

Estimação da dinâmica de falhas em faixas finitas de frequência para sistemas contínuos chaveados

Caio M. S. Anastácio* Luciano Frezzatto**

* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, MG (e-mail: caiomariano@ufmg.br).

** Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade Federal de Minas Gerais, MG (e-mail: lfrezatto@ufmg.br)

Abstract: This paper proposes an unknown input observer synthesis approach for fault dynamics estimation in continuous-time switched systems considering finite frequency ranges and having a guaranteed \mathcal{H}_∞ performance. Using an augmented system, in which the fault dynamics are incorporated, conditions in the form of linear matrix inequalities are proposed for the synthesis of observers in low, middle and high frequencies. Two examples borrowed from the literature are used to illustrate the advantages of the proposed method.

Resumo: Este artigo apresenta uma abordagem de síntese de observadores de entradas desconhecidas para estimação da dinâmica de falhas em sistemas contínuos chaveados considerando faixas de frequências finitas e possuindo custo garantido \mathcal{H}_∞ . Utilizando um sistema aumentado, no qual a dinâmica da falha é incorporada, condições sob a forma de desigualdades matriciais lineares são propostas para a síntese dos observadores em baixas, médias e altas frequências. Dois exemplos retirados da literatura são utilizados para ilustrar as vantagens do método proposto.

Keywords: Switched systems; Fault estimation; Finite frequency; Unknown input observer; Average dwell-time; Linear matrix inequalities.

Palavras-chaves: Sistemas chaveados; Estimação de falhas; Frequência finita; Observador de entradas desconhecidas; Tempo médio de permanência; Desigualdades matriciais lineares.

1. INTRODUÇÃO

Com o constante avanço do setor tecnológico, no qual estão presentes as indústrias que apresentam modelos de processos cada vez mais sofisticados, é demandada uma maior exigência na confiabilidade de sistemas (Blanke et al., 2006; Han et al., 2019; Zhang et al., 2017). Na prática, pode-se afirmar que todo sistema está sujeito a falhas, cujas ocorrências impactam negativamente sobre o sistema (Han et al., 2019). Desempenho aquém do esperado e limitações de dinâmica, são alguns exemplos da importância do estudo de detecção e identificação de falhas (Wang et al., 2019). No pior cenário, a negligência de falhas no sistema pode acarretar em seu colapso.

A natureza da falha pode ser classificada em duas categorias: falha abrupta e falha incipiente (Blanke et al., 2006). A falha abrupta refere-se a alterações instantâneas nos parâmetros do sistema o que gera uma ruptura no monitoramento adequado. Por outro lado, a falha incipiente ocorre de maneira passiva e gradativa, por exemplo, o desgaste e o envelhecimento dos componentes que constituem o sistema.

* O presente trabalho foi realizado com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - Processo : 159322/2019-7 e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A técnica de estimação visa determinar a dimensão tomada pela falha e, além disso, pode-se agregar outros métodos como detecção e isolamento, expandindo a capacidade e a eficiência da técnica (Gao, 2015). Na literatura é bastante difundido o uso de observadores de entrada desconhecidas (do inglês, *Unknown Input Observers* — UIOs), responsáveis por realizar a estimação dos estados do sistema e, ademais, é vastamente requisitado para estimação de falhas baseando-se na análise contínua dos resíduos (Chen and Patton, 2012). Dentre os métodos de estimação de falhas, pode-se encontrar diferentes estruturas para os observadores como, por exemplo, observadores adaptativos (Wang and Daley, 1996; Zhang et al., 2008), observadores com aprendizagem iterativa (Ren and Du, 2020), observadores robustos para sistemas descritores (Gao and Ding, 2007), sistemas chaveados (Du et al., 2019), sistemas nebulosos (Liu et al., 2012) e outros.

Contudo, os métodos citados abordam uma perspectiva generalista, sendo projetados para a estimação de falhas em todo o espectro de frequências. Apesar de satisfazer os requisitos de projeto na maioria das aplicações, em algumas instâncias, a síntese desses observadores pode ser mais conservadora, tendo em vista as singularidades de cada sistema (Wang and Yang, 2008).

