

Regulador Linear Gaussiano com Ação Integral e Rastreamento para Sistemas com Entradas Desconhecidas

Vinicius Souza Madureira ^{*,**} Thiago Pereira das Chagas ^{*,**}
Gildson Queiroz de Jesus ^{*,**}

** Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-Bahia, Brasil
(e-mails: vinicius.madu@gmail.com, tpchagas@uesc.br, gildsonj@gmail.com)*

*** Laboratório de Mecatrônica, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-BA, Brasil*

Abstract: This work presents a new formulation for the design of quadratic optimal controllers with integral action for systems subjected to external non measurable disturbances, which are called as unknown inputs. For this purpose, it is made a combination of a linear quadratic regulator with integral action for systems subject to external disturbances and a Kalman filter for systems with unknown inputs. The methodology includes an improvement in the transient response in systems with integral action. The results of simulations performed show that the method is able to reduce the error between reference and system response and to reject disturbances in a more effective way than the classic formulation.

Resumo: Neste trabalho é apresentada uma nova formulação para o projeto de controladores ótimos quadráticos com ação integral para sistemas sujeitos a distúrbios externos não mensuráveis, que são conhecidos como entradas desconhecidas. Para isso é feita a combinação entre um regulador linear quadrático com ação integral para sistemas espaço de estados com parâmetro para distúrbios externos e um filtro de Kalman para sistemas com entradas desconhecidas. A metodologia inclui uma melhoria na resposta transitória em sistemas com ação integral. Os resultados de simulações realizadas mostram que o método é capaz de reduzir o erro entre referência e resposta do sistema e rejeitar de distúrbios de uma maneira mais eficaz que a formulação clássica.

Keywords: Optimal control; Kalman filter; disturbance rejection; reference tracking; state space;

Palavras-chaves: Controle ótimo; filtro de Kalman; rejeição de distúrbios; rastreamento de referência; espaço de estados.

1. INTRODUÇÃO

Controle ótimo está relacionado não só com os requisitos de estabilidade, mas também outros fatores como os custos, limitações e desempenho da operação de um sistema. Com isso, a teoria de controle ótimo é aplicada em problemas atuais dos diversos campos da ciência buscando-se resultados mais eficientes. Por exemplo, são encontradas aplicações em veículos aéreos não tripulados (Smith et al., 2017; Manzoor et al., 2020), energias renováveis (Madureira et al., 2019b), robótica (Tajdari et al., 2020) e economia (Yaghobipour and Yarahmadi, 2020).

Uma das principais questões abordadas na teoria de controle é a ação de distúrbios/entradas externas sobre o sistema. Em Singh and Pal (2017) foi demonstrado que uma das principais técnicas de controle ótimo, o Regulador Linear Quadrático (LQR, *Linear Quadratic Regulator*), pode apresentar melhor desempenho se a lei de controle for função não só das variáveis de estado, mas também do valor do distúrbio. Entretanto, existe o caso em que, por motivos técnicos ou econômicos, as variáveis de estado e/ou os distúrbios externos não são mensuráveis. Nestas circunstâncias, os distúrbios são chamados de entradas

desconhecidas (Darouach et al., 1995) e é necessário o uso de estimadores para que se possa aplicar o controle desejado.

Adicionalmente, tem-se o problema de fazer o sistema seguir referências diferentes do ponto de operação para o qual o modelo do sistema linear foi obtido. Nessa situação, duas derivações do LQR são bastante utilizadas: o Regulador Linear Quadrático com Ação Integral (LQI, *Linear Quadratic Integral*) (Ostertag and Goyena, 2011) e o Rastreador Linear Quadrático (LQT, *Linear Quadratic Tracker*) (Lewis et al., 2012). As formulações clássicas destes controladores já apresentam melhorias na rejeição de distúrbios, mesmo com a lei de controle não sendo função do distúrbio, porque são propostos para seguir referência. Porém, melhor desempenho pode ser obtido se o controle for aplicado com base no valor do distúrbio, como o LQIED (*Linear Quadratic Integral with External Disturbances*) apresentado em Madureira et al. (2019b).

Algumas soluções e aplicações do LQI e LQT no problema de entradas desconhecidas podem ser encontradas em He et al. (2017), Smith et al. (2017) e Manzoor et al. (2020). Nessas propostas, são usados observadores para estimar a entrada desconhecida. Nesse sentido, uma das contribuições deste trabalho consiste em utilizar um estimador ótimo: a abordagem

do filtro de Kalman proposta por Darouach et al. (1995) para sistemas com entradas desconhecidas (KFUI, *Kalman Filtering with Unknown Inputs*). O KFUI, tem sido utilizado, por exemplo, para detectar ataques cibernéticos em sistemas elétricos (Khalaf et al., 2019) e estimar irradiância em sistemas fotovoltaicos (Madureira et al., 2019a). A combinação entre controladores ótimos quadráticos e filtro de Kalman é conhecida como Regulador Linear Gaussiano (LQG, *Linear Quadratic Gaussian*).

