DOI: 10.48011/asba.v2i1.1180

Análise e Controle de um Sistema com Três Graus de Liberdade

Maiza Fossatto * **Leonardo J. Fiori** * **Manoel K. Dutra** ** **Rômulo L. Milhomem** *

* *Instituto Federal de Santa Catarina, Chapecó (SC), Brasil (e-mail: maiza.eps@gmail.com, leonardo.jf@aluno.ifsc.edu.br, romulo.milhomem@ifsc.edu.br).*
** *Instituto Federal de Santa Catarina, Tubarão (SC), Brasil (e-mail: manoel.kolling@ifsc.edu.br).*

Abstract:
This work seeks to present the study of design methodologies controllers and observers applied to a system with three degrees of freedom, built to be used in practical experiments in teaching and research. It intends to demonstrate the practical implementation of designed control system, enabling its usefulness as a teaching tool for modern control concepts, commonly approached in early stages of engineering. Through the implementation of the designed controllers and observers for the system, the results could be analyzed by the previously established criteria, listing a controller and an observer of states appropriate to the system.

Resumo: O trabalho busca apresentar o estudo de algumas metodologias de projeto de controladores e observadores aplicados a um sistema com três graus de liberdade, construído para utilização em experimentos práticos de ensino e pesquisa. Pretende-se demonstrar a implementação prática dos sistemas de controle projetados, possibilitando sua utilidade como uma ferramenta de ensino para conceitos de controle moderno, comumente abordados em etapas iniciais de cursos de engenharia. Através da implementação dos controladores e observadores projetados ao sistema, os resultados obtidos puderam ser analisados de acordo com critérios pré-estabelecidos, elencando um controlador e um observador de estados adequados ao sistema.

Keywords: Three Degree of Freedom System; State-space control; State Observer.

Palavras-chaves: Sistema com três graus de liberdade; Controle no espaço de estados; Observadores de estados.

1. INTRODUÇÃO

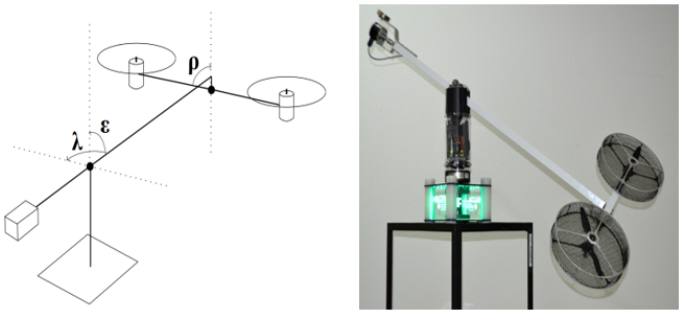
A utilização de sistemas com três graus de liberdade, como ferramenta de ensino, é uma boa prática no sentido de auxiliar o aluno na compreensão de conceitos teóricos sobre sistemas de controle. Este tipo de ferramenta é abordado por Ishutkina et al. (2004), que desenvolveu uma bancada com três graus de liberdade para ensino e pesquisa, semelhante a um helicóptero de rotor duplo. Trabalhos semelhantes foram surgindo, considerando o emprego desse tipo de bancada no ensino e pesquisa, como em Veeraboina and Ordóñez (2018) que realiza a implementação e comparação de diferentes métodos de controle em uma estrutura PID e um controlador por realimentação linearizante, ou Pan et al. (2017) que se utiliza de uma abordagem por LMIs para projeto de controladores por realimentação de estados, com o intuito de melhorar a estabilidade do sistema.

Seguindo as propostas apresentadas por J. Apkarian and Fulford (2012), em Sachet and Milhomem (2019) é desenvolvida uma experiência prática que relata a construção de uma bancada similar a *3 DOF Helicopter* (J. Apkarian and Fulford, 2012). Este experimento busca possibilitar a implementação de metodologias de engenharia de controle a um processo real, onde são apresentados os aspectos construtivos da bancada, sua modelagem matemática, e um projeto de controlador para estabilização do sistema em seu ponto de operação.

Visando explorar as funcionalidades do sistema desenvolvido por Sachet and Milhomem (2019), o presente trabalho busca analisar e desenvolver projetos de controladores e observadores, no espaço de estados, para um sistema multivariável com três graus de liberdade. Adicionalmente, busca-se apresentar a implementação prática das ferramentas utilizadas para o controle desse processo, possibilitando seu emprego como uma ferramenta de ensino para conceitos de engenharia de controle moderno (Ogata, 2011). Serão analisados e aplicados diferentes métodos de projeto de controladores, comumente abordados em unidades curriculares de cursos de engenharia de controle, propiciando ao leitor um guia para utilização e implementação das técnicas de controle aplicadas a esse processo. Por fim, pretende-se realizar uma análise comparativa entre as metodologias projetadas, a partir de critérios pré-estabelecidos.

2. CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA HELICÓPTERO DE BANCADA

A estrutura desenvolvida em Sachet and Milhomem (2019) apresenta três graus de liberdade que estão relacionados com os eixos da bancada, responsáveis pela movimentação do sistema, chamados de movimentos de elevação (ϵ), deslocamento (λ) e arfagem (ρ), vistos na Figura 1a.



a b

Figura 1. a) Eixos de Movimentação. b) Bancada.

Na Figura 1b pode se visualizar o sistema físico que será trabalhado. A partir da Figura 1b, observa-se que a bancada consiste em uma junta rotacional com um corpo rígido fixado, possuindo três eixos principais que constituem os graus de liberdade presentes, representados na Figura 1a. Para movimentação, o sistema possui dois motores do tipo *brushless*, e três *encoders* para sensoriamento do posicionamento angular de cada eixo. Para os modelos matemáticos da bancada, consideram-se a medida dos ângulos em radianos (Sachet and Milhomem, 2019).

2.1 Modelo Matemático

O modelo matemático do sistema da Figura 1, foi explorado em Sachet and Milhomem (2019). Na sequência, será apresentado (de forma simplificada) o desenvolvimento do modelo matemático da bancada. Na Tabela 1 pode-se visualizar os parâmetros numéricos do sistema físico, obtidos por meio de medições e ensaios.

Tabela 1. Constantes do Sistema Físico.

