $\Delta V(x(k), w(k)) < 0$  em uma certa redondeza da origem. Neste caso, o interessante passa ser verificar a convergência das trajetórias do sistema a um conjunto atrator. Assim, considera-se o seguinte problema (Milhomem, 2013).

**Problema 1 - Síntese de Realimentação de Estados:** *considerando o sistema (4) e a lei de controle*

$$u(k) = Kx(k), K \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (6)$$

*determinar uma matriz de realimentação de estados  $K$  e um conjunto  $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{R}^n$ , o menor possível, tais que para qualquer condição inicial  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  e para todos os vetores de perturbação que verificam (3), as trajetórias correspondentes  $x(k)$  do sistema em malha fechada com a lei de controle (6) atinjam  $\mathcal{V}_0$  num tempo finito  $L$  e permaneçam em  $\mathcal{V}_0 \forall k \geq L$ .*

Para solução do Problema 1, utiliza-se o Teorema 1, cuja prova pode ser consultada em Milhomem (2013). Portanto:

**Teorema 1.** *Considere a existência de  $v \in (0, 1)$ , uma matriz definida positiva  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e um escalar  $c > 0$ , verifiquem*

$$\begin{bmatrix} -R(1-v) & 0 & RA' + Y'B' \\ 0 & -vc & w'_i \\ AR + BY & w_i & R \end{bmatrix} \prec 0 \quad (7)$$

em que  $i = 1, \dots, N$ . Para o sistema (4), considere a matriz de realimentação de estados em (6), definida por:

$$K = YR^{-1} \quad (8)$$

Então,  $K$  e  $\mathcal{V}_0 = \{x(k) \in \mathbb{R}^n / x'R^{-1}x \leq c\}$  definem uma solução para o problema de síntese de realimentação de estados.

Um objetivo complementar de (7) é determinar o menor conjunto elipsoidal  $\mathcal{V}_0$  para o qual converjam as trajetórias sujeitas ao conjunto de perturbação (2), para que possa ser considerado como uma boa aproximação da menor região em torno da origem. Para isso, utiliza-se o conceito de programação semi-definida (SDP), com o objetivo de encontrar  $\mathcal{V}_0$  a partir da otimização de critérios sujeitos as condições LMIs propostas no Teorema 1, buscando-se o menor conjunto elipsoidal  $\mathcal{V}_0$  possível a partir do cálculo do maior semieixo da elipse.

O cálculo do maior semieixo da elipse  $\mathcal{V}_0$  pode ser definido a partir de

$$\alpha_{max} = \sqrt{\frac{c}{\lambda_{min}(P)}} \quad (9)$$

em que  $\lambda_{min}(P)$  é o menor autovalor da matriz  $P$ . Considerando ainda que

$$\lambda_{min}(P) = \frac{1}{\lambda_{max}(R)} \quad (10)$$

onde  $\lambda_{max}(R)$  é o maior autovalor da matriz  $R$ . A partir da relação (9) e da desigualdade

$$R \leq \varphi I, \text{ com } \varphi > 0, \quad (11)$$

onde  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz identidade e  $\varphi$  um escalar, a implementação do Teorema 1 é realizada a partir da SDP

$$\text{Dado } p > 0, \left\{ \begin{array}{l} \min_{R,c,\varphi} (c + p\varphi) \\ \text{sujeito a (7) e (11)} \end{array} \right\}. \quad (12)$$

Escolhe-se  $p$  com o objetivo de ponderar a minimização de  $\varphi$ . Realiza-se então uma busca unidirecional para os valores de  $0 < v < 1$ , com o objetivo de determinar o menor conjunto atrator elipsoidal possível. Portanto, se a SDP (12) possuir solução, a relação (9) é indiretamente otimizada.

## 2.2 Malha de Controle com Compensação do Atraso

Para observação do comportamento do atraso na malha de controle, considere (1), com  $w(k) = 0$ . Deseja-se compensar o atraso através do emprego do preditor apresentado na Figura 1, que possui a previsão dos estados dada por

$$x(k+d|k) = A^d x(k) + \sum_{j=1}^d [A^{j-1} B u(k-j)]. \quad (13)$$

A Equação (13) é dita compensação explícita do atraso, e denota a previsão  $x(k+d|k)$  do vetor de estado  $x(k)$ , encontrada a partir da análise da malha da Figura 1 (Santos et al., 2012). Considerando  $\tilde{x}(k) \equiv x(k+d|k)$ , pode-se estabelecer o sistema a ser controlado a partir do seguinte modelo de previsão, sem o atraso

$$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + Bu(k) \quad (14)$$

Para realizar a compensação do atraso, considera-se que  $\tilde{x}(k)$  seja obtido a partir de (13) com uma dinâmica que obedece a (14). Lembrando que a dinâmica real do sistema é, na verdade, representada por (1) e sujeita a perturbação limitada que respeita a condição em (2). A Figura 1 mostra a estrutura de controle de compensação explícita.