Para realizar o estudo de falhas em faixas pré-especificadas de frequência, emprega-se o lema de Kalman-Yakubovich-Popov generalizado (gKYP) (Iwasaki and Hara, 2005).

Esse resultado é uma ferramenta importante por relacionar desigualdades frequenciais com desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs), tornando possível a utilização de programação semi-definida para sua resolução. Os resultados obtidos com a utilização do lema gKYP mostram-se promissores, conforme demonstrado, por exemplo, em projetos de observadores para detecção de falhas em frequência finita em sistemas lineares (Cui et al., 2009; Yang et al., 2011; Chen and Cao, 2013), em sistemas com retardo (Gao and Li, 2011), em sistemas nebulosos (Ding and Yang, 2010; Chibani et al., 2016) e em sistemas chaveados (Zhong and Yang, 2015). Nota-se, a partir dos trabalhos mencionados que o estudo de falhas em intervalos de frequência é recente na literatura e há lacunas a serem preenchidas por estudos mais aprofundados, como é o caso, por exemplo, de sistemas chaveados.

Sistemas chaveados são sistemas dinâmicos caracterizados por um número finito de subsistemas e regidos por regras lógicas de comutação entre os subsistemas (Lin and Antsaklis, 2009; Zhong and Yang, 2015; Du et al., 2019). Esses sistemas estão presentes em diversas aplicações como o controle de sistemas mecânicos, controle de processos, indústria automotiva, sistemas de potência, controle de tráfego aéreo, dentre outros (Lin and Antsaklis, 2009).

A comutação em sistemas chaveados pode ser inerente ao próprio sistema ou pode ser arbitrada por um sinal externo. Neste segundo caso, a lei de comutação pode ser projetada, por exemplo, utilizando o método de comutação arbitrária ou o tempo médio de permanência (do inglês, *Average dwell-time* — ADT) (Hespanha and Morse, 1999; Du et al., 2019). Se a comutação for definida no instante que ocorrer uma anomalia no sistema, por exemplo, um afundamento, sobressinal ou uma falha, acúmulos impertinentes podem ecoar sobre os demais subsistemas, causando assim a instabilidade (Mazanti, 2011). Para contornar esse problema, o método ADT atua quando houver algum fator que implique na descaracterização funcional do sistema, forçando a permanência do sistema em um dos modos de chaveamento por um tempo suficientemente elevado, de modo a evitar transições desnecessárias e cessando um ciclo de propagação indesejada, que poderia levar à instabilidade (Hespanha and Morse, 1999; Mazanti, 2011).

Diante dos fatos elucidados, este trabalho propõe a construção de um observador de entradas desconhecidas para a estimação de falhas em sistemas contínuos chaveados em faixas de frequências pré-especificadas. Para tanto, é idealizada a construção de um sistema aumentado contendo o sistema original e a dinâmica da falha. Um UIO para estimação de falhas é, então, projetado por meio de condições LMIs, possuindo um custo garantido \mathcal{H}_∞ . Para validar a eficácia do observador projetado, compara-se as estimações de diferentes perfis de falha providas pelo observador projetado com outros métodos da literatura que operam em toda a faixa frequencial.

Notação

Neste artigo, utiliza-se 0 e I para expressar, respectivamente, matrizes nulas e matrizes identidade de dimensões apropriadas. Para uma matriz qualquer H , H^T refere-se ao transposto da matriz e H^\dagger corresponde à pseudo-inversa da matriz. Seja uma matriz simétrica P , $P > 0$ ($P < 0$)

