

Realimentação de estado \mathcal{H}_∞ de sistemas com saltos markovianos a tempo discreto com apenas o conhecimento das probabilidades estacionárias

Gabrielle Resende Oliveira * Lucas Porelli Moreira da Silva *
Alim Pedro de Castro Gonçalves * Matheus Souza *

* *Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, SP, Brasil.*

Emails: gresende@dca.fee.unicamp.br, lporrelli@dca.fee.unicamp.br,
alimped@dca.fee.unicamp.br, msouza@fee.unicamp.br

Abstract: This article addresses the \mathcal{H}_∞ state feedback control design for discrete time Markov jump linear systems with knowledge of the Markov chain stationary probabilities only. Therefore transition probabilities, which are the quantities related to the jumps in the Markov chain, are uncertain. The main result is the definition of a polytopic set of all transition probabilities matrices such that the associated stationary probabilities are the components of a given vector. Numerical example and application in the state feedback control \mathcal{H}_∞ of an unmanned aircraft illustrate the presented techniques.

Resumo: Este artigo aborda o projeto de controle de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos a tempo discreto por realimentação de estado \mathcal{H}_∞ , com conhecimento apenas das probabilidades estacionárias da cadeia de Markov. Portanto, as probabilidades de transição são consideradas incertas. Essas probabilidades estão relacionadas aos saltos da cadeia de Markov. O principal resultado é a definição de um conjunto politópico de todas as matrizes de probabilidades de transição, de modo que as probabilidades estacionárias associadas sejam os componentes de um vetor conhecido. Um exemplo numérico de uma aplicação no controle por realimentação de estado \mathcal{H}_∞ de uma aeronave não tripulada ilustra as técnicas apresentadas.

Keywords: Discrete-time Markov jump linear systems; State-feedback control; Stationary probabilities; Robust Control.

Palavras-chaves: Sistemas com saltos markovianos a tempo discreto; Controle por realimentação de estado; Probabilidades estacionárias; Controle robusto.

1. INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos suscetíveis as mudanças bruscas em suas estruturas ou em seus pontos de operação podem ser modelados pelos sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos (MJLS, do inglês *Markov Jump Linear Systems*). A referência (Costa et al., 2005) apresenta definições e resultados interessantes bem como aplicações e numerosas referências importantes para trabalhos na literatura envolvendo sistemas com saltos markovianos a tempo discreto. Geralmente, o problema de síntese de controladores e filtros consideram que as probabilidades de transição associadas à cadeia de Markov são totalmente conhecidas, para os leitores mais interessados recomendamos consultar as referências (Oliveira, 2014), (Gonçalves et al., 2012) e (Oliveira, 2019).

É desafiador o projeto robusto as incertezas na matriz de probabilidades de transição. Esse caso é discutido nas referências (Gonçalves, 2009) e (Gonçalves et al., 2012), note que em (Gonçalves, 2009) são propostos controladores robustos por realimentação dinâmica de saída e filtragem de sistemas com saltos markovianos a tempo discreto, já a referência (Gonçalves et al., 2012) trata do problema de realimentação de estados. Também, podemos citar as referências (Cardeliquio, 2014), (Dong and Yang, 2007) e (Cardeliquio et al., 2014) para o caso MJLS a tempo contínuo, no qual abordam a robustez na matriz de transição incerta, tornando o controlador ou filtro a ser sintetizado, robusto às taxas de transição incertas.

Contudo, pode ser que apesar de desconhecidas as probabilidades de transição, sejam conhecidas as probabilidades estacionárias da cadeia de Markov. Neste contexto, o presente artigo estuda o projeto robusto às incertezas paramétricas nas probabilidades de transição, que são as grandezas relacionadas com os saltos na cadeia de Markov a tempo discreto. Conhecendo o vetor de probabilidades estacionárias, podemos montar um conjunto politópico uti-

* O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - 88882.329366/2019-1 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - 426638/2018-2.

lizando o método de soluções básicas. Este politopo cujos vértices e qualquer combinação convexa destes, atende o vetor de probabilidades estacionárias. Assim permitindo projetar controladores \mathcal{H}_∞ robustos às incertezas nas probabilidades de transição.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E PRELIMINARES

Cadeias de Markov em tempo discreto são aquelas em que as transições ocorrem em instantes definidos de tempo. Para especificar este tipo de cadeia definimos o espaço de estados $X \in \mathbb{K} \subset \mathbb{N}$, probabilidade do estado inicial $\pi_{0i} = \text{Prob}[X_0 = i]$, para $i \in \mathbb{K}$ e as probabilidades de transição constantes em relação ao tempo, isto é, $p_{ij} = \text{Prob}[X_{k+1} = j \mid X_k = i]$, onde i é o estado atual e j é o próximo estado, (Garcia, 2008).