Outra contribuição deste trabalho é a inclusão de um parâmetro extra no LQIED para auxiliar no rastreamento de referências variantes no tempo, fornecendo um LQIED com características de LQT (LQIED-T). Essa união entre LQI e LQT é importante pois reduz o erro em regime permanente (Jeong et al., 2015) e, como será visto mais adiante, melhora a resposta transitória do controlador com ação integral. Esse novo parâmetro considera o conhecimento um passo a frente da referência a ser seguida, de maneira que o controlador proposto pode ser interpretado como um caso particular de *preview control* (Birla and Swarup, 2015; Wu et al., 2019).

Dessa maneira, tem-se como resultado deste trabalho um controlador ótimo com ação integral que rejeita distúrbios e segue referências com grande eficácia, podendo ainda ser aplicado em conjunto com o KFUI na formulação de um Regulador Linear Gaussiano com Ação Integral e Rastreamento para Sistemas com Entradas Desconhecidas (LQG-I-UI-T, *Linear Quadratic Gaussian with Integral Action, Unknown Inputs and Tracking*).

Na Seção 2 é apresentado o problema de controle ótimo para sistemas com entradas desconhecidas. A Seção 3 contém a formulação do LQIED-T. O KFUI e o LQG-I-UI-T são apresentados na Seção 4. Os resultados de algumas simulações numéricas realizadas com o método proposto estão presentes na Seção 5. Na Seção 6 são apresentadas as conclusões pertinentes.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Esta seção apresenta a formulação do problema de controle ótimo com ação integral para sistemas lineares sujeitos a entradas desconhecidas.

Considere o sistema linear, com ação integral e sujeito a entradas desconhecidas definido em espaço de estados por

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k + E_k d_k + w_k, \quad (1a)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k, \quad (1b)$$

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k + r_k - y_k, \quad (1c)$$

$$r_{k+1} = L_k r_k, \quad (1d)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado; $u_k \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle; $y_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas ou resposta do sistema; $d_k \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de entradas desconhecidas; $r_k \in \mathbb{R}^p$ é uma referência a ser seguida; $w_k \in \mathbb{R}^n$ e $v_k \in \mathbb{R}^p$ são ruídos gaussianos descorrelacionados um com o outro e com o estado inicial do sistema e com covariâncias $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{p \times p}$, respectivamente; $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de parâmetros do sistema; $G_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é o vetor de parâmetros de entrada; $E_k \in \mathbb{R}^{n \times q}$ é o parâmetro das entradas desconhecidas; $H_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é o parâmetro da saída; $L_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é a variação conhecida da referência ou possível parâmetro de sintonia; ϵ_k é a integral discreta do erro entre r_k e y_k e $k = 0, 1, 2, \dots, N$.

A entrada de controle u_k em (1) está associada com os atuadores do sistema e seu valor pode ser alterado de forma que o estado x_k siga uma trajetória desejada. Por outro lado, as entradas não

manipuláveis d_k são distúrbios possivelmente não medidos que também influenciam diretamente o estado x_k do sistema, mas cuja magnitude não pode ser manipulada, pois é resultado de fatores externos ao sistema (Singh and Pal, 2017).

Considere o seguinte problema de minimização associado ao sistema (1)

$$\begin{aligned} & \min_{u_k} \{J\} \quad (2) \\ \text{s.a. } & x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k + E_k d_k + w_k, \\ & \epsilon_{k+1} = \epsilon_k + r_k - y_k, \end{aligned}$$

com d_k não mensurável, ou seja, o sistema é sujeito a entrada desconhecidas. O funcional J a ser minimizado é dado por

$$\begin{aligned} J = & x_{N+1}^T P_{N+1}^x x_{N+1} + \epsilon_{N+1}^T P_{N+1}^\epsilon \epsilon_{N+1} + x_{N+1}^T P_{N+1}^{x\epsilon} \epsilon_{N+1} + \\ & \epsilon_{N+1}^T P_{N+1}^{\epsilon x} x_{N+1} + \sum_{k=0}^N \left(x_k^T Q_k^x x_k + \epsilon_k Q_k^\epsilon \epsilon_k + u_k^T R_k u_k \right) \quad (3) \end{aligned}$$

sendo P_{N+1}^x , P_{N+1}^ϵ , $P_{N+1}^{x\epsilon}$, Q_k^x e Q_k^ϵ matrizes de ponderação conhecidas, simétricas, positivas semi-definidas e com dimensões apropriadas e R_k uma matriz de ponderação conhecida, simétrica, positiva definida e com dimensões apropriadas.

Para os casos em que não seja possível ou viável medir d_k , é necessário utilizar uma ferramenta que realize a estimativa dessa variável para que se possa aplicar controle ao sistema (1). Neste trabalho é utilizado o KFUI proposto por Darouach et al. (1995) para obtenção das estimativas \hat{x}_k e \hat{d}_k referentes aos estados x_k e entradas desconhecidas d_k , respectivamente.