indica que P é uma matriz definida positiva (negativa). Nos blocos das matrizes, utiliza-se $*$ para representar que um termo é simétrico.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o seguinte sistema contínuo chaveado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma)x(t) + B_u(\sigma)u(t) + B_d(\sigma)d(t) \\ &\quad + B_w(\sigma)w(t) + B_f(\sigma)f(t) \\ y(t) &= C(\sigma)x(t) + D_f(\sigma)f(t) \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$, respectivamente, os estados, a entrada de controle e a saída mensurada; $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ é uma entrada desconhecida afetada por distúrbios não mensuráveis, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é uma entrada de ruído e $f(t) \in \mathbb{R}^{n_q}$ é a falha. As matrizes do sistema possuem dimensões apropriadas e são descritas pela combinação convexa dos modos do sistema, ou seja, todas as matrizes podem ser representadas na forma

$$\mathbb{X}(\sigma) = \sum_{i=1}^S \sigma_i(t)\mathbb{X}_i$$

sendo S o número de subsistemas (modos) e $\sigma_i(t)$ o sinal de comutação que especifica qual subsistema está ativo a cada instante de chaveamento.

O intuito é projetar um observador de entradas desconhecidas com custo garantido \mathcal{H}_∞ para estimar a dinâmica da falha em faixas de frequência pré-definidas e rejeitar a influência de $d(t)$ sobre a estimação. Para tanto, primeiramente, constrói-se o sistema aumentado:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}(\sigma)\bar{x}(t) + \bar{B}_u(\sigma)u(t) + \bar{B}_d(\sigma)d(t) \\ &\quad + \bar{B}_w(\sigma)w(t) + \bar{E}(\sigma)\dot{f}(t) \\ y(t) &= \bar{C}(\sigma)\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

sendo $\bar{x}(t) = [x(t)^T, f(t)^T]^T$ e as matrizes aumentadas dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{A}(\sigma) &= \begin{bmatrix} A(\sigma) & B_f(\sigma) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_u(\sigma) = \begin{bmatrix} B_u(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E}(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_d(\sigma) &= \begin{bmatrix} B_d(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_w(\sigma) = \begin{bmatrix} B_w(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{C}(\sigma) &= [C(\sigma) \quad D_f(\sigma)] \end{aligned}$$

A partir do sistema aumentado (2), propõem-se a seguinte estrutura para o observador:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= N(\sigma)z(t) + G(\sigma)u(t) + L(\sigma)y(t) \\ \hat{\hat{x}}(t) &= z(t) - H(\sigma)y(t) \\ \hat{f}(t) &= C_f\hat{\hat{x}}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

sendo $N(\sigma)$, $G(\sigma)$, $L(\sigma)$ e $H(\sigma)$ matrizes de ganho do observador (com a mesma estrutura das matrizes do sistema); $C_f = [0 \quad I] \in \mathbb{R}^{n_q \times (n_x + n_q)}$; $z(t)$ os estados do observador; $\hat{\hat{x}}(t)$ a estimação dos estados do sistema aumentado (2); e $\hat{f}(t)$ a estimação da falha.

Definindo o erro de estimação como

$$e(t) = \bar{x}(t) - \hat{\hat{x}}(t) \quad (4)$$

e substituindo (2) e (3) em (4) tem-se

$$e(t) = T(\sigma)\bar{x}(t) - z(t) \quad (5)$$

com

$$T(\sigma) = I + H(\sigma)\bar{C}(\sigma) \quad (6)$$

A dinâmica do erro é, então, dada por

$$\dot{e}(t) = T(\sigma)\dot{\hat{x}}(t) - \dot{z}(t) \quad (7)$$

Tomando as expressões para $\dot{\hat{x}}(t)$ e $\dot{z}(t)$, expandindo e coletando os termos, chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & N(\sigma)e(t) + T(\sigma)\bar{E}(\sigma)\dot{f}(t) + T(\sigma)\bar{B}_w(\sigma)w(t) \\ & + (T(\sigma)\bar{B}_u(\sigma) - G(\sigma))u(t) + T(\sigma)\bar{B}_d(\sigma)d(t) \quad (8) \\ & + (T(\sigma)\bar{A}(\sigma) - N(\sigma) - K(\sigma)\bar{C}(\sigma))\bar{x}(t) \end{aligned}$$

com $K(\sigma) = N(\sigma)H(\sigma) + L(\sigma)$.