A matriz Π é chamada de matriz de probabilidade de transição, como a cadeia de Markov que consideramos é finita então Π será uma matriz quadrada $N \times N$, não negativa, com as somatórias dos elementos de cada linhas iguais a 1. Em outras palavras, a matriz de probabilidades deve satisfazer as restrições usuais de probabilidade, isto é

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} = 1, \quad \text{para todo} \quad (i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}. \quad (1)$$

2.1 Estado estacionário das cadeias de Markov a tempo discreto

Como apresentado em (Ross, 2010), quando uma cadeia de Markov a tempo discreto evolui ao longo do tempo, podemos definir as probabilidades de transição para n etapas, isto é

$$p_{ij}^{m+n} = \sum_k p_{ik}^m p_{kj}^n \quad \text{para todo} \quad m, n \geq 0 \text{ e } i, j \in \mathbb{K}. \quad (2)$$

A evolução das probabilidades de a cadeia de Markov estar em cada modo são chamadas de equações de Chapman-Kolmogorov, onde $p_{ik}^m p_{kj}^n$ representa as probabilidades, começando no estado i , a cadeia atingir o estado k em m passos e depois atingir j em n passos.

É possível utilizar a equação (2) para determinar o estado estacionário da cadeia de Markov a tempo discreto, neste caso, depois de a cadeia de Markov evoluir por muito tempo, ou seja, $n \rightarrow \infty$, observamos que a matriz de probabilidade de transição para n passos tende a uma matriz na qual todas as linhas são iguais, pela notação matricial temos

$$\Pi^n \rightarrow \mathbf{1}\pi_{\text{est}}, \quad (3)$$

onde $\mathbf{1}$ e π_{est} são vetores colunas, tal que $\mathbf{1} = [1, 1, \dots]^\top$ e $\pi_{\text{est}} = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N]^\top$.

O vetor de probabilidade π_{est} é dito vetor de probabilidades estacionárias da cadeia de Markov discreta. Respeitando a normalização, que a soma das componentes do vetor estacionário seja igual a 1, ou seja, $\sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_i = 1$

e considerando que no estado estacionário o vetor de probabilidade inicial π_{0i} será igual ao vetor estacionário, conhecida a matriz Π , é possível calcular as probabilidades estacionárias, caso existam. Assim, o vetor de probabilidade π_{est} pode ser encontrado por

$$\Pi^\top \pi_{\text{est}} = \pi_{\text{est}}, \quad (4)$$

em que o vetor de estado estacionário $\pi_{\text{est}} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, onde N é o número de estados e Π é a matriz de probabilidade para a cadeia de Markov a tempo discreto. Cadeias estacionárias devem obedecer condições de irredutibilidade, recorrência e aperiodicidade, ver em (Garcia, 2008).

2.2 Sistema linear sujeito a saltos markovianos a tempo discreto

Um sistema linear sujeito a saltos markovianos em tempo discreto é descrito pelo modelo \mathcal{G} abaixo

$$x(k+1) = A(\theta_k)x(k) + B(\theta_k)u(k) + J(\theta_k)w(k), \quad (5)$$

$$z(k) = C_z(\theta_k)x(k) + D_z(\theta_k)u(k), \quad (6)$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é a variável de estado do sistema, $\theta(k) = \theta_k \in \mathbb{K}$ é uma variável aleatória que assume valores em uma cadeia de Markov com modos $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ é uma perturbação externa, $z(k) \in \mathbb{R}^r$ é a saída a ser controlada e $u(k) \in \mathbb{R}^q$ é o sinal de controle.