Constante	Magnitude	Unidade
Momento inércia $\epsilon\,(J_\epsilon)$	0,593	$kg.m^2$
Momento inércia $\rho\,(J_\rho)$	0,064	$kg.m^2$
Momento inércia $\lambda\,(J_\lambda)$	0,643	$kg.m^2$
Distância contrapeso (L_ω)	0,400	m
Distância motores (L_a)	0,720	m
Distância eixo motor (L_h)	0,225	m
Massa do contrapeso (m_ω)	0,500	g
Massa haste motores (m_h)	0,990	g
Massa motor frontal $\left(m_f\right)$	0,495	g
Massa motor traseiro $\left(m_f\right)$	0,495	g
Força de propulsão $\left(K_f\right)$	0,280	N/V
Gravidade (g)	9,81	m/s^2

A partir de análises do comportamento da bancada, têm-se as relações que representam os modos de atuação de cada um dos graus de liberdade do sistema, ou seja, que modelam a atuação dos ângulos de elevação (ϵ), arfagem (ρ) e deslocamento (λ), conforme as equações (1), (2) e (3) respectivamente. No decorrer deste trabalho, o termo $t \in \mathbb{R}^+$ que indica a variável tempo contínuo, será omitido por simplificação da apresentação das equações. Assim, considere as equações que indicam a aceleração angular de cada eixo do sistema apresentado nas Figuras 1a e 1b:

$$\ddot{\epsilon} = \frac{L_a K_f\,(V_f + V_t)}{m_w L_w^2 + m_h L_a^2}, \tag{1}$$

$$\ddot{\rho} = \frac{L_h K_f\,(V_f - V_t)}{2 m_f L_h^2}, \tag{2}$$

$$\ddot{\lambda} = \frac{(m_w L_w - m_h L_a)\,g \sin(\rho)}{m_w L_w^2 + m_h L_a^2 + 2 m_f L_h^2}. \tag{3}$$

A partir das equações (1), (2) e (3), o sistema não linear pode ser aproximado por um sistema linear considerando o ponto de operação $[\epsilon_0\ \rho_0\ \lambda_0] = [0°\ 0°\ 0°]$. Utilizando uma aproximação no segundo termo da série de Taylor aplicado à função não linear $\sin(\rho)$, presente em (3), tem-se a seguinte aproximação para pequenos sinais: $\sin(\rho) \cong \rho$. Assim, a equação linear que representa o eixo de deslocamento é dada por

$$\ddot{\lambda} = \frac{(m_w L_w - m_h L_a)\,g\rho}{m_w L_w^2 + m_h L_a^2 + 2 m_f L_h^2}. \tag{4}$$

Como o sistema possui múltiplas entradas e saídas, para fins de construção dos projetos de controladores, será utilizada a notação vetorial-matricial, na qual são aplicadas as teorias de controle moderno. Assim, será utilizada a representação do sistema em espaço de estados

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du, \end{cases} \tag{5}$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a matriz associada aos estados do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ às entradas, $C \in \mathbb{R}^{w\times n}$ é associada as saídas desejadas para o sistema e $D = 0$. Para o modelo em estudo, as dimensões das matrizes associadas são $\{m, n, w\} = \{2, 6, 3\}$. Os vetores x e u representam os estados do sistema e as entradas, respetivamente.

O vetor de estados do sistema é dado por $x' = \left[\epsilon\ \rho\ \lambda\ \dot{\epsilon}\ \dot{\rho}\ \dot{\lambda}\right]'$, e o vetor de entradas $u' = [V_f\ V_t]'$, que são os valores de tensão para os motores (V_f = frontal e V_t = traseiro). As matrizes do modelo (5) são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\ 1\ 0\ 0 \\ 0 & 0 & 0\ 0\ 1\ 0 \\ 0 & 0 & 0\ 0\ 0\ 1 \\ 0 & 0 & 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0 & 0 & 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0 & \dfrac{(m_w L_w - m_h L_a)\,g}{m_w L_w^2 + m_h L_a^2 + 2 m_f L_h^2} & 0\ 0\ 0\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta & \beta \\ \phi & -\phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

onde $\beta = \frac{L_a K_f}{m_w L_w^2 + m_h L_a^2}$ e $\phi = \frac{L_h K_f}{2 m_f L_h^2}$. A matriz (8) utilizada tem por objetivo apresentar as saídas do sistema, que são os três ângulos de saída da planta. Este modelo em espaço de estados apresentado será utilizado ao longo do trabalho para o desenvolvimento dos projetos de controladores e de observadores. Os parâmetros numéricos das matrizes (6) e (7) são obtidos a partir da Tabela 1.

3. SISTEMA DE CONTROLE DA BANCADA

Para o projeto dos controladores e observadores, foram escolhidas metodologias de projetos de controle moderno, que buscam realizar a estabilização do sistema, modelar a resposta para um comportamento desejado, ou a minimização de alguma condição de comportamento ligado ao modelo do sistema.

Utilizando o modelo (5), três projetos de controladores serão abordados e implementados na bancada, sendo: projeto por alocação de polos, projeto via equações de Lyapunov e projeto via LQR (*Linear Quadratic Regulator*). Os controladores projetados para a bancada partiram da utilização de uma única lei de controle, definida por

$$u = -K_\gamma x + K_i \int \xi. \tag{9}$$

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \lambda_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \epsilon \\ \lambda \end{bmatrix} \tag{10}$$

Sendo u o sinal de controle aplicado a (5), x o vetor de estados, ξ o vetor de erros definido em (10) e $K = [K_\gamma \ \ -K_i]$, onde $K \in \mathbb{R}^{\eta \times m}$ e a dimensão η definida por $\eta = n + m$. K é a matriz a ser encontrada no projeto do controlador, sendo as dimensões das matrizes associadas $m, n = 2, 6$.