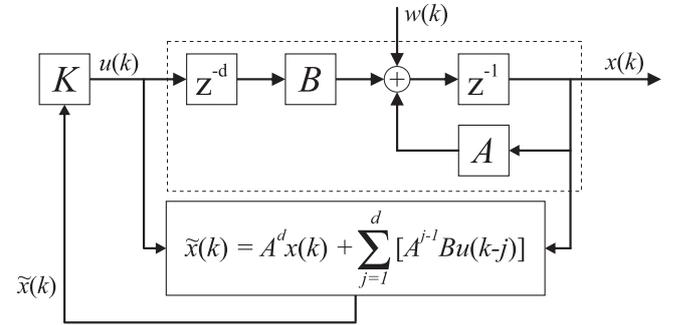


Figura 1. Estrutura de Compensação Explícita do Atraso.

## 2.3 Análise da Malha de Controle com Preditor

O erro de previsão, calculado entre a diferença do estado do sistema compensado  $x(k)$  e o do preditor  $\tilde{x}(k)$ , surge a partir da presença da perturbação  $w(k)$ , dado por

$$e(k) = x(k) - \tilde{x}(k-d) \quad (15)$$

A partir de conceitos explorados por Milhomem (2013), é possível descrever a dinâmica do sistema em malha fechada sem a presença do atraso a partir de:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A\tilde{x}(k-d) + \\ &+ Ae(k) + BK\tilde{x}(k-d) + w(k). \end{aligned} \quad (16)$$

O modelo (16) é uma representação de (1), em malha fechada e sem o atraso. No entanto, por conta da presença do erro de previsão  $e(k)$ , deve-se encontrar uma forma para o sinal  $e(k)$  a fim de definir o novo vetor de perturbação. Assim, para aplicar os resultados do Teorema 1 usa-se

uma representação para dinâmica do erro de predição, considerando o sistema da Figura 1, abordada em Santos et al. (2012), sendo:

$$e(k) = A^{d-1}w(k-d) + A^{d-2}w(k-d-1) + \dots + w(k-1) \quad (17)$$

Em (17) a perturbação possui um efeito cumulativo no erro de predição, mas ao considerar  $w(k)$  limitado,  $e(k)$  também será limitado (Santos et al., 2012). Assim, pode-se representar o conjunto de perturbações, definido a partir do efeito de  $w(k)$  sobre a dinâmica da malha de controle da Figura 1, como:

$$w(k) \in W \Rightarrow \bar{w}(k) \in \bar{W} \equiv (A^d + A^{d-1} + \dots + A + I) W. \quad (18)$$

Se  $W$  é um conjunto compacto que abrange a origem, então o conjunto de todas as realizações do erro de predição  $\bar{W}$  também será um conjunto compacto que inclui a origem. Portanto, pode-se utilizar (18) como o conjunto de perturbações (3), a fim de encontrar uma matriz de ganhos  $K$  utilizando o Teorema 1 a partir do SPD (12) (Milhomem, 2013).

Após o estudo dos conceitos apresentados nessa seção, o objetivo e a principal contribuição do trabalho passam a ser sua aplicação em um experimento prático, cujas características são apresentadas na sequência. Os conceitos apresentados têm sua aplicabilidade a estruturas de controle em que o atraso no tempo seja invariante e conhecido, uma vez que o conjunto de perturbações (18) e a implementação de (13) dependem dessa variável. Para maiores detalhes, consultar Milhomem (2013) e Santos et al. (2012).

### 3. ASPECTOS DO PROCESSO EXPERIMENTAL

Em geral, processos industriais com atraso de transporte podem ser representados através de um modelo de primeira ou segunda ordem, mais o valor do atraso (Normey-Rico and Camacho, 2008). Assim, para a realização do experimento foi utilizado um processo industrial de controle de temperatura em escala, cuja modelagem será apresentada na sequência. Um diagrama representativo do processo é mostrado na Figura 2.

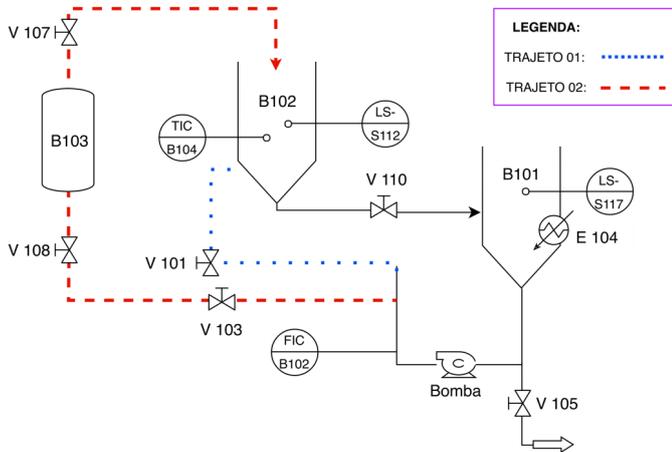


Figura 2. Diagrama: malhas de temperatura.

