

# Um Método Baseado em Otimização para Sintonia de Controladores PI para Sistemas Sujeitos a Restrições

José K.E.C. Martins\* Fábio M.U. Araújo\*  
Carlos E.T. Dórea\*

\* *Universidade Federal do Rio Grande do Norte*  
*Departamento de Engenharia da Computação e Automação*  
*Natal, RN, Brasil (e-mail: jk\_kleitton@hotmail.com,*  
*meneghet@dca.ufrn.br, cetdorea@dca.ufrn.br)*

**Abstract:** An optimization-based method is proposed for tuning PI controllers for systems subject to constraints on the controlled variable and to actuator saturation. The invariant set theory is used for the treatment of constraints on the controlled variable together with polytopical modeling for saturation of the actuator. Conditions are presented for a polyhedron contained in the set of constraints to be positively invariant with respect to a closed loop system with a PI controller subject to actuator saturation. These conditions are used in the formulation of a bilinear programming problem whose solution provides the parameters of the controller that satisfy the constraints, and an associated invariant set. For the numerical validation of the method, an example is developed using three different objective functions. The results show that the method is able to determine a tuning that does not violate any constraint, and also the importance of the adequate choice of the objective function.

**Resumo:** Neste trabalho é proposto um método baseado em otimização para a sintonia de controladores PI para sistemas sujeitos a restrições na variável controlada e saturação do atuador. A teoria de conjuntos invariantes é utilizada para o tratamento de restrição na variável controlada e modelagem politópica para saturação do atuador. São apresentadas condições para que um poliedro contido no conjunto de restrições seja invariante em relação a um sistema em malha fechada com um controlador PI sujeito a saturação. Estas condições são usadas na formulação de um problema de programação bilinear cuja solução fornece os parâmetros do controlador que satisfaz as restrições e um conjunto invariante associado. Para a validação numérica do método foi elaborado um exemplo com o uso de três funções objetivo diferentes. Os resultados mostram que o método é capaz de determinar uma sintonia que não viola nenhuma restrição e a importância da escolha adequada da função objetivo.

*Keywords:* PI controller; I-P controller; Invariant Sets; Bilinear Programming; Polytopic Models.

*Palavras-chaves:* Controlador PI; Controlador I-P; Conjunto Invariante; Problema de Otimização Bilinear; Modelo Politópico.

## 1. INTRODUÇÃO

O controlador proporcional-integral-derivativo (PID) é um algoritmo amplamente utilizado na indústria para controle de variáveis em geral, por exemplo, velocidade, pressão e nível. Estima-se que 95% das malhas de controle utilizam controladores PID, em sua maioria na forma Proporcional-Integral (PI) (Åström and Hägglund, 2004).

Uma das dificuldades em utilizar os controladores PID é encontrar uma sintonia adequada. Habitualmente, a sintonia é realizada pelo método de Ziegler et al. (1942), que se baseou na determinação de características dinâmicas de diversos processos industriais para nas definições dos ganhos

dos controladores que deram origem a regras tabeladas de sintonia (Åström and Hägglund, 1995).

Na literatura, a grande maioria dos trabalhos que envolvem sintonia de controladores PID para sistemas industriais fazem uso das regras de sintonia de Ziegler e Nichols, Cohen e Coon, Método da Integral do Erro e Método do Modelo Interno. Porém nenhum desses métodos lida com uma necessidade natural dos processos industriais, as restrições (Tchamna and Lee, 2018). Existem alguns métodos de sintonia de PID que lidam de forma direta com restrições, por exemplo, (Tchamna and Lee, 2018; Pinto et al., 2019) e existem formas indiretas de tratá-las, como algumas estratégias que são utilizadas com o intuito de mitigar os impactos da saturação do atuador no controlador PID, tais como técnicas de anti-windup (Tarbouriech et al., 2011) e limitação da integral do erro.

\* O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do CNPq, Processo 309862/2019-1.

Uma das formas aplicadas com sucesso em diversos problemas de controle para resolver problemas sob restrições utiliza funções de Lyapunov poliédricas (FLP) e conjuntos positivamente invariantes. Esses conjuntos vêm sendo usados na resolução de problemas de regulação de sistemas lineares sob restrições (Vassilaki et al., 1988; Hennes, 1989), assim como em outros problemas de análise e síntese desse tipo de sistema (Blanchini et al., 2007; Blanchini and Miani, 2008). Muitos trabalhos que utilizam FLP enquadram-se na linha de controle preditivo, por exemplo, (Mayne et al., 2000), mas existe um problema inerente a essa técnica de controle: o elevado custo computacional associado a resoluções online de problemas de otimização. Uma forma de contornar essa desvantagem é sintetizando uma lei de controle explícita, associada a um conjunto invariante, como solução de um problema de otimização multiparamétrica (Bemporad et al., 2002).

Métodos recentes vêm sendo propostos para o cálculo de poliedros invariantes com complexidade fixa, como por exemplo, aquele proposto em (Brião et al., 2018), no qual os ganhos de um controlador por realimentação estática de estado ou de saída são calculados por meio de um problema de otimização bilinear, juntamente com um poliedro invariante associado que garante o respeito às restrições.