As matrizes da representação de estado variam de acordo com a evolução de uma cadeia de Markov a tempo discreto e vamos supor, inicialmente, que a matriz de probabilidades de transição é dada.

Considere o sistema (5)–(6) a ser controlado e a entrada de controle $u(k)$, tal que

$$u(k) = K(\theta_k)x(k). \quad (7)$$

Substituindo (7) em (5)–(6), obtemos o sistema em malha fechada \mathcal{G}_c .

$$x(k+1) = (A(\theta_k) + B(\theta_k)K(\theta_k))x(k) + J(\theta_k)w(k), \quad (8)$$

$$z(k) = (C_z(\theta_k) + D_z(\theta_k)K(\theta_k))x(k). \quad (9)$$

Conforme o resultado a seguir, retirado de (Gonçalves et al., 2012), temos um método para a síntese de ganhos de controle K_i , para todo $i \in \mathbb{K}$ tais que a norma \mathcal{H}_∞ do sistema (8) – (9), representada por $\|\mathcal{G}_c\|_\infty$, seja mínima.

Teorema 1: *Considere o sistema dinâmico (8)–(9). Para todo $i \in \mathbb{K}$, existe ganho de controle por realimentação de estado, tal que*

$$\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 = \min \gamma \quad (10)$$

a variável $\gamma \in \mathbb{R}^+$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas $X_i > 0$, $Z_{ij} > 0$ e matrizes G_i , Y_i e H_i de dimensões compatíveis que satisfaçam as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & X_j \end{bmatrix} > 0 \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^\top - X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ A_i G_i + B_i Y_i & J_i & H_i + H_i^\top - \Psi_i & \bullet \\ C_i G_i + D_i Y_i & E_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (12)$$

nas quais $\Psi_i = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} Z_{ij}$, para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. O ganho de realimentação de estado é dado por

$$K_i = Y_i G_i^{-1}, \quad (13)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$.

Para a prova deste teorema, veja (Gonçalves et al., 2012).

2.3 Sistemas com saltos e matriz de probabilidades incertas

O Teorema 1 apresenta as restrições com matriz de probabilidades de transição conhecidas. No entanto, quando alguns ou todos os elementos da matriz Π são desconhecidos é necessário o projeto de controladores robustos as variações nessas probabilidades de transição.

A tese de doutorado (Gonçalves, 2009) mostra que probabilidades de transição incertas podem ser descritas como elementos de matrizes de probabilidades pertencentes a um conjunto politópico convexo \wp com $V \in \mathbb{N}$ vértices conhecidos. Isto é

$$\Pi = \sum_{v=1}^V \alpha_v \Pi^{(v)}, \quad (14)$$

em que os coeficientes $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_V]^\top$ pertencem ao simplex unitário.

$$S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^V : \sum_{v=1}^V \alpha_v = 1, \quad \alpha_v \geq 0 \right\}. \quad (15)$$

Desta forma, podemos adaptar o Teorema 1 para o caso de incertezas politópicas, pois as restrições são afins em relação aos parâmetros p_{ij} . A solução garante um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema \mathcal{G}_c para quaisquer probabilidades que estejam no interior do politopo. É necessário salientar apenas a condição de suficiência para o Teorema 1.

3. POLITOPOS, MATRIZES DE PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO E PROBABILIDADES ESTACIONÁRIAS

O objetivo desta seção é computar o conjunto das matrizes de probabilidades de transição Π no qual as probabilidades estacionárias sejam dadas pelos elementos de um vetor $\pi_{\text{est}} \in \mathbb{R}^N$ conhecido. Mostramos que tal conjunto é um conjunto convexo politópico. Para calcular seus vértices, seja um dado vetor estacionário $\pi_{\text{est}} \in \mathbb{R}^N$ e uma matriz de probabilidades de transição $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Tais probabilidades devem satisfazer as restrições de normalização a seguir

$$\begin{cases} \Pi^\top \pi_{\text{est}} = \pi_{\text{est}}, \\ \Pi \mathbf{1} = \mathbf{1}, \end{cases} \quad (16)$$

em que $p_{ij} \geq 0$ para $i, j \in \mathbb{K}$ são as variáveis da matriz $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Podemos colocar a equação (16) na forma padrão das restrições de um problema de programação linear (PL). Um problema de programação linear é um problema de otimização em que tanto a função objetivo quanto as restrições são lineares. A forma padrão de representação é dada por (Bazaraa et al., 2005) como

$$\min_x f^\top x \quad \text{sujeito a:} \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (17)$$

sendo $f \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ os dados do problema e $x \in \mathbb{R}^n$ as variáveis de decisão.