O processo foi escolhido por sua disponibilidade no Laboratório de Instrumentação e Controle, do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC), Câmpus Chapecó, e por apresentar ferramentas de *software* e *hardware* que possibilitam sua utilização como ferramenta de apoio ao ensino, e aplicação das estratégias de controle apresentadas na Seção 2. A representação das siglas da Figura 2 são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1. Itens Utilizados na Aplicação do Trabalho.

Simbologia	Nomenclatura
B101	Tanque Inferior
B102	Tanque Superior
B103	Tanque Acumulador de Pressão
TIC - B102	Transmissor Indicador de Vazão
TIC - B104	Transmissor Indicador de Temperatura
S117 S112	Sensores de Nível Baixo

Para o processo de controle de temperatura, no modelo da Figura 2, o atraso de transporte surge a partir da diferença de tempo entre o instante que é introduzida uma mudança na potência elétrica do aquecedor E104 (entrada do processo, localizado no tanque inferior B101), e o instante em que sua saída começa a mudar, observado no sensor B104 (localizado no tanque superior B102). A água é o líquido aquecido, que circula do tanque B101 para o B102 a partir de uma bomba, e no sentido inverso por gravidade passando pela válvula manual V110. As válvulas manuais V103 e V101 são ajustadas para definir duas trajetórias distintas para o caminho que a água pode percorrer entre os tanques, podendo-se verificar a dinâmica do atraso para diferentes configurações do processo, indicadas na Figura 2 como Trajeto 01 e Trajeto 02. A vazão do processo, medida pelo sensor B102, é mantida constante, permitindo manter os níveis dos tanques sempre acima da altura indicada pelos sensores S112 e S117.

Para que fosse possível a identificação do atraso e do modelo matemático da planta, realizou-se um experimento baseado na leitura dos dados de entrada e saída do sistema. O experimento baseou-se na circulação de uma certa quantidade de massa de água, que é aquecida no tanque B101 e propulsionada pela bomba até o tanque B102, onde mede-se a temperatura. Foram definidas duas trajetórias diferentes para o caminho que o líquido percorre, um caminho mais curto e outro mais longo. Dessa maneira, os modelos matemáticos poderiam ser levantados para diferentes valores de vazão.

A construção dos modelos matemáticos foi realizada a partir da relação entre os dados de entrada e saída medidos nos testes. Através de uma variação de  $5^{\circ}\text{C}$  em torno da referência ( $2,5^{\circ}\text{C}$  acima da referência e  $2,5^{\circ}\text{C}$  abaixo), pôde-se obter a dinâmica referente ao processo. Os modelos foram estimados diretamente na forma discreta, com representação em espaço de estados, em vista das ferramentas matemáticas apresentadas na Seção 2. A estimação requer a escolha da ordem dos modelos, a forma de representação no espaço de estados e o valor do atraso de transporte em tempo discreto. Vale destacar que a perturbação aplicada ao sistema não foi medida durante o ensaio, mas sim estimada juntamente aos modelos. A perturbação, nesse caso, se comporta como um ruído do processo e o interesse

não é medir este sinal a partir de um distúrbio imposto de forma externa, mas sim apenas considerar a sua existência como uma perturbação inerente ao processo, gerada, por exemplo, através das trocas de calor existentes entre os componentes do sistema.

Para estimação dos modelos foi utilizado um método de Identificação de Modelos por Subespaços, usando o Método  $N_4SID$  (Lennart, 1999). Os modelos matemáticos que melhor representaram o processo foram os de segunda ordem com tempo morto, conhecidos como SOPDT (*Second Order Plus Dead-Time Model*), sendo

$$\begin{aligned} x(k + T_s) &= Ax(k) + Bu(k - \gamma T_s) + Gw(k) \quad (19) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k - \gamma T_s) + f(k) \end{aligned}$$

onde:  $T_s$  é o período de amostragem e  $\gamma T_s$  indica a componente de atraso, sendo  $\gamma = 1, 2, 3, \dots, N$ ;  $u(k)$  e  $y(k)$  são a entrada e saída no instante  $k$ , respectivamente;  $x(k)$  é o vetor de estados e  $f(k)$  é um sinal do tipo ruído branco. Para implementação prática,  $f(k)$  pode ser incorporado ao sinal de perturbação  $w(k)$ .