Dentre as restrições naturais do sistema há a restrição de sinais de controle, que muitas vezes são limitadas entre valores máximos e mínimos. Os sistemas de controle que ignoram estes limites podem sofrer a ocorrência de saturação do atuador, que pode levar o sistema à instabilidade ou a respostas indesejáveis inerentes ao comportamento não linear do sistema em malha fechada, tais como pontos de equilíbrio parasitas e ciclos limite. Logo, a modelagem da saturação, no sentido de considerá-la explicitamente no projeto do controlador, é muito importante, a fim de que se evitem estes comportamentos indesejáveis, ou, pelo menos, que se avaliem os seus efeitos sobre a estabilidade, o desempenho e a robustez do sistema em malha fechada (Ghiggi, 2008). Uma das formas de se levar em consideração a saturação no modelo é através da modelagem politópica.

Desta forma, este trabalho tem por objetivo apresentar um método de sintonia para controladores PI para sistemas de tempo discreto sujeitos a restrições na variável controlada e a saturação do atuador. Condições são apresentadas para que um poliedro definido no espaço de estado seja positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada com o controlador PI e a um problema de seguimento de referência. Como em Brião et al. (2018) tais condições são traduzidas em um problema de otimização bilinear cuja solução fornece os ganhos do controlador. Diferentes formulações do problema de otimização são analisadas por meio de experimentos numéricos.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Considere o seguinte sistema de tempo discreto, linear, invariante no tempo e monovariável:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + Er[k] \\ y[k] &= Cx[k] \end{aligned} \quad (1)$$

no qual  $k \in \mathbb{N}$  é o número da amostra,  $x[k] \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u[k] \in \mathbb{R}$  é a entrada de controle,  $y[k] \in \mathbb{R}$  é a variável controlada ou saída do sistema e  $r[k] \in \mathbb{R}$  é uma perturbação.

A perturbação  $r[k]$  é desconhecida, porém limitada ao seguinte poliedro:

$$r[k] \in \Phi = \{r : |Wr[k]| \leq \mathbf{1}\}, \quad (2)$$

com  $W \in \mathbb{R}$ .

O sistema está sujeito a saturação do atuador:

$$u[k] \in \Omega_u = \{-u_{max} \leq u[k] \leq u_{max}\}, \quad (3)$$

de modo que, considerando uma realimentação estática de saída, temos:

$$u[k] = sat(Ky[k]) = sat(KCx[k]), \quad (4)$$

em que  $sat(\cdot)$  é a função saturação, definida por:

$$sat(f) = \begin{cases} f, & \text{se } -u_{max} \leq f \leq u_{max}, \\ u_{max}, & \text{se } f > u_{max}, \\ -u_{max}, & \text{se } f < -u_{max}. \end{cases}$$

O sistema em malha fechada fica, então, da seguinte forma:

$$x[k+1] = Ax[k] + Bsat(KCx[k]) + Er[k]. \quad (5)$$

Restrições nas variáveis de estado e saída podem ser satisfeitas se o estado inicial estiver contido em um conjunto positivamente invariante, definido a seguir.

*Definição 1.* Um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto *positivamente invariante* em relação ao sistema (5) se  $\forall x[0] \in \Omega, x[k] \in \Omega, \forall k \geq 0, \forall r[k] \in \Phi$ .

No caso em que a origem pertence ao interior de  $\Omega$ , diz-se que  $\Omega$  é positivamente invariante com taxa de contração  $\lambda$ , com  $0 < \lambda < 1$ , se  $\forall x[0] \in \Omega, x[k] \in \lambda\Omega, \forall k \geq 0, \forall r[k] \in \Phi$ .

Restrições lineares nas variáveis de estado resultam em conjuntos de restrições poliédricos, do tipo:

$$\Omega = \{x : |Lx[k]| \leq \mathbf{1}\},$$

em que  $L \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , as desigualdades valem elemento por elemento e  $\mathbf{1}$  é um vetor de dimensões adequadas cujos elementos são todos iguais a 1.

Por simplicidade, trataremos de conjuntos simétricos em relação à origem. Os resultados apresentados podem, no entanto, ser facilmente estendidos a poliedros não simétricos.

O sistema (1) está sujeito a restrições na saída:

$$y[k] \in \Omega_y = \{|Qy[k]| \leq \mathbf{1}\}, \quad (6)$$

que, a partir da equação de saída em (1), transformam-se em restrições no estado:

$$x[k] \in \Omega_x = \{|QCx[k]| \leq \mathbf{1}\}. \quad (7)$$

com  $Q \in \mathbb{R}$ .

### 2.1 Modelagem Politópica da Saturação

Segundo Tarbouriech et al. (2011), uma das formas de se fazer a modelagem politópica da saturação consiste em utilizar um vetor como variável auxiliar,  $h_{sat}$ , e compor a saída da função saturação como uma combinação convexa do sinal de controle atual  $f$  com  $h_{sat}$ .

Sendo  $u[k] = \text{sat}(f[k])$ , e o sistema em questão monovariável, então  $f$  e  $h_{\text{sat}}$  são escalares. Suponha que:

$$-u_{\text{max}} \leq h_{\text{sat}} \leq u_{\text{max}} \quad (8)$$

A função  $\text{sat}(f)$  pode ser aproximada por uma combinação convexa de  $h_{\text{sat}}$  e  $f$  dada por:

$$\text{sat}(f) = \lambda f + (1 - \lambda)h_{\text{sat}} \quad (9)$$

com  $0 \leq \lambda \leq 1$ , ou, de forma equivalente:

Lema 2. (Tarbouriech et al., 2011) Considere dois escalares  $f \in \mathbb{R}$  e  $h_{\text{sat}} \in \mathbb{R}$ . Se  $-u_{\text{max}} \leq h_{\text{sat}} \leq u_{\text{max}}$ , então

$$\text{sat}(f) \in \text{Co}\{f, h_{\text{sat}}\}.$$

Em virtude de (4), temos a definição do poliedro:

$$S(H_{\text{sat}}, u_{\text{max}}, u_{\text{max}}) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_{\text{max}} \leq H_{\text{sat}}x[k] \leq u_{\text{max}}\}$$

Em que  $H_{\text{sat}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz auxiliar para compor o modelo de saturação.