Conforme (Bazaraa et al., 2005), vamos utilizar o conceito de solução básica de um PL para computar o conjunto de vértices.

Definição 2: Considere o sistema linear $Ax = b$, com $x \geq 0$, sendo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m < n$, e suponha que $\text{posto}(A) = m$. Suponha que, após um possível rearranjo de colunas, A possa ser escrita como $A = [B \ N]$, com B quadrada e não-singular. A solução x do sistema linear $Ax = b$ dada por

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \quad x_B = B^{-1}b, \quad x_N = 0, \quad (18)$$

é chamada de solução básica. Se, além disso, $x_B \geq 0$ então x é uma solução básica factível do sistema $Ax = b, x \geq 0$. As variáveis x_B são chamadas de variáveis básicas ou dependentes e as variáveis x_N são chamadas de variáveis não-básicas (ou independentes). A matriz B é chamada de matriz básica e a matriz N é chamada de matriz não básica. Se $x_B > 0$, então a solução básica é dita não-degenerada, caso alguma componente de x_B seja nula, então a solução básica é degenerada.

Existe a correspondência entre soluções básicas factíveis e pontos extremos de um politopo, como mostrado em (Bazaraa et al., 2005) e enunciado a seguir.

Teorema 2: Um ponto \bar{x} é ponto extremo do politopo factível \mathcal{X} de (17) se, e somente se, \bar{x} for uma solução básica factível do sistema definido pelas restrições de (17).

O teorema acima mostra a equivalência entre pontos extremos e soluções básicas, ou melhor, um ponto \bar{x} é uma solução básica se, e somente se, \bar{x} é um ponto extremo. Se \bar{x} é um ponto extremo da região factível, então pelo Teorema 2 mostramos que \bar{x} é uma solução básica factível do sistema (17).

É importante relacionar a definição de solução básica e o Teorema 2 para encontrar os vértices do politopo \wp . Assim, calcular as soluções básicas de um PL convenientemente especificado é o mesmo que computar a região que contém todas as matrizes de transição Π que satisfazem (16), e assim poder resolver o problema de otimização convexa proposto no Teorema 1.

A seguir, apresentamos o procedimento iterativo para calcular as matrizes de probabilidades de transição utilizando o método de soluções básicas. No algoritmo entramos com o valor da ordem da matriz de probabilidades em n e os valores das componentes do vetor estacionário em $\pi_{i\text{est}}$ para todo $i \in \mathbb{K}$.

Algoritmo: Caracteriza Π por soluções básicas.

Input: $n, \pi_{iest}, \forall i \in \mathbb{K}$
if n
if $\pi_{iest} \geq 0, \sum \pi_{iest} = 1$ **then**
do A, b, n_A, n_b
 Compute Π
if $n_A \geq m_A$ **then**
 Compute t e n_v usando (16)
for $i = 1 : n_v$
 $y \leftarrow 0$
 Compute v
if $v \geq 0, v \neq \infty, v \neq -\infty$ **then**
 Compute $y \leftarrow x_{s_i}$ e $v_c \leftarrow y$
end
repeat
end
 Eliminar colunas iguais
end
else erro
end
else if $n > n + 1$
repeat
until $n = n + n_{max}$
end
end
Output: \emptyset

4. EXEMPLO

4.1 Polítopos e probabilidades estacionárias

Fizemos em *Matlab* um programa que têm como entradas as probabilidades estacionárias para cada um dos modos. As saídas são os vértices. Veja abaixo como fica a interface no terminal.