Em (9) há uma dinâmica integradora associada, que tem por objetivo levar o sistema a rastrear uma referência constante. Na bancada deseja-se que os estados ϵ (ângulo de elevação) e λ (ângulo de deslocamento) sejam regulados para segmento de referência, deixando o ângulo de arfagem livre, uma vez que ρ realiza o movimento do sistema, conforme (4). Dessa forma, utiliza-se a relação (10), na qual $\dot{\xi}$ representa a variação do erro, ϵ_r e λ_r são vetores de referência para os ângulos de saída ϵ e λ. Com isso, pode-se combinar (4) e (10), obtendo as matrizes que relacionam o sistema com a lei de controle (9). Dessa forma, é possível obter a matriz expandida considerando a dinâmica do erro para os estados ϵ e λ (Chen, 1998):

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_a & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

em que $\bar{A} \in \mathbb{R}^{\eta \times \eta}$ e $\bar{B} \in \mathbb{R}^{\eta \times m}$, $C_a \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz de separação, utilizada somente para isolar os estados ϵ e λ, definida por

$$C_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Para a matriz (11), o vetor de estados do sistema é dado por $\bar{x}' = \begin{bmatrix} \epsilon \ \rho \ \lambda \ \dot{\epsilon} \ \dot{\rho} \ \dot{\lambda} \ \xi_\epsilon \ \xi_\rho \end{bmatrix}'$, onde os estados ξ_ϵ e ξ_ρ denotam o erro associado aos estados ϵ e λ, conforme (10).

O projeto da lei de controle será factível se o par $\left[\bar{A}, \bar{B}\right]$ for controlável, então (9) pode posicionar arbitrariamente os autovalores gerados pela matriz de malha fechada $\left[\bar{A} - \bar{B}K\right] \in \mathbb{R}^{\eta \times \eta}$ (Chen, 1998; Dorf and Bishop, 2011; Ogata, 2011).

De forma semelhante ao projeto dos controladores, são explorados dois projetos de observadores para estimação dos estados, uma vez que a bancada da Figura 1 possui três sensores que realizam a medição dos ângulos de elevação (ϵ), arfagem (ρ) e deslocamento (λ), sendo necessário estimar as velocidades angulares ($\dot{\epsilon}, \dot{\rho}, \dot{\lambda}$). O projeto do observador será factível se o par $[A, C]$ for observável, então todos os autovalores de $[A - LC] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ podem ser arbitrariamente alocados por um vetor $L \in \mathbb{R}^{n \times w}$ (Chen, 1998). Os autovalores de $[A - LC]$ definem a velocidade de convergência do observador, uma vez que o erro de estimação $e_b = 0 \Rightarrow \hat{x} = x$, onde $\hat{x}$ denota a estimação dos estados na saida do observador. Equivalentemente, se $[A - LC]$ for estável, então $e_b \to 0$ ao passo que $t \to \infty$ (t denota o tempo contínuo) (Chen, 1998).

Na sequência será discutido a metodologia utilizada para os projetos dos controladores e observadores implementados no experimento. Foram realizados dois projetos de observadores, apresentados no domínio do tempo discreto: o primeiro é conhecido como ordem plena, que utiliza os valores passados para estimação dos estados; o segundo projeto, o observador de tempo corrente, inclui no processo de estimação os valores atuais dos ângulos do sistema (Fadali and Visioli, 2013).

3.1 Projeto via Alocação de Polos

Para o projeto do controlador parte-se da abordagem convencional, na qual define-se polos com dinâmicas dominantes para o sistema em malha fechada. Os polos desejados para o sistema foram definidos como

$$\begin{aligned} \delta = [&-0,25 \pm 0,19j, \ -1,09 \pm 1,63j, \\ &-3,44 \pm 0,52j, \ -6,27, \ -7,41 \ ], \end{aligned} \tag{13}$$

utilizados para o desenvolvimento do controlador de Sachet and Milhomem (2019). Assim, deseja-se obter uma matriz de ganhos $K = [K_\gamma \ \ -K_i]$ para lei de controle (9), encontrada através da matriz de transformação $T = MW$, onde M é a matriz de controlabilidade do sistema

$$W = \begin{bmatrix} a_{\eta-1} & a_{\eta-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{\eta-2} & a_{\eta-3} & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

sendo $W \in \mathbb{R}^{\eta \times \eta}$, cujos coeficientes são obtidos pela relação $\left|sI - \bar{A}\right| = s^n + a_1 s^{\eta-1} + \cdots + a_{\eta-1} s + a_\eta$, onde $I \in \mathbb{R}^{\eta \times \eta}$ é a matriz identidade (Ogata, 2011). Obtêm-se o polinômio característico a partir de (13), representado por $\delta(s) = s^\eta + \alpha_1 s^{-1} + \cdots + \alpha_{\eta-1} s + \alpha_\eta$, onde K é dado por

$$K = [\alpha_\eta - a_\eta \quad \alpha_{\eta-1} - a_{\eta-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1]\, T^{-1}. \tag{15}$$

Os valores encontrados para a matriz K a partir da alocação de polos através da matriz de transformação T são:

$$K = \begin{bmatrix} 36,0890 & 29,7904 & -5,2365 & 14,8807 & \cdots & \cdots & 6,1813 & -7,8576 & -8,0427 & 4,6175 \\ 33,9867 & -15,6585 & 7,2507 & 14,4249 & \cdots & \cdots & -4,3864 & 3,7166 & -9,7877 & 1,5561 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

3.2 Projeto via Equações de Lyapunov

Considerando

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, \tag{17}$$

com $u = 0$, uma condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica do sistema autônomo $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x}$, é que exista uma função quadrática nos estados do sistema $V(\bar{x}) = \bar{x}'P\bar{x}$, onde $P = P' \in \mathbb{R}^{\eta\times\eta}$ é uma matriz hermitiana definida positiva e $\dot{V}(\bar{x}) < 0 \ \forall \bar{x} \neq 0$, ou equivalentemente que as inequações matriciais lineares sejam verificadas

$$P \succ 0, \quad \bar{A}'P + P\bar{A} + Q \prec 0, \tag{18}$$

onde a matriz $Q = Q' \in \mathbb{R}^{\eta\times\eta}$ é definida positiva, sendo P analisada a partir de (18) (Ogata, 2011). Portanto, a partir de (9), busca-se a convergência de (17) para a origem, ou a uma região de estabilidade, em tempo finito. A partir da verificação de (18) espera-se definir uma matriz de ganhos K para (9) que gerem trajetórias mais conservadoras utilizando o procedimento descrito em Chen (1998), apresentado a seguir.

