

Realimentação de estado \mathcal{H}_∞ de sistemas com saltos markovianos a tempo contínuo com apenas o conhecimento das probabilidades estacionárias

Gabrielle Resende Oliveira *
 Alim Pedro de Castro Gonçalves * Matheus Souza *
 Lucas Porelli Moreira da Silva *

* *Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, SP, Brasil.*

Emails: gresende@dca.fee.unicamp.br, alimped@dca.fee.unicamp.br, msouza@fee.unicamp.br, lporrelli@fee.unicamp.br

Abstract: This article addresses the \mathcal{H}_∞ state feedback control design for continuous time Markov jump linear systems with knowledge of stationary probabilities only. Therefore, transition rates, which are the quantities related to the jumps in the Markov chain, are uncertain. A state feedback control synthesis method is presented. The main result is the definition of a polytopic set of all transition rate matrices such that the associated stationary probabilities are the elements of a given vector. The vertices that define the polytope are the basic feasible solutions of a linear programming problem. Numerical examples illustrate the techniques presented.

Resumo: Este artigo aborda o projeto de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estado para sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos a tempo contínuo. Com relação às probabilidades, considera-se que apenas as probabilidades estacionárias são conhecidas. Portanto, as taxas de transição, que são as grandezas relacionadas com os saltos na cadeia de Markov, são consideradas incertas. É apresentado um método de síntese de controle por realimentação de estado. O resultado principal deste trabalho é encontrar o conjunto, na forma de um politopo, de todas as matrizes de taxas de transição tais que as probabilidades estacionárias associadas sejam iguais aos elementos de um vetor dado. Os vértices que definem o politopo são determinados pelas soluções básicas factíveis de um problema de programação linear. Exemplos numéricos ilustram as técnicas apresentadas.

Keywords: Continuous-time Markov jump linear systems; State-feedback control; Stationary probabilities; Robust Control.

Palavras-chaves: Sistemas com saltos markovianos a tempo contínuo; Controle por realimentação de estado; Probabilidades estacionárias; Controle robusto.

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos (MJLS, do inglês *Markov Jump Linear Systems*) constituem uma classe interessante de sistemas dinâmicos que podem ser utilizados para modelar sistemas que sofrem mudanças abruptas em seus parâmetros ou em seus pontos de operação. Os livros (Costa et al., 2013) e (Yin and Zhang, 2012) trazem resultados importantes, diferentes aplicações e um número significativo de referências para sistemas com saltos markovianos a tempo contínuo. Os problemas mais tradicionais de síntese de controladores/filtros para MJLS assumem que as taxas de transição são perfeitamente co-

nhecidas, para os leitores mais interessados indicamos as referências (Farias, 1998), (Todorov and Fragoso, 2010) e (Todorov and Fragoso, 2008).

Um desafio interessante é considerarmos que as taxas de transição são incertas, tornando o controlador ou filtro a ser sintetizado, robusto às taxas de transição incertas, alguns resultados neste sentido podem ser encontrados pelo leitor nas referências (Cardeliquio, 2014), (Dong and Yang, 2007) e (Cardeliquio et al., 2014).

Em muitos cenários práticos, apesar de as taxas de transição serem incertas, as probabilidades estacionárias, para cada um dos modos de operação, podem ser medidas ou estimadas. Neste contexto, o presente artigo estuda o projeto robusto as incertezas politópicas nas taxas de transição, que estão ligadas com os saltos na cadeia de Markov a tempo contínuo. Vamos assumir que se conheça com precisão as probabilidades estacionárias, ou seja, ca-

* O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - 88882.329366/2019-1 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - 426638/2018-2.

racterizamos o conjunto de matrizes de taxas de transição que atendem uma única distribuição estacionária de uma cadeia de Markov a tempo contínuo. Mostramos que tal conjunto é um politopo convexo, fato que nos permite projetar controladores robustos com custo garantido \mathcal{H}_∞ .