A princípio foram encontrados dois modelos, para os Trajeto 01 e Trajeto 02, respectivamente. O modelo (20) foi estimado a partir dos dados coletados para o Trajeto 01 e segue o formato de (19). Utilizou-se uma referência de  $42^\circ C$ , vazão constante de  $2,72 \text{ l/min}$ , para um período de amostragem de  $T_s = 35s$ , em que

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0,8503 & 0,003 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0,8241 \\ 0,6906 \end{bmatrix}, \quad (20) \\ C &= [0,02136 \quad 0,0001452], \quad D = [0]. \end{aligned}$$

O modelo (21) foi estimado a partir dos dados coletados para o Trajeto 02 e segue o formato de (19). Utilizou-se uma referência de  $33^\circ C$  e vazão constante de  $3,27 \text{ l/min}$ . O período de amostragem utilizado foi de  $T_s = 35s$ , onde

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1,397 & 1,935 \\ -1,393 & 1,929 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,023 \\ 0,024 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0,845 \\ 0,728 \end{bmatrix}, \quad (21) \\ C &= [1 \quad 0], \quad D = [3,527 \times 10^{-04}] \end{aligned}$$

Em ambos os modelos no tempo contínuo, o valor do atraso identificado foi de  $67s$ , aproximadamente 2 amostras discretas.

### 3.1 Validação dos Modelos Matemáticos

Os modelos (20) e (21) foram validados após a análise das medidas da média quadrática normalizada (RMSE), para verificar a qualidade do ajuste entre a resposta simulada e dos dados de medição. Uma importante ferramenta de validação é a análise residual do modelo, a qual é definida como as diferenças entre as saídas previstas no modelo e a saída medida a partir dos conjuntos de dados utilizados para a validação Lennart (1999).

A primeira indicação de um modelo válido pode ser feita de maneira simples, aplicando-se o RMSE ao conjunto de dados usados para validação e o comparando ao RMSE obtido utilizando o conjunto de dados usados para levantamento do modelo Lennart (1999). Para os modelos (20) e (21) os valores do RMSE para estimativa dos modelos foram respectivamente de  $86,85\%$  e de  $83,05\%$ . Ao se

aplicar o mesmo critério ao conjunto de dados de validação os valores obtidos foram de  $87,64\%$  para o modelo (20) e  $83,45\%$  para o modelo (21), indicando uma boa referência para validade dos modelos. A partir da análise residual, para os modelos (20) e (21), pode-se avaliar a autocorrelação residual e a correlação cruzada entre entrada e saída, as quais são apresentadas nas Figuras 3 e 4:

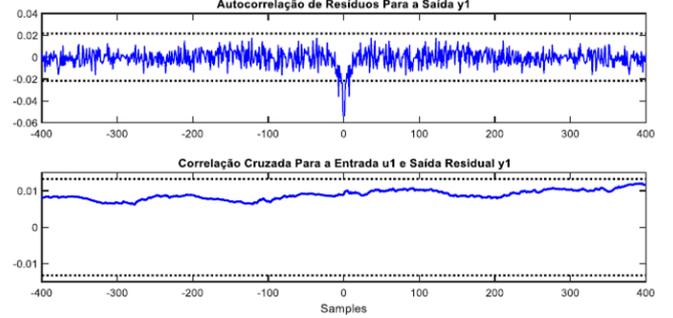


Figura 3. Análise Residual do Modelo (20).

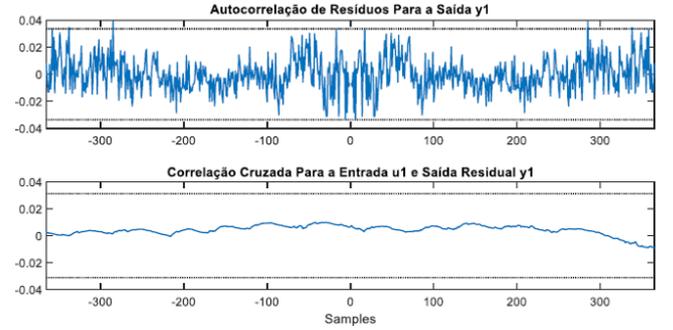


Figura 4. Análise Residual do Modelo (21).

Ao se utilizar um intervalo de confiança de  $99.9\%$ , conclui-se que a autocorrelação entre os resíduos e a correlação cruzada entre entrada e saída residual têm uma probabilidade de  $99.9\%$  de serem estatisticamente insignificantes para os modelos, indicando que os modelos podem ser utilizados de maneira satisfatória.

## 4. PROJETO DO CONTROLADOR

Deseja-se apresentar o funcionamento do algoritmo simulado para a malha de controle da Figura 1, a partir dos modelos reais, já considerando o projeto do controlador e os resultados práticos de sua implementação.

A partir do modelo (19), será apresentada uma abordagem de controle para o desenvolvimento do projeto. A técnica de realimentação de estados é, primeiramente, implementada em simulação utilizando uma parcela integral no estado de temperatura fazendo com que o sistema busque atingir a convergência para a referência em regime permanente. Os ganhos são calculados a partir do Teorema 1, levando em consideração os vetores de perturbação, os atrasos de entrada e os parâmetros do conjunto atrator elipsoidal (Milhomem, 2013). Para isso considere (Ogata, 2011):

$$A_{exp} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{exp} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Dessa maneira, torna-se possível calcular a matriz de ganhos  $K = [K_p \ -K_i]$ , a partir do SDP (12), que leve as trajetórias do sistema ao menor conjunto atrator  $\mathcal{V}_0$  possível (Milhomem et al., 2016).