Através do princípio da separação, que afirma que a otimização do controle e estimação podem ser tratados como dois problemas distintos (Ostertag and Goyena, 2011; Lewis et al., 2012), a solução do problema (2) proposta neste trabalho resulta em uma lei de controle do tipo

$$u_k^*(\hat{x}_k, e_k, r_k, \hat{d}_k) = - \left(K_k^x \hat{x}_k + K_k^\epsilon e_k + K_k^r r_k + K_k^d \hat{d}_k \right), \quad (4)$$

semelhante à obtida em Madureira et al. (2019b) para sistemas com distúrbios mensuráveis. Porém, o presente trabalho contribui com uma formulação para controladores ótimos com estados e/ou distúrbios não mensuráveis (entradas desconhecidas).

Outra contribuição consiste na adição da equação (1d) ao modelo do sistema, visando obter uma resposta transitória mais rápida. Para referências distintas previamente conhecidas um passo à frente, o parâmetro L_k é a variação da referência. Caso a sequência $\{r_k\}_{k=0}^N$ não seja conhecida, estabelecida em cada instante k ou não obedeça a uma relação linear, é possível fazer $L_k = 0$ e ainda assim obter um ganho K_k^r , melhorando a resposta transitória do sistema como mostrado em Madureira et al. (2019b).

3. LQI COM RASTREAMENTO PARA SISTEMAS SUJEITOS A DISTÚRBIOS EXTERNOS

Essa seção apresenta um método de controle ótimo baseado no LQIED para sistemas com ação integral representados por (1) quando d_k é mensurável. A vantagem do LQIED para este tipo de sistema é fornecer maior capacidade de rejeição de distúrbio com relação ao LQI clássico. A contribuição do método proposto a seguir com relação ao LQIED consiste na inclusão de (1d) na formulação do controlador, resultando em uma lei de controle que permite utilizar o conhecimento prévio de uma referência a ser seguida para antecipar ações de controle durante variações no valor da referência (*preview control*).

O teorema a seguir apresenta uma solução ótima de controle para o problema (2) quando d_k é mensurável e não há ruídos w_k e v_k .

Teorema 1. *Considere o sistema linear definido por (1) com $u_k, d_k, r_k = 0, \forall k > N$. A solução para o problema (2) é dada por (5)-(16).*

$$u_k^* = - \left(K_k^x x_k + K_k^\epsilon \epsilon_k + K_k^r r_k + K_k^d d_k \right), \quad (5)$$

onde

$$K_k^x = \Phi_k \left(P_{k+1}^x F - P_{k+1}^{x\epsilon} H_k \right), \quad (6)$$

$$K_k^\epsilon = \Phi_k P_{k+1}^{x\epsilon}, \quad (7)$$

$$K_k^r = \Phi_k \left(P_{k+1}^{x\epsilon} + L_k P_{k+1}^{xr} \right), \quad (8)$$

$$K_k^d = \Phi_k P_{k+1}^x E_k, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} P_k^x &= \left(F_k^T \left(P_{k+1}^x - P_{k+1}^{x\epsilon} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. - H_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon T} - P_{k+1}^{x\epsilon T} \Psi_k P_{k+1}^x \right) \right) F_k \\ &\quad - \left(F_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon} - P_{k+1}^{x\epsilon} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. - H_k^T \left(P_{k+1}^\epsilon - P_{k+1}^{x\epsilon T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon} \right) \right) H_k + Q_k^x \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} P_k^{x\epsilon} &= F_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon} - P_{k+1}^{x\epsilon} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon} \right) \\ &\quad - H_k^T \left(P_{k+1}^\epsilon - P_{k+1}^{x\epsilon T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$P_k^\epsilon = \left(P_{k+1}^\epsilon - P_{k+1}^{x\epsilon T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon} \right) + Q_k^\epsilon, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P_k^{xr} &= F_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon} - P_{k+1}^{x\epsilon} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon} \right) \\ &\quad - H_k^T \left(P_{k+1}^\epsilon - P_{k+1}^{x\epsilon T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon} \right) \\ &\quad + F_k^T \left(P_{k+1}^{xr} - P_{k+1}^{x\epsilon} \Psi_k P_{k+1}^{xr} \right) L_k \\ &\quad - H_k^T \left(P_{k+1}^{\epsilon r} - P_{k+1}^{x\epsilon T} \Psi_k P_{k+1}^{xr} \right) L_k \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} P_k^{\epsilon r} &= \left(P_{k+1}^{\epsilon r} - P_{k+1}^{x\epsilon T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon} \right) \\ &\quad + \left(P_{k+1}^{\epsilon r} - P_{k+1}^{x\epsilon T} \Psi_k P_{k+1}^{xr} \right) L_k, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Phi_k = \left(R_k + G_k^T P_{k+1}^x G_k \right)^{-1} G_k^T, \quad (15)$$

$$\Psi_k = G_k \Phi_k. \quad (16)$$

em que $P_k^x, Q_k^x \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $P_k^{x\epsilon}, P_k^{xr} \in \mathbb{R}^{n \times p}$; $P_k^\epsilon, P_k^{\epsilon r}, Q_k^\epsilon \in \mathbb{R}^{p \times p}$; $P_k^{\epsilon x} \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Demonstração. Obtida diretamente de Madureira et al. (2019b) com a inclusão do parâmetro L_k em (1d). \square

A solução de controle ótimo apresentada no Teorema 1 consiste no LQIED-T e é obtida para todo k conhecendo-se os parâmetros F_k, G_k, E_k e H_k o estado inicial x_0 do sistema e o distúrbio d_k e estabelecendo-se as ponderações em (2).