Para rejeitar a influência da entrada $d(t)$ sobre a dinâmica do erro e mitigar a influência de $\bar{x}(t)$ e $u(t)$, as seguintes condições devem ser satisfeitas

$$T(\sigma)\bar{B}_u(\sigma) - G(\sigma) = 0 \quad (9)$$

$$T(\sigma)\bar{B}_d(\sigma) = 0 \quad (10)$$

$$-N(\sigma) + T(\sigma)\bar{A}(\sigma) - K(\sigma)\bar{C}(\sigma) = 0 \quad (11)$$

Consequentemente, o erro do sistema (8) é reduzido para

$$\dot{e}(t) = N(\sigma)e(t) + T(\sigma)\bar{E}(\sigma)\dot{f}(t) + T(\sigma)\bar{B}_w(\sigma)w(t) \quad (12)$$

Considerando, ademais, o erro da estimação da falha como

$$\tilde{f}(t) = f(t) - \hat{f}(t) = C_f e(t) \quad (13)$$

e a expressão (12), chega-se à

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & N(\sigma)e(t) + T(\sigma)\bar{E}(\sigma)\dot{f}(t) + T(\sigma)\bar{B}_w(\sigma)w(t) \quad (14) \\ \tilde{f}(t) = & C_f e(t) \end{aligned}$$

Faz-se necessário salientar que a regra de chaveamento $\sigma(t)$ é arbitrada externamente e, devido a isso, é sabido qual modo do sistema está ativo a cada instante de tempo. Por tal motivo, é suficiente garantir que as condições (9)–(11), bem como as demais a serem propostas, sejam satisfeitas em cada um dos modos do sistema, isto é, para todo $i = 1, \dots, S$. Portanto, a partir deste ponto, todas as condições são apresentadas em sua forma finita, ou seja, em função do modo i do sistema.

Para que exista um observador de entradas desconhecidas, requer-se que a seguinte condição seja satisfeita (Chen and Patton, 2012):

$$\text{posto}(\bar{C}_i \bar{B}_{di}) = \text{posto}(\bar{B}_{di}) \quad , \quad \forall i = 1, \dots, S \quad (15)$$

Sendo (15) verdade, a condição (10) é satisfeita determinando-se matrizes H_i tais que

$$H_i = -\bar{B}_{di}[(\bar{C}_i \bar{B}_{di})^\dagger] \quad (16)$$

Por sua vez, a condição (9) é satisfeita tal que $G_i = T_i \bar{B}_{ui}$. As matrizes N_i do observador são obtidas resolvendo o problema de otimização retratado no Teorema 1 (a ser proposto) e, finalmente, as matrizes L_i podem ser recuperadas de (11) a partir das demais matrizes de ganho.

Antes de apresentar a principal contribuição deste trabalho, são introduzidos alguns resultados preliminares necessários para a concepção das condições propostas.

2.1 Resultados preliminares

Definição 1. (Hespanha and Morse (1999)). Para um sinal de chaveamento $\sigma(t)$ e um intervalo $[t_1 \ t_2]$, com $t_2 > t_1 > 0$, dado, diz-se que $\tau_m \in \mathbb{R}$ é o tempo médio de permanência em cada modo do sistema se o número de chaveamentos $U_{\sigma_i}[t_1, t_2]$ satisfizer a seguinte relação

$$U_{\sigma_i}[t_1, t_2] \leq U_0 + \frac{t_2 - t_1}{\tau_m}$$

neste caso, a constante $U_0 \geq 0$ é denominada limite de vibração.