PROBABILIDADES NO ESTADO ESTACIONÁRIO

----- Dados de entrada -----

```
nº cols: 2
pi1 : 0.6
pi2 : 0.4
```

----- Solução -----

```
prob{1} =
    0.3333    0.6667
    1.0000    0.0000
```

```
prob{2} =
    1    0
    0    1
```

```
vertices_politopo_prob_discrete =
```

```
    0.3333    1
```

```
    0.6667    0
    1.0000    0
    0.0000    1
```

O politopo de matrizes de transição Γ associado ao vetor de probabilidades estacionárias $\pi_{est} = [0,6 \ 0,4]^T$ é definido pelos seguintes vértices

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,3333 & 0,6667 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (19)$$

4.2 Controle por realimentação de estado de uma aeronave não tripulada

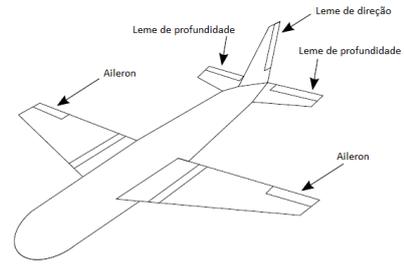


Figura 1. Aeronave não tripulada.

Esta aplicação ilustra o controle por realimentação de estado \mathcal{H}_∞ de um veículo aéreo não tripulado utilizando o Teorema 1 e o método apresentado.

A descrição do modelo está em (Oliveira, 2019). Os dados são apresentados a seguir

$$A_i = \begin{bmatrix} 0,5637 & 0,1133 & -0,6607 & -0,0062 \\ 0,0198 & 0,8368 & 1,0512 & 0,0089 \\ 0,0033 & -0,0450 & 0,9481 & 0,0159 \\ 0,0381 & 0,0073 & -0,0164 & 0,9999 \end{bmatrix} \forall i \in \mathbb{K}, \quad (20)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2,9735 & -0,0618 \\ -0,1175 & 0,6414 \\ 0,0112 & -0,0165 \\ 0,0812 & -0,0006 \end{bmatrix}, B_2 = B_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_3 = -B_2, \quad (21)$$

$$J_i = [I_{4 \times 4} \ 0_{2 \times 2}], C_{z_i} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \forall i \in \mathbb{K}, \quad (22)$$

$$D_{z_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_{z_i} = 0_{3 \times 6}, \forall i \in \mathbb{K}. \quad (23)$$

O modelo prevê três modos de operação com probabilidades estacionárias dadas por $\pi_1 = 0,3103$, $\pi_2 = 0,6207$ e $\pi_3 = 0,0690$. A região politópica é computada a seguir

$$\wp = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8888 & 0,1112 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0,7776 & 0,2224 & 0 \\ 0 & 0,8888 & 0,1112 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,7776 & 0 & 0,2224 \\ 0,1112 & 0,8888 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0,7776 & 0 & 0,2224 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,4999 & 0,5001 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,4999 & 0,3889 & 0,1112 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,3888 & 0,5001 & 0,1112 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0,7776 & 0,2224 \\ 0,4999 & 0,5001 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0,7776 & 0,2224 \\ 0,3888 & 0,6112 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\}. \quad (24)$$

Aplicando o Teorema 1 ao fechar a malha de controle e com as restrições para os vértices acima, obtemos o custo garantido de 24,7844 para a norma \mathcal{H}_∞ e os seguintes ganhos de realimentação de estado:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0,2625 & -0,2684 & 2,1238 & -3,0261 \\ -0,0415 & -0,7372 & 0,2757 & -0,3728 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5119 & -1,2291 & 4,1119 & -5,8005 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5291 & 1,2754 & -4,3072 & 5,9972 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Nos modos 2 e 3 um dos atuadores é perdido, o que justifica a presença de zeros entre os ganhos. Podemos observar a inversão do sinal do outro atuador, o que justifica que a segunda linha de K_2 e de K_3 tenha quase os mesmos valores, porém com sinal trocado.

Com os ganhos acima, simulamos a resposta temporal do custo quadrático da saída $z(k)^\top z(k)$ e do custo quadrático do controle $u(k)^\top u(k)$ efetuando 2500 realizações de Monte Carlo com tempo de amostragem $T_d = 50ms$ em 200 amostras e sinal de ruído dado por

$$w(t) = \begin{cases} \sin(T_d k), & \text{para } 0 < t \leq 25 \\ 0, & \text{para } t \geq 25 \end{cases} \quad (28)$$

Em seguida, temos as curvas.