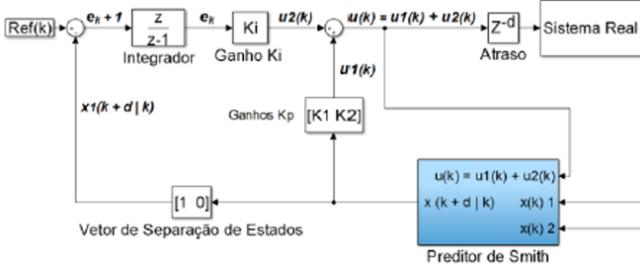


Figura 5. Diagrama do Projeto do Controlador.

Utilizando a malha de controle apresentada na Figura 5, é possível definir o sinal de controle  $u(k)$ , que é calculado a partir do uso do preditor e aplicado ao experimento, sendo:

$$u(k) = K_p \tilde{x}(k) + K_i [T_s e(k) + i(k-1)], \quad (23)$$

onde  $u(k)$  representa a potência elétrica no elemento aquecedor,  $K_p$  e  $K_i$  representam os vetores de ganhos do sistema e  $\tilde{x}(k)$  é a previsão dos estados. O termo  $Z^{-d}$  representa o atraso em tempo discreto. A parte integral  $i(k)$  é composta pela equação discreta (Ogata et al., 1995)

$$i(k) = [T_s e(k) + i(k-1)]. \quad (24)$$

Os resultados das simulações e da aplicação prática do projeto do controlador são mostrados na Seção 5, onde é possível verificar e comparar a previsão e a resposta dos estados do sistema controlado, o erro zero em regime permanente, além da convergência de ambos os estados para a região atratora elipsoidal.

#### 4.1 Implementação do Controlador

A programação das leis de controle (23) e (24) foram executadas no *software* TIA Portal, utilizando um Controlador Lógico Programável (CLP) S7-1200. A implementação de (13) torna-se mais viável a partir da utilização de uma linguagem de texto estruturado (Linguagem de Controle Estruturada - SCL), sendo o programa final uma combinação entre as linguagens SCL e *Ladder*, sendo que o bloco do preditor é aplicado com interrupção cíclica de 35s. O fluxograma de funcionamento do programa é apresentado na Figura 6.

Na execução cíclica do programa as entradas analógicas são escalonadas e normalizadas, o sinal de controle que atua no elemento aquecedor é configurado e o *Data Log* utilizado para a aquisição dos dados é criado. Na primeira interrupção programada, são calculadas as previsões, o erro em relação à referência e o sinal de controle. Este sinal de controle, calculado a partir do emprego do preditor, é então aplicado ao experimento. Na segunda interrupção programada, o sinal de controle e o estado atual são armazenados para que posteriormente sejam utilizados nos cálculos realizados dentro dos blocos *OB31/FB01*, uma vez que, o cálculo da previsão depende de vetores de controles passados.

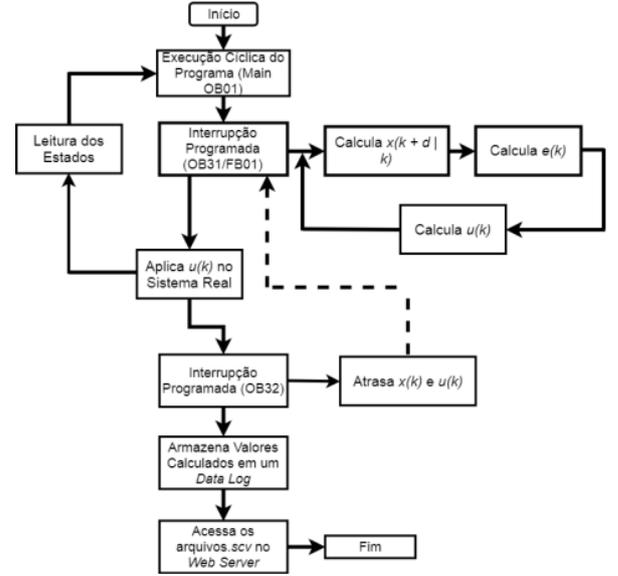


Figura 6. Fluxograma do Programa do CLP.

## 5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

A partir de um modelo equivalente, é estabelecida uma lei de controle via síntese de realimentação de estados, considerando o Teorema 1 e a SPD (12). As simulações dos sistemas foram realizadas conforme a malha de controle mostrada na Figura 5. Para o experimento foi escolhido o modelo (20), uma vez que ambos os modelos apresentam o mesmo atraso discreto  $d = 2$ . O sinal apresentado na Figura 7 foi estimado junto ao modelo e será aplicado no sistema como a perturbação  $w(k)$  no estado de temperatura ( $^{\circ}C$ ).