Procedimento 1 - *Seja o par $[\bar{A}, \bar{B}]$ controlável, pode ser encontrada uma matriz K, no qual $[\bar{A} - \bar{B}K]$ contenha os autovalores desejados para o sistema:*

- *i Selecione uma matriz $F \in \mathbb{R}^{\eta\times\eta}$ que contenha os autovalores desejados;*
- *ii Escolha uma matriz $K_f \in \mathbb{R}^{\times\eta}$, de modo que o par $[F,\ K_f]$ seja observável;*
- *iii Resolva a equação de Lyapunov $\bar{A}P - PF = \bar{B}K_f$ para uma única matriz P;*
- *iv Calcule a matriz K de forma $K = K_f P^{-1}$.*

A partir do procedimento acima e considerando (17), é possível desenvolver o projeto do controlador via Equações de *Lyapunov*, sendo as condições de estabilidade verificadas na Equação de Sylvester, que será apresentada adiante. A matriz de autovalores F, pode ser utilizada em sua forma canônica diagonal, definida em:

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f_8 \end{bmatrix} \tag{19}$$

onde os termos de (19) são $f_{1\cdots 8} = [-2,5 \ \ -3 \ \ -1,7 \ \ -4,5 \ \ -1,5 \ \ -1,2 \ \ -5 \ \ -1]$. Vale ressaltar que os autovalores de malha fechada foram escolhidos aqui diferentes do projeto via Alocação de Polos para simplificação da montagem de F e a busca de trajetórias mais conservadoras para os estados, da mesma forma em que F também pode comportar autovalores complexos como apresenta Chen (1998). Na sequência escolhe-se a matriz K_f, conforme condição *ii* do Procedimento 1.

$$K_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

A condição necessária para estabilidade é definida pela Equação de Sylvester

$$\bar{A}P - PF - \bar{B}K_f = 0, \tag{21}$$

onde as matrizes $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são definidas por (11) e (12) (Ogata, 2011). Portanto, a matriz de ganhos K é definida a partir da relação $K = K_f P^{-1}$, sendo:

$$K = \begin{bmatrix} 34,3485 & 37,7202 & -14,5076 & 13,0766 & \cdots & \cdots & 6,4667 & -12,5756 & -25,4395 & 6,0429 \\ 34,1610 & -1,1339 & -5,7251 & 12,9164 & \cdots & \cdots & -2,7349 & -2,8942 & -25,6566 & 3,0865 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

3.3 Regulador Linear Quadrático - LQR

A utilização de um controlador LQR, tem por principal objetivo realizar a otimização do sinal de controle empregado na planta, buscando determinar uma matriz de ganhos K a partir de uma função custo J que representa o consumo de energia dos sinais de controle

$$J = \int \left(\bar{x}'H\bar{x} + u'Ru\right), \tag{23}$$

onde $H \in \mathbb{R}^{\eta\times\eta}$ e $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ são matrizes definidas positivas, que determinam a importância relativa do erro e o consumo da energia do sistema (Ogata, 2011). A escolha de seus parâmetros é realizada a partir da Regra de *Bryson* (Franklin et al., 2013). Portanto

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_\eta \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_m \end{bmatrix} \tag{24}$$

onde

$$\begin{aligned} h_i &= \frac{1}{(x_i)^2}, \ \left\{i \in \mathbb{Z}^+ \ \forall\ 1 \leq i \leq \eta\right\}, \\ r_l &= \frac{1}{(u_l)^2}, \ \left\{l \in \mathbb{Z}^+ \ \forall\ 1 \leq l \leq m\right\}, \end{aligned} \tag{25}$$

no qual os valores dos elementos h_i e r_l da matriz (24) são definidos de acordo com as limitações apresentadas pelo sistema, sendo cada x_i os estados do sistema e u_l os valores dos sinais de entrada (Franklin et al., 2013).

Os valores máximos definidos para a entrada e para os estados do sistema levam em consideração os limites apresentados pelo sistema físico da planta, conforme pode ser visualizado na Tabela 2, onde os termos de (24) são definidos: $h_{1\ldots 8} = [3,6 \ \ 7,4 \ \ 0,11 \ \ 0,23 \ \ 0,23 \ \ 0,23 \ \ 1 \ \ 1]$ e $r_1 = r_2 = 0,0069$. Após a obtenção das matrizes de ponderação H e R, aplica-se a equação matricial reduzida de Riccati (26) (Ogata, 2011).

$$\bar{A}P + P\bar{A} - P\bar{B}R^{-1}\bar{B}P + H = 0 \tag{26}$$

A partir de (26) e do ajuste de H e R pela Tabela 2, a matriz de ganhos K para o controlador é calculada pela da relação $K = R^{-1}\bar{B}P$.

$$K = \begin{bmatrix} 3,1202 & 9,2154 & -2,0776 & 3,0678 & \cdots & \cdots & 2,7498 & -2,1033 & -1 & 1 \\ 3,1202 & -9,2154 & 2,0776 & 3,0678 & \cdots & \cdots & -2,7498 & 2,1033 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Tabela 2. Valores Máximos para o Sistema.

Índice	Variável	Valor_{maximo}
$x1$	Ângulo de Elevação(ϵ)	$0,5236rad$
$x2$	Ângulo de Arfagem(ρ)	$0,3676rad$
$x3$	Ângulo de Deslocamento(λ)	$3,0151rad$
$x4$	Velocidade de Elevação($\dot{\epsilon}$)	$2,0851rad/s$
$x5$	Velocidade de Arfagem($\dot{\rho}$)	$2,0851rad/s$
$x6$	Velocidade de Deslocamento$\left(\dot{\lambda}\right)$	$2,0851rad/s$
$x7$	Erro do Ângulo Elevação ($\dot{e}_\epsilon$)	1
$x8$	Erro do Ângulo Elevação ($\dot{e}_\lambda$)	1
$u9$	Tensão Motor Frontal ($u1$)	$12V$
$u2$	Tensão Motor Traseiro ($u2$)	$12V$

3.4 Projeto do Observador de Ordem Plena

O observador de ordem plena (também conhecido como ordem completa) realiza a estimação dos estados do sistema $\hat{\mathbf{x}}_k$ (Fadali and Visioli, 2013), a partir de

$$\hat{\mathbf{x}}_k = A_d\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + B_d\hat{\mathbf{u}}_{k-1} + L_d\left(y_{k-1} - \hat{y}_{k-1}\right). \tag{28}$$

Em que: $\hat{\mathbf{x}}_k$ denota o vetor de estados discreto gerado pelo observador, $k \in \mathbb{Z}^+$ indica o tempo discreto definido pela relação $t = kT_a$, onde T_a é o intervalo de tempo (período) de amostragem; $L_d \in \mathbb{R}^{n\times w}$ é a matriz de ganhos do observador, $A_d \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B_d \in \mathbb{R}^{n\times m}$ são as matrizes do sistema discretizadas pelo método de derivada direta, na qual $A_d = [T_aA + I]$ e $B_d = [T_aB]$, cuja matriz $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ representa uma matriz identidade (Fadali and Visioli, 2013).