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E PRELIMINARES

Cadeias de Markov são processos estocásticos nos quais a probabilidade de eventos futuros depende somente do modo atual e cuja variável aleatória associada aos modos assume valores em um conjunto contável. Neste trabalho, em particular, consideramos uma cadeia de Markov finita, assumindo valores no conjunto $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$. Cadeias de Markov a tempo contínuo são definidas como segue (Ross, 2010).

Definição 1: *Um processo $\{\theta(t), t \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo se para todo $s, t \geq 0$ e inteiros não negativos $i, j, x(u)$, for válido que*

$$\begin{aligned} \text{Prob}[\theta(t+s) = j | \theta(s) = i, \theta(u) = x(u), 0 \leq u < s] \\ = \text{Prob}[\theta(t+s) = j | \theta(s) = i]. \end{aligned}$$

Em uma cadeia de Markov a tempo contínuo, a probabilidade de transição entre o estado $i \in \mathbb{K}$ e o estado $j \in \mathbb{K}$ depende do intervalo de tempo Δ . Definimos essa probabilidade de transição como

$$p_{ij}(\Delta) = \text{Prob}[\theta_{t+\Delta} = j | \theta_t = i]. \quad (1)$$

É possível mostrar (Garcia, 2008) que $p_{ij}(\Delta)$ é dada por

$$p_{ij}(\Delta) = \begin{cases} \lambda_{ij}\Delta + o(\Delta) & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}\Delta + o(\Delta) & i = j \end{cases}, \quad (2)$$

na qual $\lambda_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$, $\lambda_{ii} \leq 0$, $\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} = 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e $o(\Delta)$ denota um termo que se torna desprezível quando Δ tende para zero. Os parâmetros λ_{ij} para todo $i, j \in \mathbb{K}$ são chamados taxas de transição e podem ser organizados em uma matriz Λ ,

$$\Lambda = [\lambda_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}. \quad (3)$$

2.1 Matriz de taxas de transição e tempos de permanência

Para uma cadeia de Markov a tempo contínuo existe uma relação importante entre o tempo de permanência em cada modo $i \in \mathbb{K}$ e a componente λ_{ii} da matriz das taxas de transição. Como pode ser conferido em (Garcia, 2008), o tempo de permanência no modo $i \in \mathbb{K}$ é uma variável aleatória com distribuição exponencial cuja média é dada por

$$\tau_i = \frac{1}{|\lambda_{ii}|}. \quad (4)$$

Chamamos atenção para a relação entre o módulo de λ_{ii} e o tempo médio de permanência da cadeia no modo $i \in \mathbb{K}$. Como veremos na sequência, esta observação fundamenta a escolha de um valor máximo para $|\lambda_{ii}|$ para todo $i \in \mathbb{K}$.

Além disso, quando esse tempo de permanência no modo $i \in \mathbb{K}$ se esgotar, o próximo modo $j \in \mathbb{K}$ é selecionado de acordo com uma cadeia de Markov discreta com probabilidades de transição \tilde{q}_{ij} , que chamamos de cadeia de Markov embutida.

Para determinar de \tilde{q}_{ij} , partimos de

$$p_{ij}(\Delta) = (1 - p_{ii}(\Delta))\tilde{q}_{ij}, \quad (5)$$

que, levando em conta (2), permite escrever

$$\tilde{q}_{ij} = \frac{\lambda_{ij} + o(\Delta)/\Delta}{-\lambda_{ii} - o(\Delta)/\Delta}. \quad (6)$$

Logo, para Δ arbitrariamente pequeno temos

$$\tilde{q}_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{|\lambda_{ii}|}. \quad (7)$$

Em resumo, a cadeia embutida é descrita pelas probabilidades de transição:

$$\begin{aligned} Q_\lambda = [\tilde{q}_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}, \\ \tilde{q}_{ij} = \lambda_{ij}/|\lambda_{ii}|, \quad \text{para todo } i \neq j \\ \tilde{q}_{ii} = 0 \quad \text{para todo } i \in \mathbb{K}. \end{aligned} \quad (8)$$