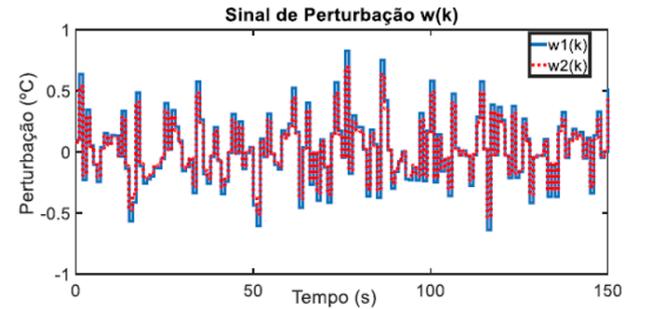


Figura 7. Perturbação aplicada a  $w(k)$ .

O sinal de perturbação é do tipo ruído branco e encontra-se limitado nos intervalos  $w_1(k) \in [0, 824 - 0, 824]$  e  $w_2 = [0, 69 - 0, 69]$ . O conjunto de perturbações ( $W$ ) é definido então pelo polítopo

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} -0,824 \\ -0,69 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,824 \\ -0,69 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0,824 \\ 0,69 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,824 \\ 0,69 \end{bmatrix} \right\} \quad (25)$$

que possui o conjunto de perturbações, para  $d = 2$

$$\bar{W} = (A^2 + A^1 + I) W. \quad (26)$$

Aplicando a SDP (12), considerou-se como valores otimizados os parâmetros determinados a partir do valor mínimo de  $\alpha_{max}$ , ou seja, para a elipse que apresentasse o menor valor para o seu maior semieixo, observando

os resultados para  $p = 1$ , conforme Tabela 2. Então, a partir do Teorema 1, a matriz de realimentação de estados  $K = [K1 \ K2 \ K_i]$  leva qualquer estado inicial  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  ao conjunto positivamente invariante  $\mathcal{V}_0 = \{x(t) \in \mathbb{R}^2 | x'R^{-1}x \leq c\}$ , em tempo finito, a partir da lei de controle  $u(k) = K\hat{x}(k)$ .

Assim, para o primeiro ensaio, avaliou-se a resposta do sistema a um degrau de referência. Definiu-se para as condições iniciais um estado inicial de temperatura de  $37^\circ C$ . O valor da temperatura de referência foi de  $42^\circ C$ , o que permite observar a dinâmica e o desempenho do Preditor e da temperatura do sistema para uma variação de  $5^\circ C$  em torno da condição inicial. A Figura 8 mostra os resultados da simulação para os dados apresentados na Tabela 2.

Tabela 2. Parâmetros obtidos variando-se  $p$  no SDP (12).

Valores Obtidos	$p$		
	0,1	1	10
$V$	0,32	0,34	0,34
$c + p\varphi$	15,3723	61,9089	428,8867
$\phi$	83,7767	43,6510	40,3693
$c$	6,9946	18,2579	25,1936
$\alpha_{max}$	0,656	0,654	0,6585
$volV_0$	0,3545	0,3535	0,356
$K1$	-0,9295	-0,9196	-0,9259
$K2$	-0,0302	-0,0301	0,0302
$K_i$	0,074	0,075	0,0762

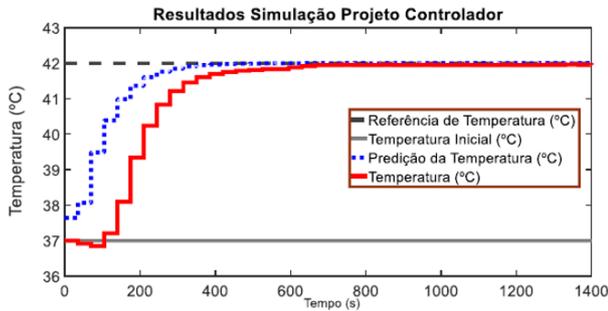


Figura 8. Resultado da simulação do sistema controlado.

Para validar os resultados da simulação apresentada na Figura 8, o Preditor e o projeto do controlador foram implementados no programa do CLP, conforme o diagrama de controle da Figura 5 e do fluxograma da Figura 6. Os resultados da implementação prática são mostrados na Figura 9.

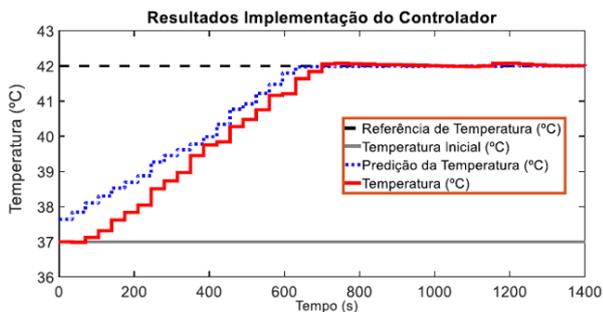


Figura 9. Resultado de implementação no experimento.