Cabe ressaltar que o observador deve gerar autovalores estáveis e razoavelmente mais rápidos que o controlador, para que a estimação ocorra de maneira adequada (Franklin et al., 2013). Portanto, para o desenvolvimento dos projetos serão considerados autovalores com dinâmica mais rápidas do que a dinâmica almejada para o projeto do controlador, resultando nos seguintes autovalores para os observadores:

$$\gamma = [-2,1 \pm 2j \quad -2,1 \pm 4j \quad -4,8 \pm 2,9j]. \tag{29}$$

Os autovalores desejados em (29) estão descritos no domínio do tempo contínuo. Assim, para o projeto dos observadores no domínio do tempo discreto, foi realizado o mapeamento direto, a partir da relação $\gamma_d = e^{\gamma T_a}$ (Fadali and Visioli, 2013).

O ganho L_d do observador é obtido por meio da aplicação da matriz de transformação $S = (WN')^{-1}$, sendo que para o projeto do observador $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e pode ser definido semelhante a (14), enquanto $N = [C' \; A_d{}'C' \cdots \left(A_d{}'\right)^{n-1} C']$ (Ogata, 2011). Semelhante ao desenvolvimento realizado para o projeto do controlador a partir de (14) e (15), pode-se calcular a matriz L_d, de modo que a matriz $[A_d - L_dC]$ possuam os autovalores desejados ao observador.

$$L_d = \begin{bmatrix} 0,1309 & 0,0385 & -0,0254 \\ -0,0138 & 0,1578 & -0,0090 \\ -0,0272 & 0,0335 & 0,1589 \\ 0,4474 & 0,1090 & -0,0069 \\ -0,1991 & 0,3965 & 0,0871 \\ -0,1191 & -0,2319 & 0,3483 \end{bmatrix} \tag{30}$$

3.5 Projeto do Observador de Tempo Corrente

O observador de tempo corrente tem por diferencial a inclusão do valor de y_k no cálculo de $\hat{\mathbf{x}}_k$ (Ogata et al., 1995), sendo $\hat{A} = A_d - \hat{L}_dCA_d$ e $\hat{B} = B_d - \hat{L}_dCB_d$, com $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Portanto:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \hat{B}\hat{\mathbf{u}}_{k-1} + \hat{L}_dy_k \tag{31}$$

A seguir, são apresentados os valores encontrados para o ganho $\hat{L}_d$, por meio da aplicação da matriz de transformação S, apresentada anteriormente, considerando para isso que a matriz $[A_d - \hat{L}_dCA_d]$ possuam os autovalores desejados ao observador (Ogata et al., 1995):

$$\hat{L}_d = \begin{bmatrix} 0,1336 & 0,0021 & 0,0072 \\ 0,0510 & 0,1224 & 0,0134 \\ -0,0222 & 0,0070 & 0,1614 \\ 0,4189 & -0,1424 & -0,1299 \\ 0,0774 & 0,3938 & -0,0220 \\ 0,0308 & -0,0188 & 0,3904 \end{bmatrix} \tag{32}$$

3.6 Malha de de Controle do Sistema

A malha de controle da Figura 2 apresenta o processo envolvido no sistema de controle do experimento, o qual envolve diferentes abordagens. Para sua implementação, foi utilizado um período de amostragem de $T_a = 25,008ms$, definido em Sachet and Milhomem (2019).

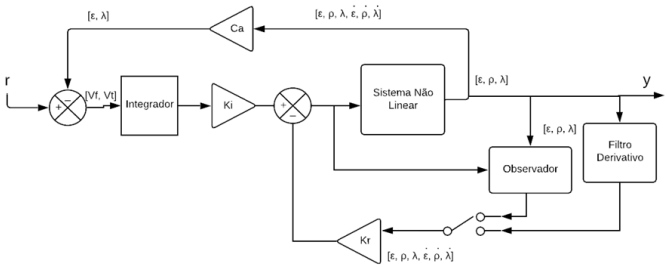


Figura 2. Malha de Controle.

Adicionalmente aos observadores, tambem é utilizado um filtro derivativo como estimador para os estados de velocidade, apresentado em (33):

$$V_k = \left[\frac{2\phi\varphi_k - 2\phi\varphi_{k-1} - \left(T_a - 2\phi T_d\right)v_{k-1}}{T_a + 2\phi T_d}\right], \tag{33}$$

onde φ representa o ajuste na dinâmica do filtro, e T_d a constante de tempo derivativo, v_k e ϕ_k representam a saída e a entrada do filtro, respectivamente (Sachet and Milhomem, 2019).

A Figura 3 apresenta o fluxograma do algoritmo de controle implementado na bancada. Dessa forma, para iniciar o sistema é necessário posicionar manualmente os eixos de movimentação para o ponto de equilíbrio, ou seja, os eixos de elevação e arfagem devem estar posicionados horizontalmente, após a iniciação do sistema a malha de controle passa a atuar na bancada (Sachet and Milhomem, 2019). A aquisição dos ângulos ϵ, ρ e λ é realizada pelos encoders presentes no sistema, cujos sinais são utilizados pelo observador (ou filtro) para cálculo da matriz de es-

tados da bancada. Consequentemente a lei de controle (9) deve ser discretizada para implementação, conforme:

$$\begin{aligned} u_k &= -K_\gamma x_k + K_i \psi_k, \\ \psi_k &= T_a \xi + \psi_{k-1}. \end{aligned} \tag{34}$$

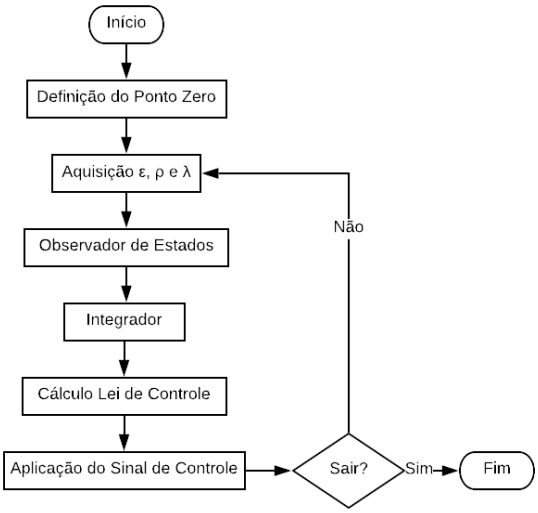


Figura 3. Algoritmo de Implementação.