A partir do Lema 2 se  $x[k] \in S(H_{\text{sat}}, u_{\text{max}}, u_{\text{max}})$  então:

$$\text{sat}(KCx[k]) \in \text{Co}\{\Gamma_j^+ KCx[k] + \Gamma_j^- H_{\text{sat}}x[k], j = 1, \dots, 2\}$$

na qual  $\Gamma_j^+$  recebe valores de 0 ou 1 e  $\Gamma_j^- = 1 - \Gamma_j^+$ . O sistema em malha fechada pode, então, ser representado pelo seguinte modelo politópico:

$$x[k+1] = \sum_{j=1}^2 \lambda_j(x[k]) A_j x[k] + Er[k], \quad (10)$$

com  $\sum_{j=1}^2 \lambda_j(x[k]) = 1$ ,  $0 \leq \lambda_j(x[k]) \leq 1$ ,  $j = 1, \dots, 2$  e

$$A_j = A + B(\Gamma_j^+ KC + \Gamma_j^- H_{\text{sat}}) \quad (11)$$

Expandindo (10), temos:

$$x[k+1] = A + B(\lambda_1(x[k])KC + \lambda_2(x[k])H_{\text{sat}}) + Er[k]. \quad (12)$$

Por meio desse modelo politópico torna-se possível a permissão de saturação.

### 3. METODOLOGIA

O controlador PI apresentado na Figura 1, é conhecido como PI tipo C ou I-P, que é uma modificação do controlador PI convencional, pois a referência é removida do termo proporcional com objetivo de evitar que mudanças repentinas na referência gerem respostas com saltos abruptos.

Considere um controlador I-P de tempo discreto como apresentado na Figura 1, representado por:

$$f[k] = -K_p y[k] + K_I v[k], \quad (13)$$

$$v[k+1] = v[k] + T_s e[k], \quad (14)$$

sendo  $T_s$  o período de amostragem.

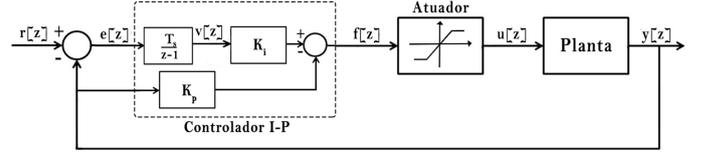


Figura 1. Sistema em malha fechada com controlador I-P e saturação no atuador.

O sistema apresentado em (1) e o controlador I-P (13) podem ser representados em espaço de estado da seguinte forma aumentada:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x[k+1] \\ v[k+1] \end{bmatrix}}_{\bar{x}[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -CT_s & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \end{bmatrix}}_{\bar{x}[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_B u[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ T_s \end{bmatrix}}_E r[k] \quad (15)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y[k] \\ v[k] \end{bmatrix}}_{y[k]} = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \end{bmatrix}}_{\bar{x}[k]} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}[k+1] &= \bar{A}\bar{x}[k] + \bar{B}u[k] + \bar{E}r[k] \\ \bar{y}[k] &= \bar{C}\bar{x}[k] \end{aligned} \quad (17)$$

Observe-se que da forma na qual o controlador foi formulado a referência é considerada como uma perturbação.

A lei de controle é dada por:

$$u[k] = \text{sat}(f[k]) = \text{sat} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} -K_p & K_I \end{bmatrix}}_{\bar{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} y[k] \\ v[k] \end{bmatrix}}_{\bar{y}[k]} \right). \quad (18)$$

Tendo em vista (10) e (12), o modelo politópico aumentado fica:

$$\begin{aligned} \bar{x}[k+1] &= \lambda_1(\bar{A} + \bar{B}\bar{K}\bar{C})\bar{x}[k] + \\ &\lambda_2(\bar{A} + \bar{B}H_{\text{sat}})\bar{x}[k] + \bar{E}r[k]. \end{aligned} \quad (19)$$

A partir dessa formulação, podemos agora estabelecer as condições para invariância positiva de um poliedro  $\Omega = \{\bar{x} : L\bar{x} \leq \mathbf{1}\}$  definido no espaço de estado aumentado.

Proposição 3. O poliedro  $\Omega = \{\bar{x} : L\bar{x} \leq \mathbf{1}\}$  é positivamente invariante com taxa de contração  $\lambda$  em relação ao sistema (19) se existem matrizes  $H_k$ ,  $H_h$ ,  $Z$  e  $H_{\text{sat}}$  tais que:

$$\begin{aligned} H_k L &= L(\bar{A} + \bar{B}\bar{K}\bar{C}) \\ ZW &= L\bar{E} \\ \|H_k\|_{\infty} + \|Z\|_{\infty} &\leq \lambda \\ H_h L &= L(\bar{A} + \bar{B}H_{\text{sat}}) \\ \|H_h\|_{\infty} + \|Z\|_{\infty} &\leq \lambda \end{aligned} \quad (20)$$

Esta Proposição pode ser demonstrada a partir da extensão de condições apresentadas por Milani and Carvalho (1995) para modelos politópicos de tempo discreto e por Milani and Dórea (1996) para sistemas de tempo contínuo sujeitos a perturbações de amplitude limitada.