Observação 1. *Se $L_k = 0 \forall k \in [0, N]$ em 1, então o LQIED-T torna-se o LQIED proposto em Madureira et al. (2019b).*

A Observação 1 mostra que a solução apresentada em Madureira et al. (2019b) é um caso particular do resultado apresentado no Teorema 1.

Observação 2. *Com L_k conhecido para todo k espera-se uma resposta transitória mais rápida em relação ao LQIED e LQI clássico, visto que o ganho K_k^r atuará sobre possíveis mudanças em r_k .*

De acordo com a Observação 2, a inclusão do parâmetro L_k na modelagem do sistema é útil para acelerar a convergência do erro ($r_k - y_k$) para um valor nulo. Essa proposta tem boa relevância em sistemas que apresentam referência r_k variante no tempo.

Observação 3. *L_k pode ser utilizado como um parâmetro de sintonia.*

A Observação 3 estabelece que, se L_k não for conhecido, ele pode ser utilizado como um parâmetro ajustável (valor constante, por exemplo) a fim de se obter resposta transitória mais rápida.

4. LQG COM AÇÃO INTEGRAL E RASTREAMENTO PARA SISTEMAS LINEARES COM ENTRADAS DESCONHECIDAS

Essa seção apresenta uma solução para controladores ótimos com ação integral para sistemas sujeitos a entradas desconhecidas.

Uma vez que d_k foi definido como não mensurável em (2), é necessário estimá-lo para que a lei de controle proposta (5) possa ser utilizada. Neste trabalho, essa estimativa é obtida pelo KFUI proposto por Darouach et al. (1995), cuja vantagem em comparação ao filtro de Kalman padrão é fornecer essa estimativa da entrada desconhecida d_k .

Para a aplicação do KFUI é necessário que o sistema (1) obedeça às seguintes condições

C_1 : parâmetros F_k, G_k, E_k, H_k invariantes no tempo, ou seja, $F_k = F, G_k = G, E_k = E$ e $H_k = H$ para todo $k \in [0, N]$, sendo $F \in \mathbb{R}^{n \times n}, G \in \mathbb{R}^{n \times m}, E \in \mathbb{R}^{n \times q}, H \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

C_2 : posto(H) = p ,

C_3 : posto(E) = q ,

C_4 : $q \leq p$,

C_5 : posto(HE) = q ,

O KFUI é apresentado no teorema a seguir.

Teorema 2. (Darouach et al., 1995) *Considere o sistema (1). Desde que sejam satisfeitas as condições (C_1) a (C_4), as estimativas ótimas dos estados e das entradas desconhecidas são dadas por*

$$\bar{x}_{k|k} = F \hat{x}_{k|k} + Gu_k, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k+1} &= \bar{x}_{k|k} + E \hat{d}_{k|k+1} \\ &\quad + \mathcal{L}_{k+1}^x \left[y_{k+1} - H \left(\bar{x}_{k|k} + E \hat{d}_{k|k+1} \right) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\hat{d}_{k|k+1} = \mathcal{L}_{k+1}^d \left(y_{k+1} - H \bar{x}_{k|k} \right), \quad (19)$$

onde os ganhos \mathcal{L}_{k+1}^x e \mathcal{L}_{k+1}^d são obtidos a partir de

$$\mathcal{L}_{k+1}^x = \left(M_{k|k}^{-1} + H^T V^{-1} H \right)^{-1} H^T V^{-1}, \quad (20)$$

$$\mathcal{L}_{k+1}^d = \Pi_{k+1|k+1}^{dx} H^T V^{-1}, \quad (21)$$

com

$$M_{k|k} = F \Pi_{k|k}^x F^T + W, \quad (22)$$

$$\Pi_{k+1|k+1}^{dx} = \Pi_{k|k+1}^d E^T M_{k|k}^{-1} \left(M_{k|k}^{-1} + H^T V^{-1} H \right)^{-1}, \quad (23)$$

$$\Pi_{k|k+1}^d = \left(E^T H^T \left(V + H M_{k|k} H^T \right)^{-1} H E \right)^{-1}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1|k+1}^x &= \left(M_{k|k}^{-1} + H^T V^{-1} H \right)^{-1} \\ &+ \Pi_{k+1|k+1}^{xd} \left(\Pi_{k|k+1}^d \right)^{-1} \Pi_{k+1|k+1}^{dx}, \end{aligned} \quad (25)$$

sendo $\Pi^x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de covariância do erro da estimativa dos estados, $\Pi^d \in \mathbb{R}^{q \times q}$ a matriz de covariância do erro da estimativa da entrada desconhecida e $\Pi^{dx} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ a matriz de covariância do erro cruzado da estimativa dos estados e da entrada desconhecida ($\Pi^{xd} = (\Pi^{dx})^T$).