Lema 1. (Hespanha and Morse (1999)). Seja o sistema contínuo chaveado autônomo expresso por

$$\dot{x}(t) = A(\sigma)x(t) \quad (17)$$

Dadas constantes positivas α e μ e funções $\underline{\beta}_0$ e $\bar{\beta}_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ estritamente crescentes, não limitadas, contínuas e com $\underline{\beta}_0(0) = \bar{\beta}_0(0) = 0$; se existirem funcionais $V_i(x(t)) = x(t)^T P_i x(t)$, para todo $i = 1, \dots, S$, tais que

$$\frac{\partial V_i(x(t))}{\partial x} A(\sigma)x(t) \leq -\alpha V_i(x(t)) \quad (18)$$

$$\underline{\beta}_0(\|x(t)\|) \leq V_i(x(t)) \leq \bar{\beta}_0(\|x(t)\|) \quad (19)$$

$$V_i(x(t)) \leq \mu V_j(x(t)) \quad (20)$$

sejam satisfeitas para todo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ e $i, j = 1, \dots, S$, então existe uma constante $\bar{\tau}_m$ dada por

$$\bar{\tau}_m > \tau_m = \frac{\ln \mu}{\alpha} \quad (21)$$

que garante a estabilidade assintótica do sistema.

Lema 2. (Ding and Du (2016); Iwasaki and Hara (2005)). Dada uma matriz simétrica Π de dimensões apropriadas e uma faixa pré-definida de frequências, diz-se que o sistema (14) possui desempenho garantido \mathcal{H}_∞ em frequência finita dado por $\gamma > 0$ se existirem matrizes simétricas \mathcal{M}_i e $\mathcal{Q} > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{B}_i \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{B}_i \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C}_i & \mathcal{D}_i \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} \mathcal{C}_i & \mathcal{D}_i \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

sendo Ξ definido de forma específica para cada faixa frequencial:

(a) para baixa frequência $|\omega| \leq \varpi_l$

$$\Xi = \begin{bmatrix} -\mathcal{Q} & \mathcal{M}_i \\ \mathcal{M}_i & \varpi_l^2 \mathcal{Q} \end{bmatrix}$$

(b) para média frequência $\varpi_l \leq \omega \leq \varpi_2$

$$\Xi = \begin{bmatrix} -\mathcal{Q} & \mathcal{M}_i + j\varpi_c \mathcal{Q} \\ \mathcal{M}_i - j\varpi_c \mathcal{Q} & -\varpi_1 \varpi_2 \mathcal{Q} \end{bmatrix}$$

sendo $\varpi_c = (\varpi_1 + \varpi_2)/2$.

(c) para alta frequência $|\omega| \geq \varpi_h$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathcal{Q} & \mathcal{M}_i \\ \mathcal{M}_i & -\varpi_h^2 \mathcal{Q} \end{bmatrix}$$

Lema 3. (de Oliveira and Skelton (2001)). Considere $x \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $x^T \mathcal{L} x < 0$, $\forall x \neq 0 : \mathcal{B} x = 0$.
- (2) $\mathcal{B}^{\perp T} \mathcal{L} \mathcal{B}^{\perp} < 0$ sendo $\mathcal{B} \mathcal{B}^{\perp} = 0$.
- (3) $\exists \rho \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L} - \rho \mathcal{B}^T \mathcal{B} < 0$.
- (4) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que $\mathcal{L} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T < 0$.

3. RESULTADOS PRINCIPAIS

No teorema a seguir é proposta uma condição de síntese para observadores de entradas desconhecidas com custo garantido \mathcal{H}_∞ em faixas pré-determinadas de frequências para o sistema (14).

Teorema 1. Dados escalares $\alpha > 0$, $\mu > 1$, $\xi > 0$ e $\delta > 0$, se existirem matrizes simétricas $P_i > 0$, M_i e $Q > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e matrizes $X_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, Y_{1i} , Y_{2i} , Z_{1i} , $Z_{2i} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$, Y_{3i} , $Z_{3i} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, Y_{4i} , $Z_{4i} \in \mathbb{R}^{n_w \times n_y}$,

para todo $i = 1, \dots, S$, tais que o seguinte problema de otimização seja factível