A seguir, restrições serão incorporadas a fim de se chegar à formulação de problemas de otimização para sintonia do controlador I-P.

### 3.1 Restrição nos estados

Às restrições (7) são acrescidas restrições em  $v[k]$ , de modo que o vetor aumentado  $\bar{x}[k]$  deve pertencer ao seguinte poliedro:

$$\Omega_s = \{|\bar{Q}\bar{x}| \leq \mathbf{1}\} \quad (21)$$

Observe-se que não há ainda uma maneira sistemática de determinar um limite em  $v[k]$ , o que será discutido no desenvolvimento do exemplo numérico.

Para traduzir restrições no estado em restrições no problema de otimização, utilizamos o chamado *Lema de Farkas estendido* como em (Castelan and Hennet, 1992).

Para que  $\Omega \subset \Omega_s$  deve existir uma matriz  $H_s \in \mathbb{R}^{n \times l}$ , tal que:

$$\begin{cases} H_s L = Q \\ \|H_s\|_\infty \leq 1 \end{cases} \quad (22)$$

### 3.2 Restrição para permissão de saturação

Considere o seguinte poliedro:

$$\Omega_u = \{|\bar{H}_{sat}\bar{x}| \leq u_{max}\} \quad (23)$$

no qual  $\bar{H}_{sat} = [H_{sat} \ 0]$ , tendo  $H_{sat}$  sido definido na seção 2.1.

De acordo com Lema 2,  $\Omega \subset \Omega_u$  é equivalente à existência de uma matriz  $J \in \mathbb{R}^{m \times l}$ , tal que:

$$\begin{cases} JL = \bar{H}_{sat} \\ \|J\|_\infty \leq u_{max} \end{cases} \quad (24)$$

### 3.3 Restrição para seguimento de referência

A ideia é tentar minimizar a diferença entre a saída e o sinal de referência um passo a frente, o que é traduzido por:

$$\|r[k+1] - y[k+1]\|_\infty \leq \gamma \quad (25)$$

Considerando uma referência constante.

$$r[k+1] = r[k] \quad (26)$$

e

$$\bar{y}[k+1] = [C \ 0]\bar{x}[k+1] \quad (27)$$

$$[C \ 0]\bar{x}[k+1] = [C \ 0]((\bar{A} + \bar{B}\bar{K}\bar{C})\bar{x}[k] + \bar{E}r[k]) \quad (28)$$

$$\|r[k] - [C \ 0]((\bar{A} + \bar{B}\bar{K}\bar{C})\bar{x}[k] + \bar{E}r[k])\|_\infty \leq \gamma \quad (29)$$

$$\|(-[C \ 0]\bar{A} - [C \ 0]\bar{B}\bar{K}\bar{C})\bar{x}[k] + (1 - [C \ 0]\bar{E})r[k]\|_\infty \leq \gamma \quad (30)$$

Sendo assim, para o erro de rastreamento ser menor do que  $\gamma$ , o conjunto invariante  $\Omega$  deve estar contido no conjunto definido pelas restrições acima. A aplicação do Lema de Farkas estendido leva às seguintes condições:

$$\begin{cases} -[C \ 0]\bar{A} - [C \ 0]\bar{B}\bar{K}\bar{C} = H_r L \\ Z_r W = 1 - [C \ 0]\bar{E} \\ \|H_r\|_\infty + \|Z_r\|_\infty \leq \gamma \end{cases} \quad (31)$$

### 3.4 Restrição para expansão do conjunto invariante

A estratégia de expansão do conjunto invariante  $\Omega$  consiste em utilizar a abordagem *shape-set* com objetivo de aumentar o conjunto de soluções admissíveis. Considere um poliedro *shape-set*  $\chi = \{x[k] : |Sx[k]| \leq \beta\mathbf{1}\}$ , com  $0 \leq \beta \in \mathbb{R}$  e  $S \in \mathbb{R}^{l \times n}$ . Este poliedro é forçado a estar contido em  $\Omega$ . Dessa forma, ao se tentar aumentar seu tamanho, aumenta-se indiretamente o tamanho de  $\Omega$ .

$\chi \subset \Omega$  é equivalente à existência de uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , tal que:

$$\begin{cases} PS = L \\ \|P\|_\infty \leq \psi \end{cases} \quad (32)$$

A matriz  $S$  é uma escolha do projeto, sendo que o coeficiente  $\psi = \beta^{-1}$  é um variável de otimização para aumentar o conjunto  $\Omega$  (Dórea et al., 2020).

## 4. EXEMPLO NUMÉRICO

Para ilustrar a aplicação do método foram realizados três testes com diferentes funções objetivo para analisar a sua influência no tamanho do conjunto e sua resposta no tempo.