A observação a seguir resulta em um controlador ótimo com ação integral e rastreamento para sistemas com entradas desconhecidas.

Observação 4. O LQG-I-UI-T consiste em substituir x_k e d_k no LQIED-T (Teorema 1) pelas respectivas estimativas, \hat{x}_k e \hat{d}_k , obtidas através de (17) a (19). A combinação entre controle e estimador ótimos é permitida pelo princípio da separação.

A observação a seguir propõe a versão sem rastreamento do LQG-I-UI-T (semelhante à Observação 1).

Observação 5. Se $L_k = 0 \forall k \in [0, N]$ em 1, então o LQG-I-UI-T torna-se LQG-I-UI.

Observação 6. Conforme (19), o KFUI possui um atraso na obtenção da estimativa \hat{d}_k , pois esta é dada em função da saída y_{k+1} . Isso terá um impacto negativo no controlador, pois o sistema não terá uma ação de controle adequada nos instantes em que d_k apresentar variações instantâneas.

Até o momento, as soluções encontradas na literatura para o problema apresentado na Observação 6 exigem que o modelo em espaço de estados dado por (1) tenha uma segunda matriz de parâmetros para as entradas desconhecidas em (1b) (Pan et al., 2015) e nem sempre este parâmetro está disponível no modelo do sistema (Madureira et al., 2019a).

5. SIMULAÇÕES

Esta seção apresenta os resultados de algumas simulações numéricas comparando o desempenho dos controladores LQG-I-UI-T, LQG-I-UI, LQIED, LQIED-T e LQG-I (método clássico).

Considere o sistema representado por (1) com os seguintes parâmetros

$$F_k = \begin{bmatrix} 0,9942 & -0,1005 \\ 0,1079 & 0,9808 \end{bmatrix}, G_k = \begin{bmatrix} 11,8188 \\ -0,9496 \end{bmatrix}, E_k = \begin{bmatrix} 0,2024 \\ 0,0110 \end{bmatrix},$$

$$H_k = [1 \ 0], \forall k = 0, 1, \dots, N. \quad (26)$$

A referência utilizada nos exemplos é dada pela seguinte expressão senoidal

$$r(t) = 0,5 \text{sen}(80\pi t) + 1. \quad (27)$$

Considere $Q_k^x = I, Q_k^\epsilon = I, W = I, V = I, \forall k \in [0, N]$ e o sistema com ausência de ruídos.

Os resultados serão avaliados através da Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE, *Root Mean Square Error*) entre referência e saída, sendo

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N (r_i - y_i)^2 \right)}. \quad (28)$$

5.1 Caso 1

Este primeiro caso busca mostrar as vantagens da adição da equação (1d) na formulação do controlador (*preview control*), portanto considere $d_k = 0, \forall k \in [0, N]$. As simulações do LQG-I-UI-T e LQIED-T foram realizadas considerando L_k conhecido para todo k e utilizando-o como um parâmetro de sintonia, fazendo $L_k = 0,5, \forall k \in [0, N]$ (Observação 3). No caso do LQG-I-UI e LQIED tem-se $L_k = 0, \forall k \in [0, N]$. A formulação do LQG-I, método clássico, não contempla o parâmetro L_k .

Observa-se na Figura 1 e Tabela 1 que a saída y_k obtida através do método clássico LQG-I apresenta o maior RMSE com relação à referência. Como não há distúrbio no sistema, as respostas do LQG-I-UI-T e LQIED-T são iguais e apresentam o menor RMSE quando L_k é totalmente conhecido, pois tem-se um ganho K_k^r dado por (8) que garante seguir a referência com uma resposta mais rápida. O LQG-I-UI e LQIED também têm as respostas iguais e observa-se que considerando L_k igual a zero para todo k , o erro entre referência e resposta é melhor que o método clássico, pois a lei de controle também apresenta um ganho K_k^r , embora não seja tão bom quanto os controladores com rastreamento.

Utilizando L_k como um parâmetro de sintonia (linha azul claro) foi possível obter uma resposta intermediária entre LQG-I-UI-T/LQIED-T e LQG-I-UI/LQIED. Isso mostra que, mesmo se não existir um conhecimento prévio de L_k , pode-se atribuir valores a este parâmetro a fim de melhorar a resposta do sistema.