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma_0^2 + \gamma_1^2 \\ \text{s.a.} \quad & P_i > 0, Q > 0, \\ & P_i \leq \mu P_j \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} \xi X_i + \xi X_i^T & * & * & * \\ P_i + X_i - \xi W_i^T - C_f^T Y_{1i}^T & \Phi_{(2,2)} & * & * \\ Y_{1i}^T & \Phi_{(3,2)} & \Phi_{(3,3)} & * \\ -\xi \bar{B}_{wi}^T T_i^T X_i^T & \Phi_{(4,2)} & Y_{4i} & -\gamma_0^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{(1,1)} & * & * & * \\ \Psi_{(2,1)} & \Psi_{(2,2)} & * & * \\ -\delta E_i^T T_i^T X_i^T & \Psi_{(3,2)} & -\gamma_1^2 I & * \\ Z_{1i}^T & -Z_{4i} C_f + Z_{2i}^T & Z_{3i}^T & \Psi_{(4,4)} \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

com

$$\Phi_{(2,2)} = \alpha P_i - W_i - Y_{2i} C_f - W_i^T - C_f^T Y_{2i}^T$$

$$\Phi_{(3,2)} = -Y_{3i} C_f + Y_{2i}^T$$

$$\Phi_{(4,2)} = -Y_{4i} C_f - \bar{B}_{wi}^T T_i^T X_i^T$$

$$\Phi_{(3,3)} = I + Y_{3i} + Y_{3i}^T$$

$$\Psi_{(3,2)} = -Z_{3i} C_f - E_i^T T_i^T X_i^T$$

$$\Psi_{(4,4)} = I + Z_{4i} + Z_{4i}^T$$

e $\Psi_{(1,1)}$, $\Psi_{(2,1)}$ e $\Psi_{(2,2)}$ definidos para cada faixa frequencial como

- para baixa frequência

$$\Psi_{(1,1)} = -Q + \delta X_i + \delta X_i^T$$

$$\Psi_{(2,1)} = M_i + X_i - \delta W_i^T - C_f^T Z_{1i}^T$$

$$\Psi_{(2,2)} = \varpi_l^2 Q - W_i - Z_{2i} C_f - W_i^T - C_f^T Z_{2i}^T$$

- para média frequência

$$\Psi_{(1,1)} = -Q + \delta X_i + \delta X_i^T$$

$$\Psi_{(2,1)} = M_i - j\varpi_c Q + X_i - \delta W_i^T - C_f^T Z_{1i}^T$$

$$\Psi_{(2,2)} = -j\varpi_l \varpi_h Q - W_i - Z_{2i} C_f - W_i^T - C_f^T Z_{2i}^T$$

- para alta frequência

$$\Psi_{(1,1)} = Q + \delta X_i + \delta X_i^T$$

$$\Psi_{(2,1)} = M_i + X_i - \delta W_i^T - C_f^T Z_{1i}^T$$

$$\Psi_{(2,2)} = -\varpi_h^2 Q - W_i - Z_{2i} C_f - W_i^T - C_f^T Z_{2i}^T$$

então é possível recuperar as matrizes do observador (3), sendo $N_i = X_i^{-1} W_i$ e as demais matrizes a partir de (9), (10) e (11). Ademais, γ_0 e γ_1 são limitantes superiores, respectivamente, para as normas \mathcal{H}_∞ da entrada $w(t)$ para $\dot{e}(t)$ e de $\tilde{f}(t)$ para $\dot{e}(t)$.

Prova. A prova é apresentada considerando a faixa de baixas frequências. A extensão para as demais faixas é imediata e, portanto, omitida do artigo.

A condição (22) é uma implicação direta do Lema 1.