Considere um sistema representado pela seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{10}{10s - 1} \quad (33)$$

O sistema foi discretizado com período de amostragem de  $T_S = 0,3$  obtendo-se a seguinte representação em espaço de estado.

$$x[k+1] = 1,0304x[k] + 0,3045u[k] \quad (34)$$

$$y[k] = 1x[k] \quad (35)$$

Reescrevendo (34) e (35) no formato apresentado em (17), temos:

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ v[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0304 & 0 \\ -0,3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,3045 \\ 0 \end{bmatrix} u[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3 \end{bmatrix} r[k] \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} y[k] \\ v[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \end{bmatrix} \quad (37)$$

sujeito às seguintes restrições no estado:

$$\begin{aligned} -1,2 &\leq x[k] \leq 1,2 \\ -10 &\leq v[k] \leq 10 \end{aligned} \quad (38)$$

a limitação no sinal de referência:

$$-1 \leq r[k] \leq 1 \quad (39)$$

e a restrição no sinal de controle:

$$-0,5 \leq u[k] \leq 0,5 \quad (40)$$

As restrições em  $v[k]$  foram escolhidas de forma arbitrária. Em trabalhos futuros, pretende-se avaliar a possibilidade de colocá-las como outro parâmetro de otimização.

Para a resolução dos problemas de otimização foi utilizado o software de otimização não linear Knitro (Byrd et al., 2006) com as seguintes configurações iniciais: os limites inferior e superior foram  $(-10^3, 10^3)$  para todos os elementos das matrizes do problema.

Para a apresentação dos resultados foi utilizada uma estratégia de verificar qual poliedro obteve a melhor resposta em relação a sua função custo através de uma busca na qual era alterado o número de linhas do poliedro  $L$ , começando com 2 até 50. Como os poliedros encontrados no trabalho são simétricos podemos ter poliedros de até 100 linhas. Para esses testes foi escolhida uma referência máxima constante com valor 1 o que implicar em  $W = 1$ . Note-se que  $W$  também pode ser uma variável de otimização podendo alterar o tamanho do conjunto encontrado.

#### 4.1 Caso A

Nesse exemplo, será utilizada a função objetivo de minimização da variável  $\gamma$  associada à restrição de seguimento de referência. Desta forma, o problema de otimização pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \min_{(H_k, H_h, H_r, H_s, H_{sat}, J, Z, Z_r, L, K)} \quad & \gamma \\ \text{sujeito a} \quad & (20), (22), (24), (31) \end{aligned} \quad (41)$$

Para essa função custo obtivemos os seguintes resultados:

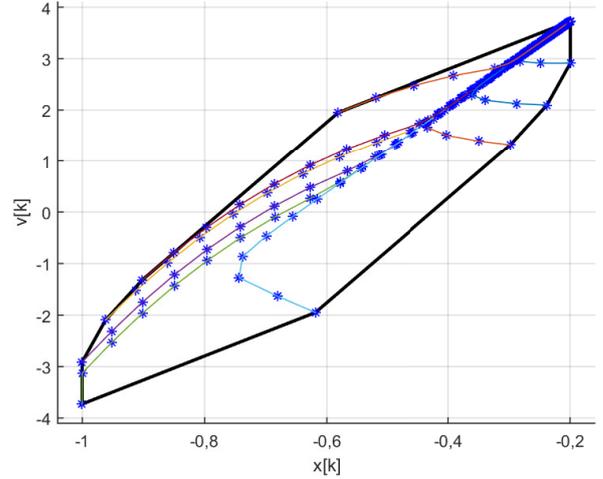


Figura 2. Poliedro invariante para o caso A com trajetórias saindo de seus vértices e convergindo para o ponto de equilíbrio no qual  $y(k) = 1$ .

Na Figura 2, apesar de o número de linhas do poliedro invariante ter sido fixado em 64, após eliminação de linhas redundantes ele ficou com apenas 10 vértices e foi obtido os valores de 4,12673 para função objetivo,  $K_p = 2,9589$  e  $K_i = 0,7679$ . Observe-se que o poliedro não chega a tocar em nenhuma restrição de estado.

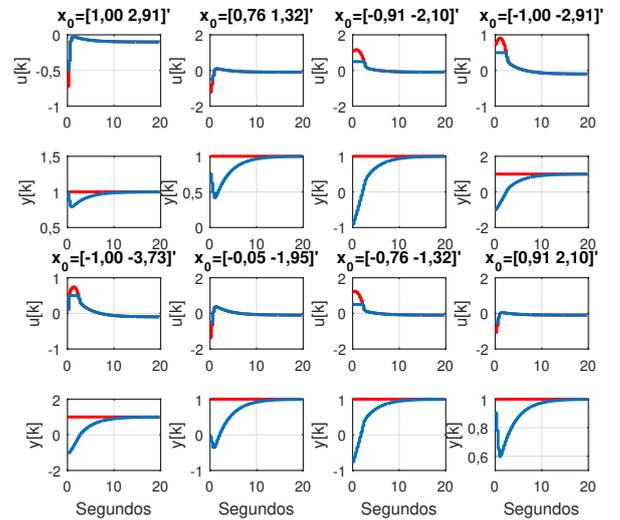


Figura 3. Sinal de controle e resposta do sistema saindo de alguns vértices. Para  $u[k]$  vermelho sinal gerado e azul sinal aplicado e para  $y[k]$  vermelho referência e azul saída do sistema.

Como pode ser visto na Figura 3, quando a trajetória do estado sai dos vértices do poliedro invariante, o sinal de controle sempre sofre saturação e a saída do sistema segue a referência.