2.2 Estado estacionário das cadeias de Markov a tempo contínuo

Definindo a probabilidade de uma variável aleatória θ assumir o valor $i \in \mathbb{K}$ em um instante $t \in \mathbb{R}$ como $p_i(t) = \text{Prob}[\theta(t) = i]$, temos para cadeias de Markov a tempo contínuo as chamadas equações de Chapman-Kolmogorov (Garcia, 2008). A equação diferencial a seguir

$$\dot{p}_j(t) = \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} p_i(t), \quad (9)$$

é válida para todo $j \in \mathbb{K}$. Se o processo admitir um estado estacionário, então teremos $p_j(t) \rightarrow \pi_j$ e $\dot{p}_j(t) \rightarrow 0$ e, por (9),

$$0 = \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \pi_i, \quad (10)$$

para todo $j \in \mathbb{K}$. Note que, a partir de (10), podemos calcular as probabilidades estacionárias a partir das taxas de transição. Entretanto, há outras restrições sobre π_i , $i \in \mathbb{K}$, que devem ser levadas em conta, como $\pi_i \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e

$$\sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_i = 1. \quad (11)$$

Se chamarmos o vetor de probabilidades estacionárias de $\pi_{\text{est}} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_N]^T$, podemos escrever (10) e (11) em notação matricial como

$$\Lambda^T \pi_{\text{est}} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

$$\mathbf{1}^T \pi_{\text{est}} = \mathbf{1}, \quad (13)$$

sendo que $\mathbf{0}$ é um vetor nulo e $\mathbf{1}$ é um vetor composto de 1 em todas os seus componentes. Assim, buscar o vetor de probabilidades estacionárias π_{est} de uma cadeia a tempo contínuo para a qual se conhece a matriz de taxas de transição Λ , equivale a encontrar solução com todos os elementos não-negativos para (12) – (13).

O problema que precisamos resolver aqui é ligeiramente diferente. O que conhecemos são as probabilidades estacionárias π_{est} que, naturalmente, já satisfazem (11) ou (13). Queremos caracterizar o conjunto de todas as matrizes de transição Λ , tais que $\Lambda\mathbf{1} = \mathbf{0}$, cujos elementos verificam (12). Um método para definir os vértices deste politopo é o assunto da Seção 3.

2.3 Sistema linear sujeito a saltos markovianos a tempo contínuo

Um sistema linear sujeito a saltos markovianos em tempo contínuo é descrito pelo modelo \mathcal{G} abaixo

$$\dot{x}(t) = A(\theta_t)x(t) + B(\theta_t)u(t) + J(\theta_t)w(t), \quad (14)$$

$$z(t) = C_z(\theta_t)x(t) + D_z(\theta_t)u(t), \quad (15)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é a variável de estado do sistema, $\theta(t) = \theta_t \in \mathbb{K}$ é uma variável aleatória que assume valores em uma cadeia de Markov com modos $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ é uma perturbação externa, $z(t) \in \mathbb{R}^r$ é a saída a ser controlada e $u(t) \in \mathbb{R}^q$ é o sinal de controle.

As matrizes da representação de estado variam de acordo com a evolução de uma cadeia de Markov a tempo contínuo e vamos supor, inicialmente, que sua matriz de taxas de transição é fornecida.

Considere o sistema (14)–(15) a ser controlado e a entrada de controle $u(t)$, tal que

$$u(t) = K(\theta_t)x(t). \quad (16)$$

Substituindo (16) em (14)–(15), obtemos o sistema em malha fechada \mathcal{G}_c .

$$\dot{x}(t) = (A(\theta_t) + B(\theta_t)K(\theta_t))x(t) + J(\theta_t)w(t), \quad (17)$$

$$z(t) = (C_z(\theta_t) + D_z(\theta_t)K(\theta_t))x(t). \quad (18)$$

Conforme o resultado a seguir, retirado de (Cardeliquio, 2014), temos um método para a síntese de ganhos de controle K_i , $i \in \mathbb{K}$ tais que a norma \mathcal{H}_∞ do sistema (17) – (18), representada por $\|\mathcal{G}_c\|_\infty$, seja mínima.