Considere a seguinte função de Lyapunov

$$V_i(e(t)) = e(t)^T P_i e(t) \quad (25)$$

tal que

$$\dot{V}_i(e(t)) < -\alpha V_i(e(t)) \quad (26)$$

Tomando a função de custo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t)^T \tilde{f}(t) dt < \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_0^2 w(t)^T w(t) dt \quad (27)$$

e aplicando o procedimento \mathcal{S} , tem-se

$$\dot{V}_i(e(t)) + \alpha V_i(e(t)) + \tilde{f}(t)^T \tilde{f}(t) - \gamma_0^2 w(t)^T w(t) < 0 \quad (28)$$

cuja forma expandida é

$$\begin{aligned} \dot{e}(t)^T P_i e(t) + e(t)^T P_i \dot{e}(t) + e(t)^T \alpha P_i e(t) \\ + \tilde{f}(t)^T \tilde{f}(t) - \gamma_0^2 w(t)^T w(t) < 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Substituindo (14) em (29) e considerando, primeiramente, $\dot{f}(t) = 0$, após algumas manipulações chega-se a

$$\begin{bmatrix} P_i N_i + N_i^T P_i + \alpha P_i + C_f^T C_f & * \\ \bar{B}_{wi}^T T_i^T P_i & -\gamma_0^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

Fazendo uso da implicação 4 do Lema 3 com matrizes

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} I & -N_i & 0 & -T_i \bar{B}_{wi} \\ 0 & -C_f & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \xi X_i & Y_{1i} \\ X_i & Y_{2i} \\ 0 & Y_{3i} \\ 0 & Y_{4i} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & P_i & 0 & 0 \\ P_i & \alpha P_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_0^2 I \end{bmatrix}$$

sendo utilizada uma escolha apropriada para as matrizes de folga, de modo a garantir a linearização do produto de variáveis $W_i = X_i N_i$, chega-se que (30) é equivalente à (23).

Por outro lado, seja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t)^T \tilde{f}(t) dt < \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_1^2 \dot{f}(t)^T \dot{f}(t) dt \quad (31)$$

Aplicando o Lema 2, em baixa frequência, tem-se que o custo garantido \mathcal{H}_∞ em domínio frequencial finito (31) é satisfeito considerando

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma_1^2 I \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} -Q & M_i \\ M_i & \varpi_l^2 Q \end{bmatrix}$$

Assumindo que $w(t) = 0$ em (14), pode-se obter, a partir das condições reportadas no Lema 2, a desigualdade

$$\begin{bmatrix} \zeta_{(1,1)} & * \\ -\bar{E}_i^T T_i^T Q N_i + \bar{E}_i^T T_i^T M_i & \zeta_{(2,2)} \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

sendo

$$\zeta_{(1,1)} = -N_i^T Q N_i + M_i N_i + N_i^T M_i + C_f^T C_f + \varpi_l^2 Q$$

$$\zeta_{(2,2)} = -\bar{E}_i^T T_i^T Q T_i \bar{E}_i - \gamma_1^2 I$$

Utilizando novamente o Lema 3, com a seguinte escolha para as matrizes da implicação 4 (necessária para garantir a linearização do produto de variáveis)

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} I & -N_i & -T_i \bar{E}_i & 0 \\ 0 & -C_f & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \delta X_i & Z_{1i} \\ X_i & Z_{2i} \\ 0 & Z_{3i} \\ 0 & Z_{4i} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} -Q & M_i & 0 & 0 \\ M_i & \varpi_l^2 Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_1^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

chega-se, após algumas manipulações, à condição (24).

4. EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Exemplo 1. Considere o sistema de controle de nível de um líquido retirado de (Du et al., 2019), o qual é expresso pelo conjunto de matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.0007 & 0.0007 \\ 0.0011 & -0.0011 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.0013 & 0.0007 \\ 0.0011 & -0.0011 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.0007 & 0.0007 \\ 0.0011 & -0.0044 \end{bmatrix}, \quad B_{ui} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{di} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{wi} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_{fi} = D_{fi} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$i = 1, 2, 3$. Aplicando as condições do Teorema 1 com $\alpha = 0.001$, $\mu = 1.002$, $\xi = 1$, $\delta = 1$, $\varpi_l = 10$, $\gamma_0 = 1.00 \times 10^{-4}$ e $\gamma_1 = 4.00 \times 10^{-5}$, obtém-se o observador cujas matrizes são dadas por