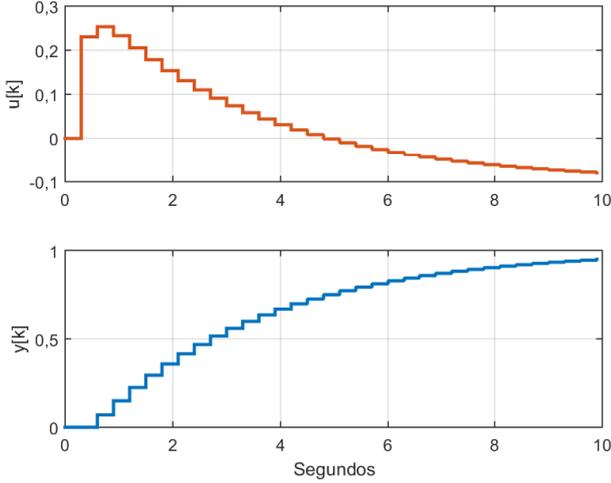


Figura 4. Resposta do sistema saindo da origem.

Observando a Figura 4, é possível notar que quando a trajetória do estado sai da origem, o potencial da ação de controle não é completamente aplicado, pois não há saturação.

#### 4.2 Caso B

Nesse exemplo, será utilizado como objetivo a maximização do parâmetro  $K_i$ . Esta escolha é justificada pelo fato de a integral do erro ser inversamente proporcional a  $K_i$  em problemas de regulação (Euzébio, 2015). Desta forma, o problema de otimização pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} & \max_{(H_k, H_h, H_s, H_{sat}, J, Z, L, K)} K_i \\ & \text{sujeito a } (20), (22), (24) \end{aligned} \quad (42)$$

Para essa função custo obtivemos os seguintes resultados:

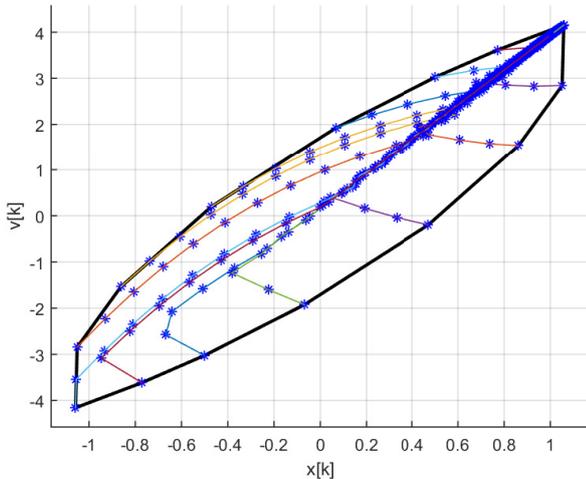


Figura 5. Poliedro invariante para o caso B com trajetórias saindo de seus vértices e convergindo para o ponto de equilíbrio no qual  $y(k) = 1$

O poliedro apresentado na Figura 5, é representado por 28 inequações. O valor ótimo da função objetivo foi de 1,59353 com os valores de  $K_p = 6,3705$  e  $K_i = 1,5935$ . Observe que o poliedro não chega a tocar na restrição de estado  $v[k]$ .

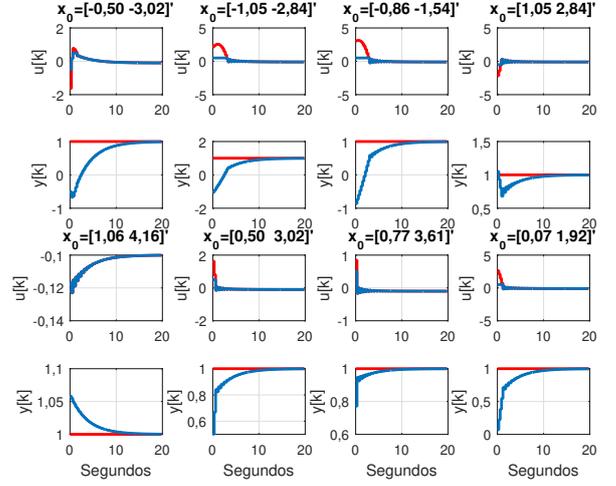


Figura 6. Sinal de controle e resposta do sistema saindo de alguns vértices. Para  $u[k]$  vermelho sinal gerado e azul sinal aplicado e para  $y[k]$  vermelho referência e azul saída do sistema.

Como pode ser visto na Figura 6, quando a trajetória do estado sai de alguns dos vértices do conjunto invariante, o sinal de controle sofre saturação e a saída do sistema segue a referência. Para alguns casos, o sinal de controle gerado é bastante elevado, mas a estratégia de permissão de saturação funciona adequadamente.

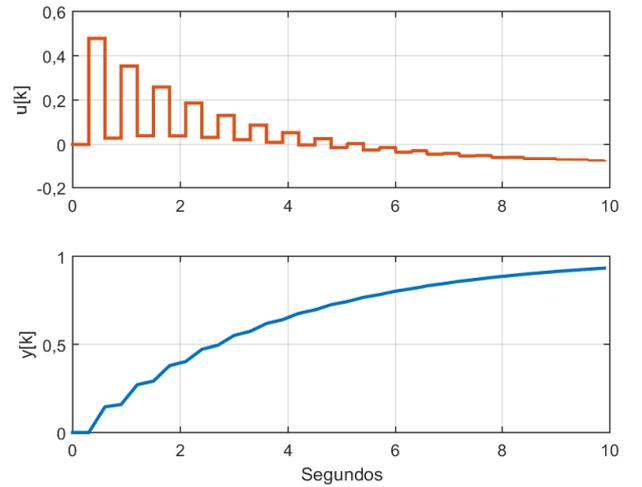


Figura 7. Resposta do sistema saindo da origem.