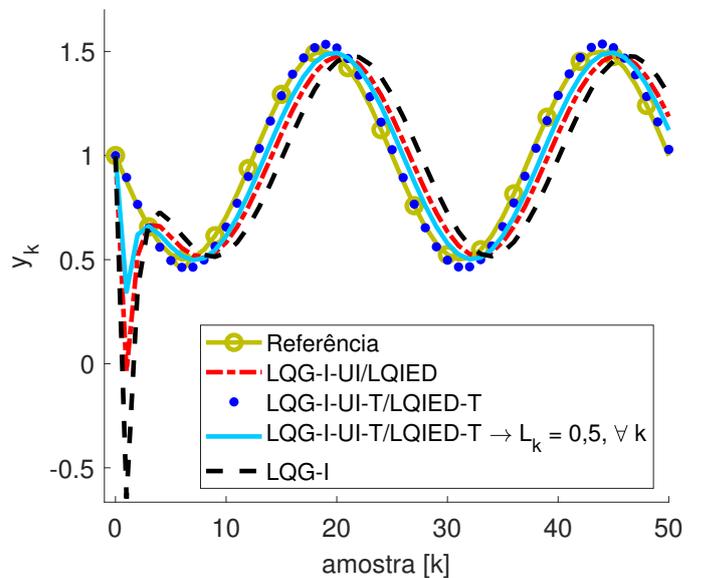


Figura 1. Saída do sistema - Caso 1

Tabela 1. RMSE para o Caso 1

| | L_k | RMSE [%] |
|-------------------|----------------------------------|----------|
| LQG-I-UI-T | Conhecido $\forall k \in [0, N]$ | 3,34 |
| LQG-I-UI-T | $0,5, \forall k \in [0, N]$ | 9,02 |
| LQG-I-UI | $0, \forall k \in [0, N]$ | 14,22 |
| LQIED-T | Conhecido $\forall k \in [0, N]$ | 3,34 |
| LQIED-T | $0,5, \forall k \in [0, N]$ | 9,02 |
| LQIED | $0, \forall k \in [0, N]$ | 14,22 |
| LQG-I | - | 22,81 |

Além de permitir seguir a referência de maneira mais adequada, o parâmetro L_k também auxilia o sistema durante o regime transitório, permitindo que a referência seja seguida pela saída y_k já nos primeiros instantes de operação do sistema. As respostas em azul e em preto na Figura 1 apresentam um tempo de transitório mais elevado, pois a variação instantânea que ocorre no valor da referência em $k = 0$ exige maior esforço de controle para estes métodos, conforme ilustrado na Figura 2.

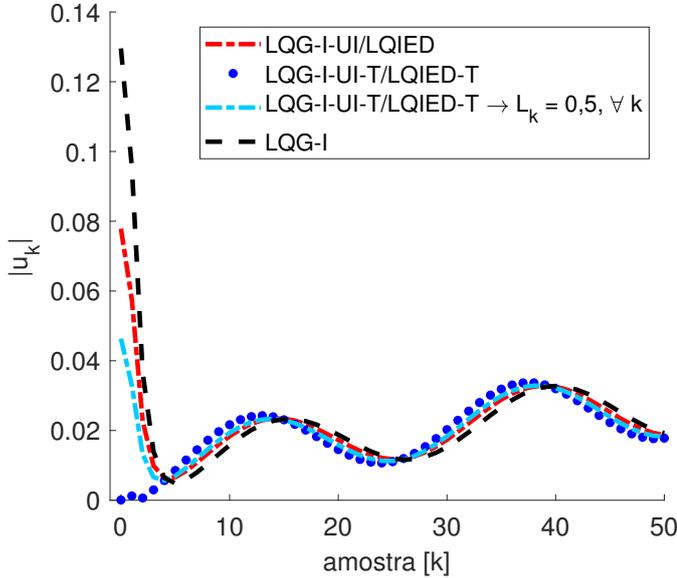


Figura 2. Sinal de controle - Caso 1

5.2 Caso 2

Neste segundo caso é analisada a rejeição de distúrbios por parte dos controladores. A simulação é a mesma do Caso 1, entretanto é aplicado um distúrbio com o seguinte comportamento

$$d_k = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq k < 26 \\ 2, & \text{para } 26 \leq k \leq N \end{cases} \quad (29)$$

As Figuras 3 e 4 mostram um comportamento semelhante ao que foi apresentado no Caso 1, exceto nos instantes próximos à ocorrência da variação instantânea no valor de d_k , onde é exigida uma elevação no módulo do esforço de controle $|u_k|$.

Observa-se que d_k afeta o desempenho do LQG-I-UI-T e do LQG-I. Este último não possui um ganho K_k^d e a rejeição de distúrbio é realizada apenas pela ação integral (1c). No caso do LQG-I-UI-T, essa perda de desempenho gera um pico elevado no esforço de controle $|u_k|$ em $k = 26$ e está associada ao fato de a estimativa \hat{d}_k possuir um atraso por ser obtida a partir da saída y_{k+1} , conforme apresentado na Observação 6. Por outro

lado, o LQIED-T, onde d_k é medido e aplicado sem atrasos no controlador, consegue rejeitar o distúrbio de maneira mais adequada.