Teorema 1: *Considere o sistema dinâmico (17)–(18). Para todo $i \in \mathbb{K}$, existe ganho de controle por realimentação de estado, tal que*

$$\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 = \min \gamma^2, \quad (19)$$

se, e somente se, existirem matrizes simétricas $X_i > 0$, $Z_{ij} > 0$ e matrizes Y_i e H_i de dimensões compatíveis que satisfaçam as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} A_i X_i + X_i A_i^\top + B_i Y_i + Y_i^\top B_i^\top + \lambda_{ii} X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ J_i^\top & -\gamma^2 I & \bullet & \bullet \\ X_i & 0 & -H_i - H_i^\top + \Psi_i & \bullet \\ C_{zi} X_i + D_{zi} Y_i & E_{zi} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & X_j \end{bmatrix} > 0, \quad i \neq j, \quad (21)$$

para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ e $\Psi_i = \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} Z_{ij}$ para $j \neq i$. O ganho de realimentação de estado é dado por

$$K_i = Y_i X_i^{-1}, \quad (22)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$.

Para a demonstração deste resultado, veja (Cardeliquio, 2014).

2.4 Sistemas com saltos markovianos e matriz das taxas de transição incertas

No Teorema 1 assumimos o conhecimento da matriz de taxas de transição. Porém, podemos ter o caso em que alguns ou todos os elementos da matriz Λ sejam desconhecidos. O projeto de controladores robustos a tais variações nas taxas de transição é desejável.

Uma forma de modelar as taxas de transição desconhecidas, usada em (Cardeliquio, 2014), é descrever os elementos da matriz de taxas de transição como pertencentes a um conjunto politópico Γ com $V \in \mathbb{N}$ vértices conhecidos. Ou seja, podemos escrever qualquer matriz nesse conjunto como

$$\Lambda = \sum_{v=1}^V \alpha_v \Lambda^{(v)}, \quad (23)$$

em que os coeficientes $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_V]^\top$ pertencem ao simplex unitário S :

$$S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^V : \sum_{v=1}^V \alpha_v = 1, \quad \alpha_v \geq 0 \right\}. \quad (24)$$

Como as condições no Teorema 1 são afins em relação aos parâmetros λ_{ij} , podemos adaptá-las para o caso de incertezas politópicas. Neste caso, basta escrever cada uma das restrições do teorema para cada vértice conhecido do politopo. Se tal conjunto de restrições tiver uma mesma solução, então essa solução garante um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema \mathcal{G}_c , quaisquer que sejam as taxas de transição incertas. É importante ressaltar que o caráter necessário das restrições se perde.

3. POLITOPOS, MATRIZES DAS TAXAS DE TRANSIÇÃO E PROBABILIDADES ESTACIONÁRIAS

Esta seção apresenta a principal contribuição deste artigo. Nosso objetivo é encontrar o conjunto de todas as matrizes de taxas de transição Λ tais que suas probabilidades estacionárias sejam iguais a um vetor de probabilidades

$\pi_{\text{est}} \in \mathbb{R}^N$ dado. Em particular, mostramos que tal conjunto é um polítopo convexo e apresentamos uma forma para calcular seus vértices.

Dado um vetor de probabilidades estacionárias $\pi_{\text{est}} \in \mathbb{R}^N$, uma matriz de taxas de transição $\Lambda \in \mathbb{R}^{N \times N}$ que implique em tais probabilidades deve satisfazer

$$\begin{cases} \Lambda^\top \pi_{\text{est}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda \mathbf{1} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (25)$$

no qual $\lambda_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, e $\lambda_{ii} \leq 0$. É importante destacar que nossas variáveis são os elementos λ_{ij} , $i, j \in \mathbb{K}$ da matriz $\Lambda \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

O sistema de equações (25), com as restrições para os sinais de λ_{ij} , constitui um conjunto de equações lineares. Não é difícil colocar essas informações na chamada forma padrão das restrições de um problema de programação linear (PL). Um problema de programação linear é um problema de otimização em que tanto a função objetivo quanto as restrições são lineares, e cuja forma padrão de representação é dada por (Bazaraa et al., 2005), conforme a seguir

$$\min_x f^\top x \text{ sujeito a: } Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (26)$$

sendo $f \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ os dados do problema e $x \in \mathbb{R}^n$ as variáveis de decisão.