Observando a Figura 7, é possível notar que o sinal de controle gerado quase atinge o limite de saturação, como decorrência da maximização de  $K_i$ , visando a uma resposta mais rápida. Porém, isso levou à alocação de um polo negativo, gerando oscilações.

### 4.3 Caso C

Nesse exemplo, será utilizada a função objetivo de minimização da variável  $\psi$  associada à expansão do conjunto invariante controlado através da estratégia que utiliza um poliedro *shape-set*. Desta forma, o problema de otimização pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} & \min_{(H_k, H_h, P, H_s, H_{sat}, J, Z, L, K)} \psi \\ & \text{sujeito a } (20), (22), (24), (32) \end{aligned} \quad (43)$$

Para essa função custo obtivemos os seguintes resultados:

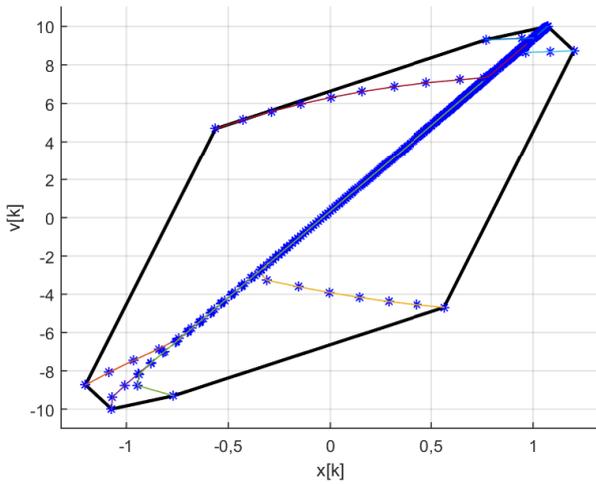


Figura 8. Poliedro invariante para o caso C com trajetórias saindo de seus vértices e convergindo para o ponto de equilíbrio no qual  $y(k) = 1$

O poliedro apresentado na Figura 8, contém o número de linhas de 42 e obtive o valor 2,13447 na função objetivo com os valores de  $K_p = 3,0811$  e  $K_i = 0,3182$ . Observe que a estratégia de expansão funcionou, pois o poliedro encontrado toca as restrição de estado.

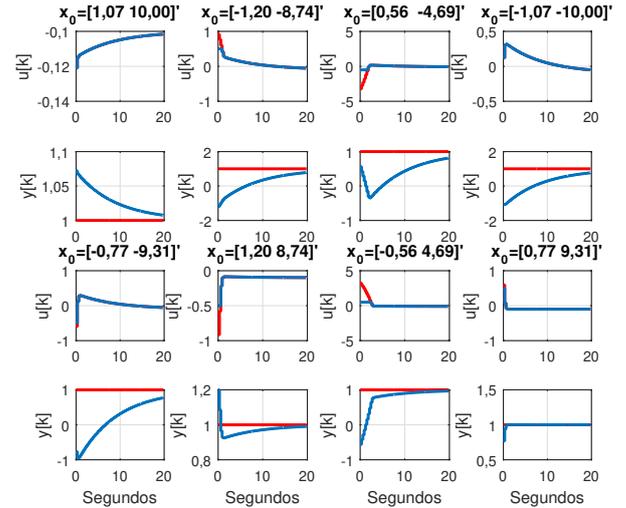


Figura 9. Sinal de controle e resposta do sistema saindo dos vértices. Para  $u[k]$  vermelho sinal gerado e azul sinal aplicado e para  $y[k]$  vermelho referência e azul saída do sistema.

Como pode ser visto na Figura 9, quando a trajetória do estado sai de alguns dos vértices do poliedro invariante, o sinal de controle sofre saturação e a saída do sistema segue a referência. Note-se que as respostas obtidas são mais lentas. Uma possível explicação é o aumento da excursão da integral do erro  $v[k]$ , decorrente da função objetivo escolhida. Ao longo dos teste foi observado que quanto maior a excursão de  $v[k]$ , menor o valor de  $K_i$  e, em consequência, mais lenta a resposta.

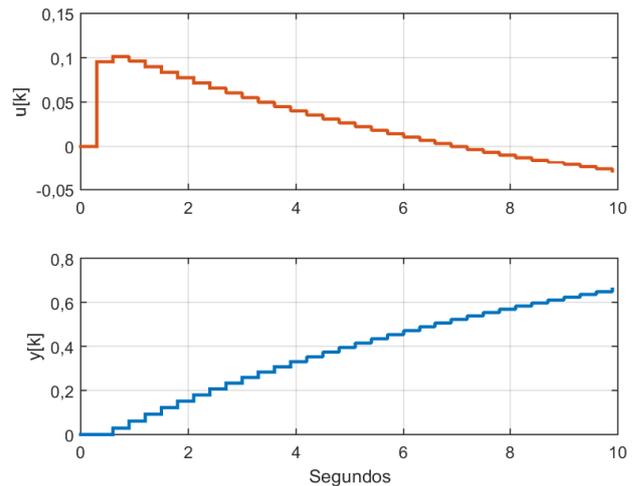


Figura 10. Resposta do sistema saindo da origem.