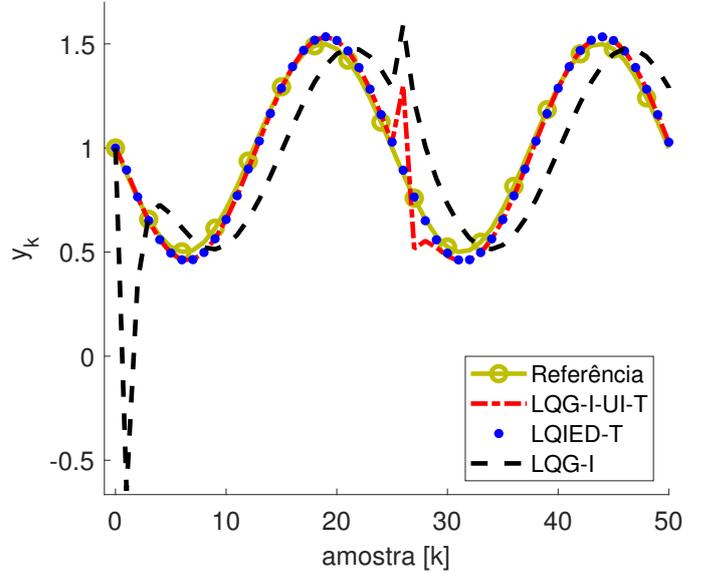


Figura 3. Saída do sistema - Caso 2

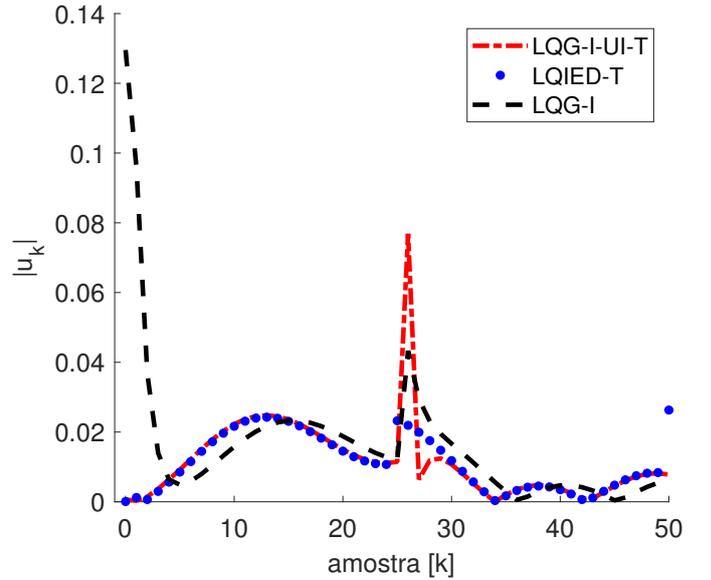


Figura 4. Sinal de controle - Caso 2

A Tabela 2 apresenta o RMSE para as simulações realizadas com a aplicação do distúrbio (29) no sistema. Observe que, com relação à Tabela 1, o desempenho do LQIED-T se manteve mesmo com a presença desse distúrbio.

Tabela 2. RMSE para o Caso 2

| | L_k | RMSE [%] |
|-------------------|----------------------------------|----------|
| LQG-I-UI-T | Conhecido $\forall k \in [0, N]$ | 10,08 |
| LQIED-T | Conhecido $\forall k \in [0, N]$ | 3,35 |
| LQG-I | - | 24,37 |

6. CONCLUSÃO

Este trabalho propõe uma nova metodologia para a obtenção de controladores ótimos com ação integral para sistemas

lineares sujeitos a entradas desconhecidas empregando um controlador ótimo quadrático com ação integral e rastreamento de referências e um filtro de Kalman para sistemas com entradas desconhecidas (KFUI).

A formulação proposta mostrou-se capaz de reduzir o tempo da resposta transitória em sistemas de controle com ação integral e seguir referências variantes no tempo com erro reduzido, conhecendo-se previamente a referência a ser seguida (*preview control*) ou não. Para isso, foi incluído um novo parâmetro no modelo do sistema, que permite relacionar variações no

Com relação ao desempenho diante de distúrbios externos, o LQIED-T proposto apresentou grande capacidade para a rejeição de distúrbios. Já o LQG-I-UI-T proposto obteve menor RMSE que o método clássico, LQG-I, na situação analisada, mas é afetado por distúrbios que variam instantaneamente. O desempenho do LQG-I-UI-T pode ser melhorado para resultados semelhantes ao LQIED-T se for utilizado em combinação com um filtro de Kalman que forneça estimativas \hat{d}_k sem atrasos. Para sistemas modelados de acordo com (1a) e (1b) tal solução não foi encontrada durante a revisão literária para a escrita deste trabalho.

Ressalta-se que, na simulação apresentada, a amplitude do distúrbio é limitada e relativamente pequena quando observase seu efeito sobre o estado do sistema. Dessa maneira, faz-se necessário um estudo mais detalhado acerca de limitações tanto na taxa de variação quanto na amplitude do distúrbio, uma vez que há uma substituição direta do valor do distúrbio na lei de controle proposta.