Vamos lançar mão do conceito de solução básica de um PL, como encontrado, por exemplo, em (Bazaraa et al., 2005).

Definição 2: Considere o sistema linear $Ax = b$, com $x \geq 0$, sendo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m < n$, e suponha que $\text{posto}(A) = m$. Suponha que, após um possível rearranjo de colunas, A possa ser escrita como $A = [B \ N]$, com B quadrada e não-singular. A solução x do sistema linear $Ax = b$ dada por

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \quad x_B = B^{-1}b, \quad x_N = 0, \quad (27)$$

é chamada de solução básica. Se, além disso, $x_B \geq 0$ então x é uma solução básica factível do sistema $Ax = b, x \geq 0$. As variáveis x_B são chamadas de variáveis básicas ou dependentes e as variáveis x_N são chamadas de variáveis não-básicas (ou independentes). A matriz B é chamada de matriz básica e a matriz N é chamada de matriz não-básica. Se $x_B > 0$, então a solução básica é dita não-degenerada, caso alguma componente de x_B seja nula, então a solução básica é degenerada.

A importância, para nós, do conceito acima está na correspondência entre soluções básicas factíveis e pontos extremos de um polítopo, como mostrado em (Bazaraa et al., 2005) e enunciado a seguir.

Teorema 2: Um ponto \bar{x} é ponto extremo do polítopo factível \mathcal{X} de (26) se, e somente se, \bar{x} for uma solução básica factível do sistema definido pelas restrições de (26).

A relação entre a Definição 2, o Teorema 2 e nosso problema é imediata. Determinar os vértices do polítopo Γ , que contém todas as matrizes de transição Λ que

satisfazam (25), é o mesmo que calcular soluções básicas de um PL convenientemente especificado.

No caso de cadeias de Markov a tempo contínuo, há um problema. Como as taxas de transição λ_{ii} têm módulo ilimitado, a região procurada é um cone em vez de um polítopo compacto. Para contornar esta dificuldade, vamos limitar o valor do módulo de λ_{ii} . De fato, se o módulo de λ_{ii} for muito grande, o tempo de permanência médio da cadeia de Markov naquele modo $i \in \mathbb{K}$ vai tender a zero, indicando uma situação degenerada em que a cadeia praticamente não permanece em um de seus modos. Assim, além das restrições já apresentadas, limitaremos inferiormente o tempo médio de permanência em cada modo da cadeia, obtendo assim um polítopo convexo.

O leitor pode notar que o polítopo obtido ao resolver o problema proposto no Teorema 2, será utilizado para se resolver o problema de otimização convexa proposto no Teorema 1.

4. EXEMPLOS

4.1 Polítopos e probabilidades estacionárias

O polítopo de matrizes de transição associado ao vetor de probabilidades estacionárias $\pi_{\text{est}} = [0,6 \ 0,4]^\top$ é definido pelos seguintes vértices

$$\left\{ \begin{bmatrix} -0,3333 & 0,3333 \\ 0,5000 & -0,5000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (28)$$

quando os tempos médios de permanência satisfazem $\tau_1 \geq 1s$ e $\tau_2 \geq 2s$.