Observando as Figuras 8 e 9, nota-se uma dinâmica mais lenta para a convergência à referência, tanto para a predição da temperatura quanto para o estado de temperatura do experimento. Enquanto a predição da temperatura simulada levou aproximadamente 400s para convergir, a predição da temperatura do experimento demorou cerca de 600s. Para o estado de temperatura simulada, o tempo necessário para a convergência foi por volta de 600s, enquanto para a temperatura do experimento, aproximadamente 700s. Tais diferenças devem-se a dinâmicas não contempladas no modelo linear aproximado, como a relação de perda térmica do líquido para o ambiente.

De forma complementar, analisa-se agora o erro entre as predições e as temperaturas, simuladas e do experimento. As Figuras 10 e 11 mostram esses resultados.

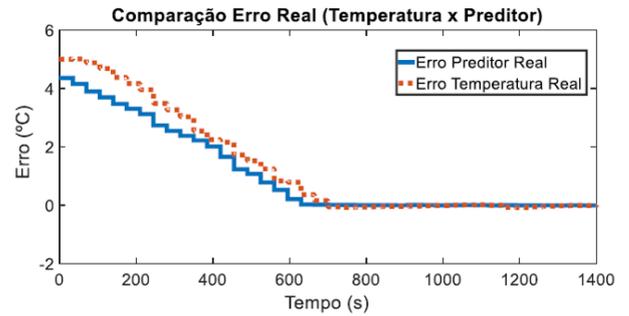


Figura 10. Resultado comparativo para o sinal de erro do experimento.

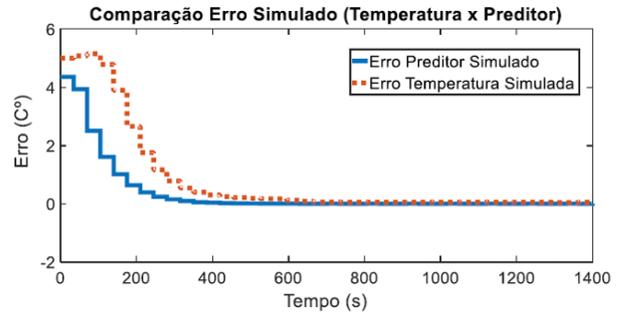


Figura 11. Resultado comparativo para o sinal de erro simulado.

A partir das Figuras 10 e 11, observa-se que os resultados obtidos no sistema simulado convergem ao erro zero mais rapidamente do que no sistema real, tanto para a predição, quanto para a temperatura. Para o teste realizado, o erro zero é obtido no momento que predição e a temperatura alcançam a referência de  $42^\circ C$ , partindo da condição inicial de  $37^\circ C$ . A Figura 12 mostra o conjunto  $\mathcal{V}_0$  e a trajetória dos estados  $x(k)$  do sistema, partindo das seguintes condições iniciais:  $37^\circ C$  para a temperatura e de  $0^\circ C$  para a variação da temperatura. A Figura 13 mostra o conjunto  $\mathcal{V}_0$  e as trajetórias das predições simuladas e do experimento.

A partir das Figuras 12 e 13, constata-se que tanto as predições quanto os estados  $x(k)$  convergem para o conjunto atrator  $\mathcal{V}_0$  e nele permanecem quando quando aplica-se a matriz de ganhos calculada pelo algoritmo,

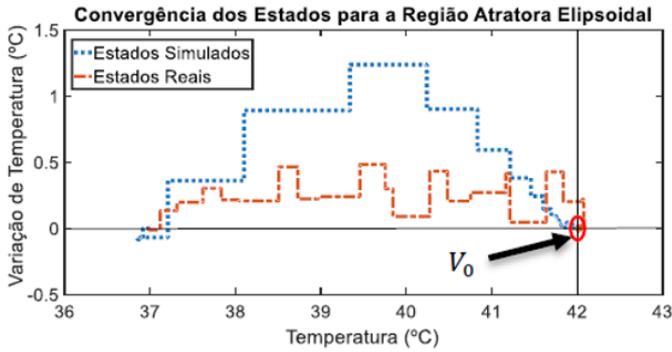


Figura 12. Trajetória de  $x(k)$  e conjunto  $\mathcal{V}_0$ .