Observando a Figura 10, é possível notar o mesmo comportamento, resposta lenta, quando a trajetória do estado sai dos vértices. Note-se que o sinal de controle gerado fica distante de chegar no limite de operação, saturação.

## 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado um método baseado em otimização para a sintonia de controladores PI para sistemas sujeitos a restrições na variável controlada e saturação do atuador. A estratégia utilizada para lidar com as restrições baseou-se em poliedros invariantes e na modelagem politépica para tratar a permissão de saturação. As condições apresentadas foram transformadas em um problema de otimização bilinear para cuja solução foi utilizado o software KNITRO.

Para ilustração do método foram apresentados exemplos numéricos com três funções objetivo diferentes e os resultados obtidos mostram que a técnica teve um resultado satisfatório, pois nenhuma restrição foi violada e foi obtido um poliedro invariante controlado para um controlador PI com ganho explícitos.

Por meio da análise dos resultados foi também possível notar a importância da escolha da função objetivo para a resposta do sistema. Isso pôde ser observado no exemplo numérico em que o objetivo era maximizar o tamanho do conjunto, no qual obtiveram-se menores valores de  $K_i$ , implicando baixa velocidade de resposta, por ser  $K_i$  inversamente proporcional à integral do erro, o que foi corroborado com a função objetivo de maximização de  $K_i$  que resultou em respostas mais rápidas.

Em trabalhos futuros, será investigada uma nova função custo que tenha por objetivo melhorar a resposta transitória do sistema bem como a expansão da teoria para sistemas com atraso e o projeto de um controlador PI com anti-windup para melhor comparação com a técnica proposta.

## REFERÊNCIAS

- Åström, K.J. and Hägglund, T. (1995). *PID controllers: theory, design, and tuning*, volume 2. Instrument society of America Research Triangle Park, NC.
- Åström, K. and Hägglund, T. (2004). Revisiting the ziegler–nichols step response method for PID control. *Journal of process control*, 14(6), 635–650.
- Bemporad, A., Morari, M. and Dua, V., and Pistikopoulos, E. (2002). The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, 38, 3–20.
- Blanchini, F. and Miani, S. (2008). *Set-theoretic methods in control*. Springer.
- Blanchini, F., Miani, S., and Savorgnan, C. (2007). Stability results for linear parameter varying and switching systems. *Automatica*, 43(10), 1817–1823.
- Brião, S.L., Pedrosa, M.V., Castelan, E.B., Camponogara, E., and de Assis, L.S. (2018). Explicit computation of stabilizing feedback control gains using polyhedral lyapunov functions. In *2018 IEEE International Conference on Automation/XXIII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA)*, 1–6. IEEE.
- Byrd, R., Nocedal, J., and Waltz, R. (2006). KNITRO: An integrated package for nonlinear optimization in large-scale nonlinear optimization, g. di pillo and m. roma (eds.), 35–59.
- Castelan, E.B. and Hennet, J.C. (1992). Eigenstructure assignment for state constrained linear continuous time systems. *Automatica*, 28(3), 605–611.
- Dórea, C.E.T., Castelan E. B., and Ernesto, J.G. (2020). Robust positively invariant polyhedral sets and constrained control using fuzzy t-s models: a bilinear optimization design strategy. In *Proc. IFAC World Congress*, 1–6. IFAC.
- Euzébio, T.A.M. (2015). *Sintonia ótima de controlador PID descentralizado para processos MIMO. 2015. 149f.* Ph.D. thesis, Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica)—Universidade Federal de Campina Grande – Paraíba.
- Ghiggi, I. (2008). *Controle de sistemas com atrasos no tempo na presença de atuadores saturantes. 2008. 129 f.* Ph.D. thesis, Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica)—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Hennet, J.C. (1989). Une extension du lemme de farkas et son application au probleme de régulation linéaire sous contraintes. *CR Acad. Sci. Paris*, 308(SERIE I), 415–419.
- Mayne, D.Q., Rawlings, J.B., Rao, C.V., and Sokaert, P.O. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6), 789–814.
- Milani, B.E. and Carvalho, A.N. (1995). Robust linear regulator design for discrete-time systems under polyhedral constraints. *Automatica*, 31(10), 1489–1493.
- Milani, B. and Dórea, C. (1996). On invariant polyhedra of continuous-time systems subject to additive disturbances. *Automatica*, 32(5), 785–789.
- Pinto, J.E.M.G., de Azevedo Dantas, A.F.O., Maitelli, A.L., da Silva Dantas, A.D.O., Dórea, C.E.T., Campos, J.T.L.S., and de Castro Rego, E.J. (2019). PLC implementation of piecewise affine PI controller applied to industrial systems with constraints. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 30(3), 311–322.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., da Silva Jr, J.M.G., and Queinnec, I. (2011). *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science & Business Media.
- Tchamna, R. and Lee, M. (2018). Analytical design of an industrial two-term controller for optimal regulatory control of open-loop unstable processes under operational constraints. *ISA transactions*, 72, 66–76.
- Vassilaki, M., Hennet, J., and Bitsoris, G. (1988). Feedback control of linear discrete-time systems under state and control constraints. *International Journal of control*, 47(6), 1727–1735.
- Ziegler, J.G., Nichols, N.B., et al. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *trans. ASME*, 64(11).