Para o caso com três modos e $\pi_{\text{est}} = [0,3 \ 0,5 \ 0,2]^\top$, temos o polítopo Γ cujos vértices são dados pelo conjunto a seguir

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & -0,2 & 0,2 \\ 0,0 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0,3 & 0,0 & 0,3 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,5 & 0,0 & -0,5 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} -0,3 & 0,0 & 0,3 \\ 0,2 & -0,2 & 0,0 \\ 0,0 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0,3 & 0,3 & 0,0 \\ 0,0 & -0,2 & 0,2 \\ 0,5 & 0,0 & -0,5 \end{bmatrix} \end{array} \right\}, \quad (29)$$

quando consideramos as restrições $\tau_1 \geq 0,5s$, $\tau_2 \geq 1s$ e $\tau_3 \geq 2s$, note que os vértices do polítopo (29) satisfazem (25).

4.2 Controle por realimentação de estado do sistema massa-mola-amortecedor

Neste exemplo, consideramos o controle por realimentação de estado \mathcal{H}_∞ de um sistema massa-mola-amortecedor, cujo modelo está descrito em (Gabriel et al., 2018). O objetivo principal é o controle do sistema massa-mola-amortecedor controlado através de uma rede de comunicação, em que podem ocorrer perdas na informação transmitida.

O sistema é modelado por dois modos, nominal e falha de rede. Considerando $m_1 = 0,5$, $m_2 = 1$, $b = 0,2$, $k_2 = 7$ e $k_1 = 12$, as matrizes são

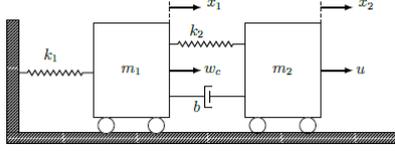


Figura 1. Sistema massa-mola-amortecedor.

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (-k_2 - k_1)/m_1 & k_2/m_1 & -b/m_1 & b/m_1 \\ k_2/m_2 & -k_2/m_2 & b/m_2 & -b/m_2 \end{bmatrix} \forall i \in \mathbb{K}, \quad (30)$$

$$B_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top, \quad B_2 = [0 \ 0 \ 1/m_2 \ 0]^\top, \quad (31)$$

$$J_i = [0 \ 0 \ 1/m_1 \ 0]^\top, \quad Cz_i = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \forall i \in \mathbb{K}, \quad (32)$$

$$Dz_i = [0 \ 0 \ 1]^\top \text{ e } Ez_i = [0 \ 0 \ 0]^\top \quad \forall i \in \mathbb{K}. \quad (33)$$

Vamos considerar as probabilidades estacionárias de $\pi_1 = 0,9$ e $\pi_2 = 0,1$, que indicam uma ocorrência média de falha na rede de 10%. O tempo médio de permanência sem falha é $\tau_1 \geq 2$ segundos e o tempo médio de permanência no modo com falha é de $\tau_2 \geq 0,7$ segundos. A região politópica é dada pelos vértices

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0,1587 & 0,1587 \\ 1,4286 & -1,4286 \end{bmatrix} \right\}. \quad (34)$$

Fechando a malha de controle e aplicando o Teorema 1 com restrições para os vértices acima, obtemos um custo garantido de 38,3161 para a norma \mathcal{H}_∞ e os seguintes ganhos de realimentação de estado

$$K_1 = [-2,8503 \ -34,0478 \ -5,4368 \ -25,8895], \quad (35)$$

$$K_2 = 1 \cdot 10^{-5} [-6,5988 \ 2,7437 \ 3,4656 \cdot 10^{-2} \ 8,2246 \cdot 10^{-2}]. \quad (36)$$

Com os ganhos obtidos, simulamos a resposta temporal do sinal de saída $z(t)$ e do sinal de controle $u(t)$ efetuando 2500 realizações de Monte Carlo da cadeia de Markov a tempo contínuo e sinal de ruído dado por *sen* para todo $t \in [0,10]$ e zero caso contrário.