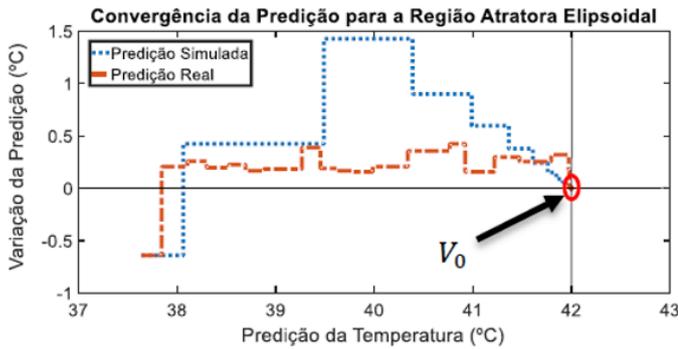


Figura 13. Trajetória de  $\tilde{x}(k)$  e conjunto  $\mathcal{V}_0$ .

conforme Teorema 1. Além disso, conclui-se que o conjunto elipsoidal para o qual as trajetórias de malha fechada convergem é o menor possível, como mostra as iterações da Tabela 2.

## 6. CONCLUSÃO

A partir dos conceitos apresentados na Seção 2, foi possível a implementação prática de um controlador para um sistema linear, com atraso no tempo e sujeito a perturbações aditivas persistentes. Durante a etapa de modelagem matemática, pôde-se levantar os modelos para a planta de temperatura, observando o comportamento da dinâmica do atraso de transporte e da presença do vetor de perturbação.

As simulações e a implementação do controlador, formuladas através das condições em LMIs, foram solucionadas através de uma abordagem envolvendo a utilização do conceito de programação semi-definida, onde a partir da SDP (12) e do projeto de controle mostrado na Figura 5, foi possível obter uma matriz de ganhos que realimentam o sistema, de modo que as trajetórias dos estados, em malha fechada, convergiram ao conjunto atrator elipsoidal encontrado. Buscou-se, durante o trabalho, apresentar uma aplicação prática à abordagem de projeto de controladores para sistemas com atraso de transporte sujeitos a perturbações persistentes apresentada em Milhomem (2013), uma vez que a metodologia leva em consideração o conjunto de perturbações e o atraso de transporte para cálculo dos ganhos do controlador.

Apesar da possibilidade de aplicar outras estratégias de controle ao sistema, por conta da simplicidade dos modelos do experimento, a técnica de controle validada permite a

configuração de algoritmos de controle com atrasos dominantes, além da aplicabilidade em sistemas com entradas de controle sujeitas a não-linearidades, podendo ter estas características adaptadas ao algoritmo implementado no CLP. Neste caso, considera-se que o comportamento da não-linearidade esteja contido em uma faixa de operação conhecida, aproximando o sistema de controle por um sistema linear com perturbação aditiva limitada (Pomar et al., 2012; Milhomem, 2013).

## REFERÊNCIAS

- Abedor, J., Nagpal, K., and Poolla, K. (1996). A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9-10), 899–927.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. Siam.
- Dilda, V., Reginatto, R., and Castelan, E. (2012). Análise e síntese *ultimate boundedness* para sistemas com zona morta no atuador. 1262–1267.
- Fei Hao, Tianguang Chu, Long Wang, and Lin Huang (2003). Robust peak gain problem for uncertain systems via lmi approach. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003.*, volume 1, 845–850 vol.1.
- Ji, X.F., Su, H.Y., and Chu, J. (2007). Peak-to-peak gain minimization for uncertain linear discrete systems: A matrix inequality approach. *Acta Automatica Sinica*, 33(7), 753 – 756.
- Khalil, H.K. and Grizzle, J.W. (2002). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ.
- Khlebnikov, M.V., Polyak, B.T., and Kuntsevich, V.M. (2011). Optimization of linear systems subject to bounded exogenous disturbances: The invariant ellipsoid technique. *Automation and Remote Control*, 72(11), 2227–2275.
- Lennart, L. (1999). System identification: theory for the user. *PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ*, 1–14.
- Milhomem, R.L., Castelan, E., Pomar, M., and Silveira, H. (2016). Condições lmis para para análise e síntese de sistemas lineares em tempo discreto sujeitos a uma classe de perturbações limitadas. In *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática*, 2163–2168.
- Milhomem, R.L. (2013). *Análise e síntese de sistemas sujeitos a uma classe de perturbações limitadas e aplicações*. Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Normey-Rico, J.E. and Camacho, E.F. (2008). Dead-time compensators: A survey. *Control engineering practice*, 16(4), 407–428.
- Ogata, K. (2011). Engenharia de controle moderno. 5ª edição. *Editora LTC*.
- Ogata, K. et al. (1995). *Discrete-time control systems*, volume 2. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Pomar, M., Silveira, H., and Castelan, E. (2012). Condições lmis para análise e síntese de sistemas lineares sujeitos a uma classe de perturbações limitadas. In *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, 2461–2466.
- Santos, T.L., Limon, D., Normey-Rico, J.E., and Alamo, T. (2012). On the explicit dead-time compensation for robust model predictive control. *Journal of Process Control*, 22(1), 236 – 246.