Para obtenção dos estados não mensuráveis do sistema, o observador faz uso dos sinais de entrada para estimação dos demais estados (Ogata, 2011), conforme a tensão a ser aplicada nos respectivos motores. Portanto, para implementação do observador o sinal de entrada foi convertido utilizando o sinal em PWM (*Pulse With Modulation*) empregada no sistema e a faixa de tensão aplicada pelo *driver* EMAX (2019), resultando em

$$\begin{aligned} V_f &= \frac{5\,(V_{fPWM} + 800)}{1700} - 2, \\ V_t &= \frac{5\,(V_{tPWM} + 1300)}{3700} - 2,5\ , \end{aligned} \tag{35}$$

em que V_f e V_f são os sinais de controle aplicados ao motor frontal e traseiro, respectivamente. A diferença entre os sinais de controle aplicados aos motores, apresentado em (35), são ocasionadas pelas diferenças eletromecânicas entre os motores, observadas durante os experimentos.

4. RESULTADOS

Os resultados buscam comparar as metodologias de projeto aplicadas ao experimento, analisando as respostas apresentadas a fim de verificar o projeto mais adequado para o sistema (dentro do escopo discutido), por meio de critérios apresentados posteriormente. Os resultados são divididos entre projeto de controladores e projeto de observadores de estados.

4.1 Projeto de Controladores

Partindo do teste pré-estabelecido, os resultados apresentados pelos controladores podem ser comparados, baseando-se nos seguintes critérios: convergência dos ângulos ϵ e λ a referência estabelecida, energia necessária para estabilização do sistema, sobressinal apresentado pelos ângulos ϵ e λ e tempo de assentamento do sistema.

Para avaliação do comportamento apresentado pelos controladores estabeleceu-se um teste padronizado que consistia na troca da referência aplicada, de $[\epsilon, \lambda] = [-20°, 100°]$ para $[\epsilon, \lambda] = [20°, -100°]$. A escolha pela aplicação deste teste deu-se pela variação considerável dos ângulos ϵ e λ, garantindo a robustez do controlador.

As matrizes de ganho do controlador (16), (22) e (27) foram implementadas na bancada. Nas Figuras 4, 5 e 6 os resultados desses experimentos são apresentados em resposta ao ensaio de troca de referência, contendo os dados obtidos pela simulação e aplicados no sistema. A energia dissipada utilizada para estabilização do sistema é outro critério de análise para comparação entre os controladores projetados. Seu valor foi obtido pela média absoluta do sinal aplicado para o segmento de referência de cada ângulo, sendo considerado como melhor resultado o menor valor apresentado.

Relacionado com o coeficiente de amortecimento (ξ), o sobressinal é o valor máximo em que o sistema supera o valor final de referência, em porcentagem, sendo que quanto menor o valor, mais suave o movimento é feito (Franklin et al., 2013).

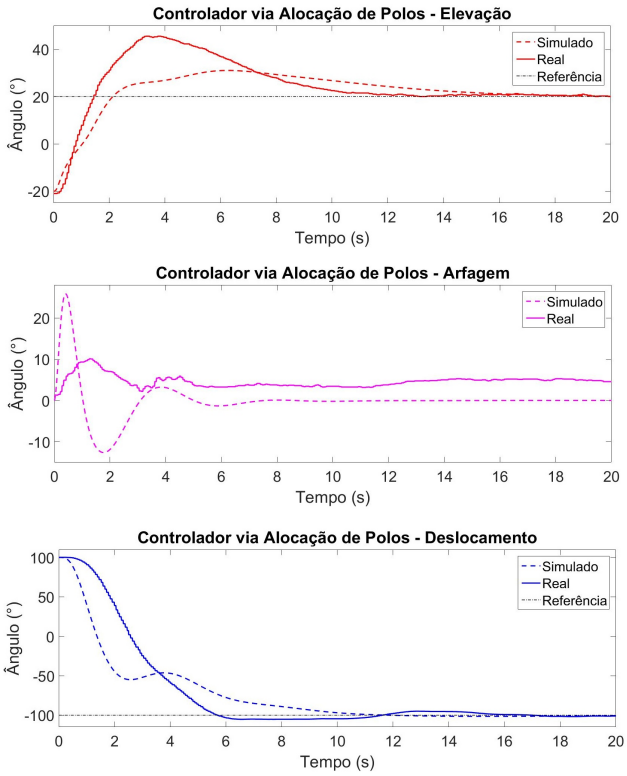


Figura 4. Controlador Alocação de Polos.

O tempo de assentamento (em segundos) apresentado pela bancada é definido como o tempo requerido para a resposta do sistema permanecer na faixa de valores de 2% ($t_s^{2\%}$) em torno do valor de referência, tendo relação direta com a frequência natural ω_n desejada para o sistema (Dorf and Bishop, 2011), no qual quanto menor for o valor, melhor a resposta considerada para o controlador.