A Figura 2 apresenta a média quadrática do sinal de saída (azul), bem como a região acinzentada definida como a média de $z(t)^\top z(t) \pm$ o desvio padrão. A Figura 3 apresenta a média quadrática do sinal de controle, bem como a região definida por mais ou menos um desvio padrão.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, mostramos como é possível representar as taxas de transição de uma cadeia de Markov a tempo contínuo por meio de um politopo convexo, desde que sejam considerados um conjunto de probabilidades estacionárias e limites inferiores para os tempos de permanência médios em cada modo da cadeia. Ilustramos uma

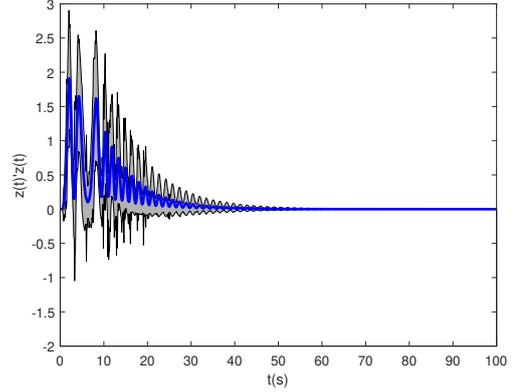


Figura 2. Sinal de saída (média quadrática).

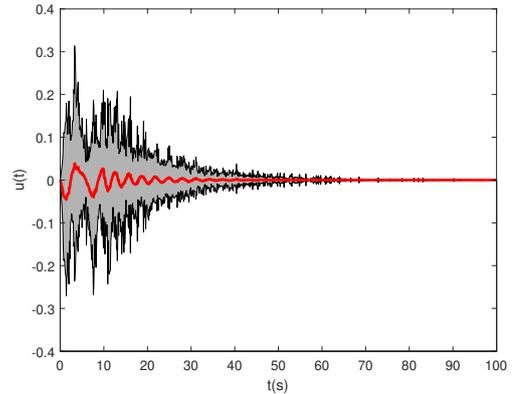


Figura 3. Esforço de controle.

possível aplicação do resultado para o projeto de ganhos de realimentação de estado \mathcal{H}_∞ de sistemas com saltos markovianos a tempo contínuo. É possível fazer a aplicação em projetos de realimentação de estado e filtragem \mathcal{H}_2 a tempo contínuo.

REFERÊNCIAS

- Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J., and Sherali, H.D. (2005). *Linear Programming and Network Flows*. Wiley Interscience.
- Cardeliquio, C.B. (2014). Controle de sistemas markovianos a tempo contínuo com taxas de transição incertas. Dissertação de Mestrado. UNICAMP.
- Cardeliquio, C., Fioravanti, A.R., and Gonçalves, A.P.C. (2014). \mathcal{H}_2 output-feedback control of continuous-time mjls with uncertain transition rates. In *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, 1097–1102. IEEE.
- Costa, O.L.V., Fragoso, M.D., and Todorov, M.G. (2013). *Continuous-Time Markov Jump Linear Systems*. Springer.
- Dong, J. and Yang, G.H. (2007). \mathcal{H}_2 state feedback control synthesis of continuous-time uncertain markov jump linear systems. In *2007 American Control Conference*, 2417–2421. IEEE.
- Farias, D.P. (1998). Otimização e controle de sistemas com parâmetros sujeito a saltos markovianos. Dissertação de Mestrado. Unicamp.
- Gabriel, G.W., Gonçalves, T.R., and Geromel, J.C. (2018). Optimal and robust sampled-data control of markov

- jump linear systems: a differential lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Garcia, A.L. (2008). *Probability Statistics and Random Processes for Electrical Engineering*. Pearson Prentice Hall.
- Ross, S.M. (2010). *Introduction to Probability Models*. Pearson Prentice Hall.
- Todorov, M.G. and Fragoso, M.D. (2008). Output feedback H_∞ control of continuous-time infinite markovian jump linear systems via lmi methods. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(2), 950–974.
- Todorov, M.G. and Fragoso, M.D. (2010). Output-feedback robust control of continuous-time infinite markov jump linear systems. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 6505–6510. IEEE.
- Yin, G.G. and Zhang, Q. (2012). *Continuous-time Markov chains and applications: a two-time-scale approach*, volume 37. Springer Science & Business Media.