A metodologia é apresentada para sistemas lineares, mas a maioria dos sistemas reais é não linear. Assim, trabalhos futuros precisam avaliar e propor melhorias na formulação do controlador proposto com relação, por exemplo, à incertezas paramétricas e sintonia (definição das matrizes de ponderação) em aplicações reais.

REFERÊNCIAS

- Birla, N. and Swarup, A. (2015). Optimal preview control: A review. *Optimal Control Applications and Methods*, 36(2), 241–268. doi:10.1002/oca.2106. URL <http://doi.wiley.com/10.1002/oca.939><http://doi.wiley.com/10.1002/oca.2106>.
- Darouach, M., Zasadzinski, M., Onana, A.B., Nowakowski, S., Bassong, O.A., and Nowakowski, S. (1995). Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems. *International Journal of Systems Science*, 26(10), 2015–2028. doi:10.1080/00207729508929152. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207729508929152>.
- He, G.Z., Juang, Y.T., Tsai, J.S.H., Lin, Y.Y., Guo, S.M., Shieh, L.S., and Tsai, T.J. (2017). An effective optimal linear quadratic analog tracker for the system with unknown disturbances. In *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, volume 0267, 412–417. IEEE. doi:10.1109/ISIE.2017.8001282. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/8001282/>.
- Jeong, J., Kim, S., and Suk, J. (2015). Control System Design for a Ducted-Fan Unmanned Aerial Vehicle Using Linear Quadratic Tracker. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2015. doi:10.1155/2015/364926.
- Khalaf, M., Youssef, A., El-Saadany, E.F., and Salama, M. (2019). Detection of false data injection attacks on wide-area under-frequency load shedding protection schemes. *2019 IEEE Electrical Power and Energy Conference, EPEC 2019*, 3, 1–6. doi:10.1109/EPEC47565.2019.9074796.
- Lewis, F.L., Vrabie, D.L., and Syrmos, V.L. (2012). *Optimal Control*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA. doi:10.1002/9781118122631. URL <http://link.springer.com/10.1007/0-387-29903-3><http://doi.wiley.com/10.1002/9781118122631>.
- Madureira, V.S., das Chagas, T.P., and de Jesus, G.Q. (2019a). Irradiance estimation using Kalman filter for state-space systems with unknown inputs. In *Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Galoa. doi:10.17648/sbai-2019-111315. URL https://proceedings.science/proceedings/100113/{_}papers/111315.
- Madureira, V.S., das Chagas, T.P., and de Jesus, G.Q. (2019b). Regulador linear quadrático com ação integral para sistemas lineares com rejeição de distúrbios. In *Anais da 14ª Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*. Equipe do Portal de Eventos Científicos da EESC-USP. URL <http://biblioteca.eesc.usp.br/images/soac/dincon/dincon2020anais.pdf>.
- Manzoor, T., Xia, Y., Zhai, D.H., and Ma, D. (2020). Trajectory tracking control of a VTOL unmanned aerial vehicle using offset-free tracking MPC. *Chinese Journal of Aeronautics*, 33(7), 2024–2042. doi:10.1016/j.cja.2020.03.003. URL <https://doi.org/10.1016/j.cja.2020.03.003>.
- Ostertag, E. and Goyena, R. (2011). *Mono- and Multivariable Control and Estimation*, volume 8. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. doi:10.1007/978-3-642-13734-1. URL <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-13734-1>.
- Pan, S., Du, P., Li, Y., Chen, Z., and Wang, H. (2015). The study on an General Kalman filter with unknown inputs. *Proceedings of the World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, 2015-March(March), 3562–3567. doi:10.1109/WCICA.2014.7053308.
- Singh, A.K. and Pal, B.C. (2017). An extended linear quadratic regulator for LTI systems with exogenous inputs. *Automatica*, 76, 10–16. doi:10.1016/j.automatica.2016.10.014. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2016.10.014>.
- Smith, J., Su, J., Liu, C., and Chen, W.H. (2017). Disturbance Observer Based Control with Anti-Windup Applied to a Small Fixed Wing UAV for Disturbance Rejection. *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, 88(2-4), 329–346. doi:10.1007/s10846-017-0534-5.
- Tajdari, F., Toulkani, N.E., and Zhilakzadeh, N. (2020). Intelligent Optimal Feed-Back Torque Control of a 6DOF Surgical Rotary Robot. *2020 11th Power Electronics, Drive Systems, and Technologies Conference, PEDSTC 2020*. doi:10.1109/PEDSTC49159.2020.9088382.
- Wu, J., Liao, F., and Xu, Z. (2019). Preview control for a class of linear stochastic systems with multiplicative noise. *International Journal of Systems Science*, 50(14), 2592–2603. doi:10.1080/00207721.2019.1672000. URL <https://doi.org/00207721.2019.1672000>.
- Yaghobipour, S. and Yarahmadi, M. (2020). Solving quantum stochastic LQR optimal control problem in Fock space and its application in finance. *Computers and Mathematics with Applications*, 79(10), 2832–2845. doi:10.1016/j.camwa.2019.12.016. URL <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.12.016>.