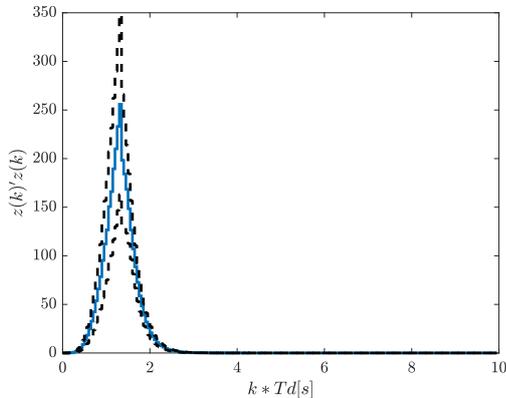


Figura 2. Sinal de saída (média quadrática).

A Figura 2 apresenta a média quadrática e o desvio padrão do sinal de saída. A Figura 3 apresenta a média quadrática e o desvio padrão do sinal de controle.

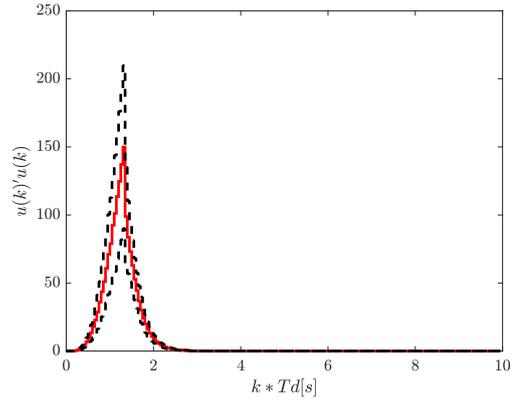


Figura 3. Esforço de controle (média quadrática).

5. CONCLUSÃO

Este artigo apresenta a caracterização das probabilidades de transição de uma cadeia de Markov a tempo discreto através de uma região convexa politópica utilizando do método das soluções básicas. É preciso notar que o método é válido para cadeias estacionárias, ou seja, cadeias que obedecem condições que envolvem periodicidade e recorrência na cadeia. Por fim, exemplificamos com um exemplo do cômputo e aplicação práticas do resultado para o projeto de realimentação de estado \mathcal{H}_∞ de sistemas com saltos markovianos a tempo discreto. O mesmo poderá ser aplicado em projetos de realimentação de estado e filtragem \mathcal{H}_2 a tempo discreto.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi apoiado pela Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

REFERÊNCIAS

- Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J., and Sherali, H.D. (2005). *Linear programming and network flows*. Wiley Interscience.
- Cardeliquio, C.B. (2014). Controle de sistemas markovianos a tempo contínuo com taxas de transição incertas. Dissertação de Mestrado. UNICAMP.
- Cardeliquio, C., Fioravanti, A.R., and Gonçalves, A.P.C. (2014). \mathcal{H}_2 output-feedback control of continuous-time mjls with uncertain transition rates. In *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, 1097–1102. IEEE.
- Costa, O.L.V., Fragoso, M.D., and Marques, R.P. (2005). *Discrete-time Markov jump linear systems*. Springer.
- Dong, J. and Yang, G.H. (2007). \mathcal{H}_2 state feedback control synthesis of continuous-time uncertain markov jump linear systems. In *2007 American Control Conference*, 2417–2421. IEEE.
- Garcia, A.L. (2008). *Probability statistics and random processes for electrical engineering*. Pearson prentice hall.
- Gonçalves, A.P.C. (2009). *Controle dinâmico de saída para sistemas discretos com saltos markovianos*. Ph.D. thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- Gonçalves, A.P.C., Fioravanti, A.R., and Geromel, J.C. (2012). \mathcal{H}_∞ robust and networked control of discrete-

- time MJLS through LMIs. *Journal of the Franklin Institute*, 349(6), 2171–2181.
- Oliveira, A.M. (2014). *Análise e controle de um sistema mecânico com dados transmitidos através da rede*. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- Oliveira, A.M. (2019). *Estimating and control of Markov jump linear systems with partial observation of the operation mode*. Ph.D. thesis, Universidade de São Paulo.
- Ross, S.M. (2010). *Introduction to probability models*. Pearson Prentice Hall.