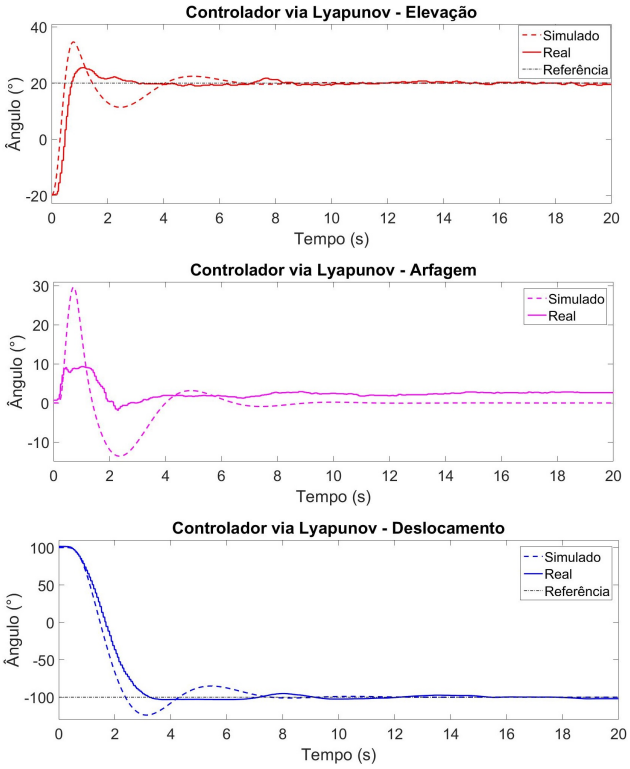


Figura 5. Controlador via Lyapunov.

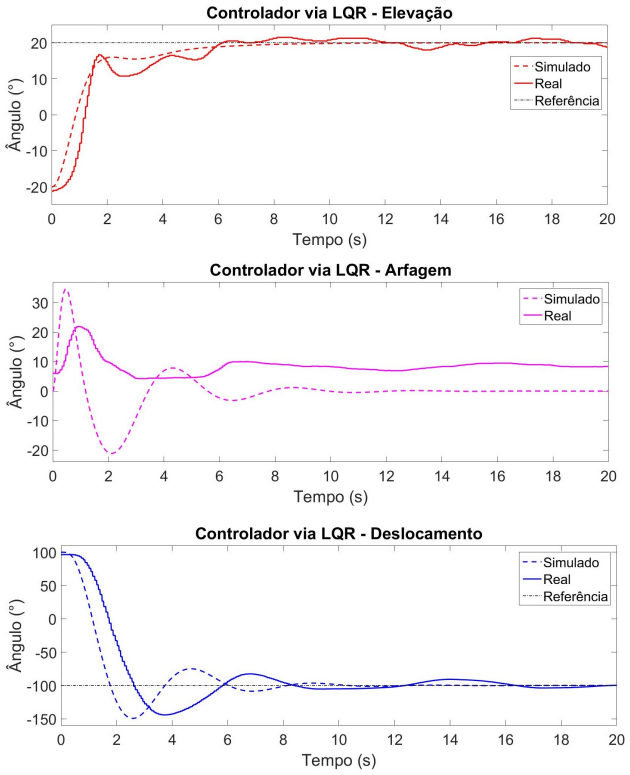


Figura 6. Controlador via LQR.

A partir dos dados obtidos pela bancada, os critérios de comparação estabelecidos foram analisados, sendo sintetizados na Tabela 3. Como o ângulo de deslocamento possui maior liberdade construtiva, as análises são para os ângulos ϵ e λ somente. Por meio da Tabela 3 e dos critérios

Tabela 3. Comparação entre os controladores.

	Critério	Alocação	Lyapunov	LQR
	$\dot{e}$	$0°$	$0,75°$	$0,5°$
ϵ	Sobressinal	$127,5\%$	$27,5\%$	0%
	$t_s^{2\%}$	$12,14s$	$3s$	$6s$
	$\dot{e}$	$0,1°$	$0,5°$	$0,25°$
λ	Sobressinal	$5,3\%$	$3,2\%$	44%
	$t_s^{2\%}$	$15,27s$	$10,78s$	$8,2s$
	Energia Dissipada	$518,29s$	$576,47s$	$332,3s$

estabelecidos, observa-se que os valores apresentados para o controlador do projeto via LQR é o mais adequado para o sistema (dentre os avaliados), sendo o tempo de resposta para segmento de referência total de $8,2s$, e a energia dissipada para realização da trajetória de $332,3$, valores menores em dois critérios estabelecidos entre os controladores projetados.

4.2 Observadores de Estados

Os resultados para os controladores, apresentados anteriormente, foram obtidos a partir da estimação dos estados $\dot{\epsilon}$, $\dot{\rho}$ e $\dot{\lambda}$ pelo filtro derivativo (33). Os resultados dos projetos dos observadores de ordem plena e de tempo corrente foram obtidos através da simulação e implementação de (28) e (31) ao experimento, cujo comportamento é analisado pela troca de referência de $[\epsilon, \lambda] = [-5°, 5°]$ para $[\epsilon, \lambda] = [0°, 0°]$, conforme mostram as Figuras 7 e 8. Na malha de controle, o controlador utilizado para comparação entre os observadores foi o projetado via LQR.

Como critérios de avaliação foram considerados: o tempo de convergência, que analisa a rapidez com que os estados são estimados, resultando em um tempo menor para estabilização do sistema; e a robustez, considerado o valor máximo (em graus) para referência aplicada a ϵ e λ.

Os observadores obtiveram uma resposta com oscilação constante, podendo-se considerar aceitável a convergência dos estados do sistema a uma região de trabalho. Na Tabela 4 podem ser visualizados os valores apresentados por cada estimador de estados de acordo com a implementação na bancada.

Tabela 4. Comparação Entre Estimadores.

Critério	Filtro Der.	Ordem Comp.	Tempo Corrente
Convergência	$7s$	$4s$	$5s$
Robustez (ϵ)	$\pm 30°$	$\pm 5°$	$\pm 5°$
Robustez (λ)	$\pm 140°$	$\pm 10°$	$\pm 5°$

A partir da Tabela 4, observa-se que o filtro (33) apresenta um melhor resultado qualitativo, principalmente pela performance apresentada no critério de robustez. Porém, para as simulações, o observador de tempo corrente obteve os melhores resultados.

5. CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como principal objetivo realizar a análise de diferentes técnicas de engenharia de controle moderno, desenvolvendo projetos de controladores e observadores de estados para aplicação em um sistema multivariável com três graus de liberdade, a partir dos estudos

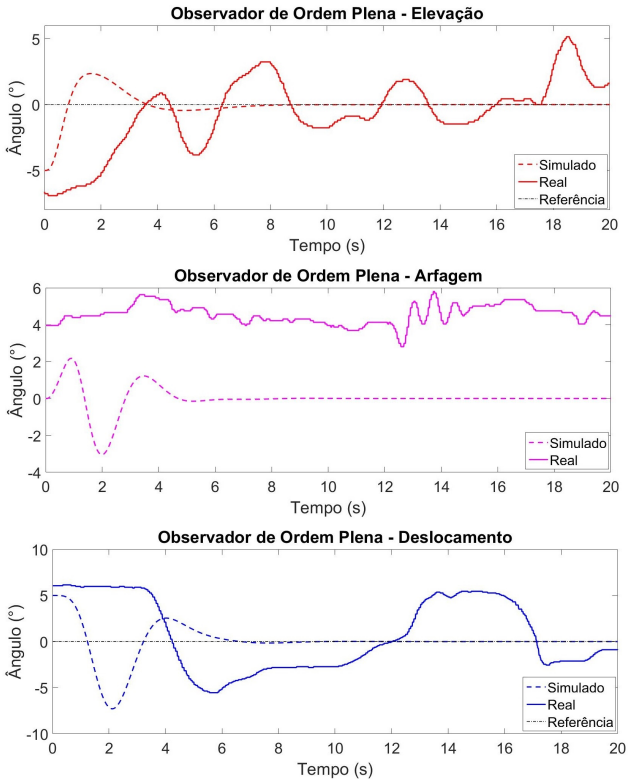


Figura 7. Observador de Ordem Plena.

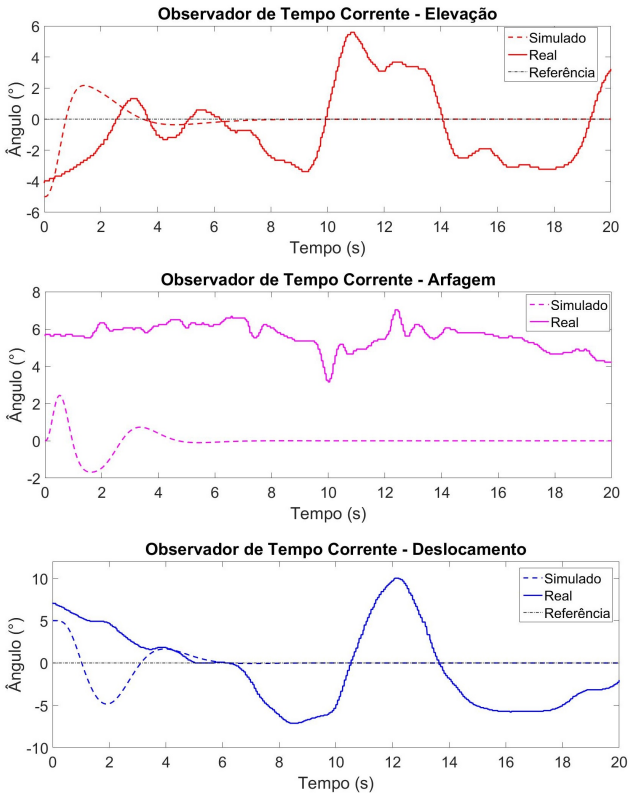


Figura 8. Observador de Tempo Corrente.

iniciados por Sachet and Milhomem (2019), possibilitando seu emprego como uma ferramenta de ensino.

Com a utilização de um observador para estimação dos estados pôde-se perceber que o tempo de convergência apresentado pelos observadores projetados é melhor que o filtro, porém para a obtenção de resultados melhores no critério de robustez as medidas dos estados ϵ, ρ e λ e dos sinais de entrada V_f e V_t, deve ocorrer de maneira mais precisa. Em parte, isso ocorre por conta que os modelos lineares utilizados nos projetos dos observadores não levam em conta uma não linearidade observada no conjunto de acionamento dos motores *brushless*, evidenciados durante as etapas de teste.

Sugere-se para desenvolvimento de trabalhos futuros a análise por meio de ensaios da relação entre a tensão aplicada aos drives dos motores e a força de impulso gerada sobre eles, a fim de encontrar uma função que considere o sistema em outras regiões de operação, além da linearizada. Por fim, o trabalho abre possibilidades para o projeto e implementação de outras técnicas de controle a um sistema real, como controladores adaptativos, preditivos e robustos, uma vez que os algoritmos de programação desenvolvidos para a bancada foram planejados de forma modular.

REFERÊNCIAS

Chen, C.T. (1998). *Linear system theory and design.* Oxford University Press, Inc.

Dorf, R.C. and Bishop, R.H. (2011). *Modern control systems.* Pearson.

EMAX (2019). Drive simonk 30a. URL `https://robu.in/wp-content/uploads/2017/04/EMAX-User-Instruction-for-Simonk-Series-ESC.pdf`. Datasheet Drive SimonK 30A.

Fadali, M.S. and Visioli, A. (2013). *Digital control engineering: analysis and design.* Academic Press.

Franklin, G.F., Powell, J.D., and Emami-Naeini, A. (2013). *Sistemas de controle para engenharia.* Bookman Editora.

Ishutkina, M., Feron, E., Casini, M., and Vicino, A. (2004). An internet based laboratory for control of a safety critical system. In *2004 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (IEEE Cat. No. 04CH37583)*, volume 3, 2707–2712. IEEE.

J. Apkarian, M.L. and Fulford, C. (2012). Laboratory guide: 3 dof helicopter experiment for matlab / simulink users.

Ogata, K. (2011). Engenharia de controle moderno. 5º, edição. *Editora LTC.*

Ogata, K. et al. (1995). *Discrete-time control systems*, volume 2. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.

Pan, J., Shen, T., and Rong, T. (2017). Robust guarantee control for 3dof helicopters based on multiple-model switching. In *2017 9th International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics (IHMSC)*, volume 1, 430–435. IEEE.

Sachet, M. and Milhomem, R.L. (2019). Modelagem e controle de um helicóptero de bancada com três graus de liberdade. In *14o Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente.* SBAI.

Veeraboina, A.K. and Ordóñez, R. (2018). Design and implementation of linear/nonlinear control methods on 3-dof helicopter. In *NAECON 2018-IEEE National Aerospace and Electronics Conference*, 435–442. IEEE.