$$N_i = 10^6 \begin{bmatrix} -1.3489 & -1.3364 & 0.2188 \\ -1.1764 & -1.5217 & 0.1896 \\ 0.0899 & 0.0891 & -0.0146 \end{bmatrix},$$

$$L_i = 10^8 \begin{bmatrix} -2.7134 & 1.3770 \\ -2.5443 & 1.0226 \\ 0.1809 & -0.0918 \end{bmatrix},$$

$$H_i = \begin{bmatrix} -50.00 & -50.00 \\ -50.00 & -50.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}, \quad G_i = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -0.10 \\ 0.00 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Para avaliar o desempenho do observador projetado, é realizada uma simulação temporal para o sistema (1) em conjunto com o observador (3). Assumem-se condições iniciais nulas para os estados do sistema e do observador; $d(t)$ e $w(t)$ são ruídos brancos padrão e $u(t) = 2e^{-0.5t}(1 + \sin(3\pi t))$. A regra de comutação do sistema é expressa na Figura 1 e considera-se um tempo de permanência $\bar{\tau}_m = 1.99$.

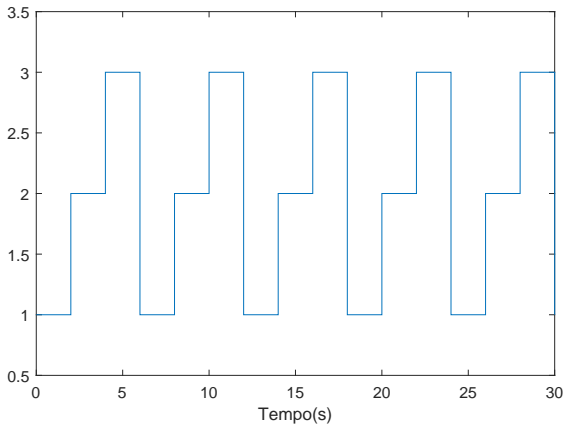


Figura 1. Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ para o sistema do Exemplo 1.

Aplicando uma falha com o seguinte perfil ao sistema:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0s \leq t < 5s \\ -0.02(t - 5), & 5s \leq t < 20s \\ -0.3, & 20s \leq t < 30s \end{cases}$$

obtém-se a estimação $\hat{f}(t)$ pelo método proposto ilustrada em vermelho na Figura 2. O perfil real da falha, por sua vez, é dado em azul na mesma figura. Note que o método

proposto é capaz de rastrear com boa acurácia a dinâmica da falha como fica evidenciado pelo erro de estimação cometido reportado na Figura 3.

Para fins de comparação, aplicou-se o método proposto em (Du et al., 2019), o qual contempla toda a faixa frequencial, para a síntese de um observador para a dinâmica da falha. Com essa metodologia, obteve-se a estimação representada pela curva em preto na Figura 2. Apesar de rastrear de forma adequada o perfil da falha, o erro de estimação cometido (apresentado na Figura 3) é maior do que o do método proposto.

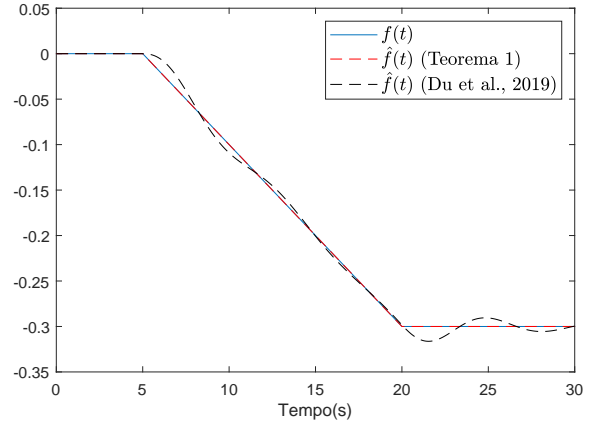


Figura 2. Falha $f(t)$ e sua estimação $\hat{f}(t)$ para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 1 e em (Du et al., 2019) considerando o sistema do Exemplo 1.

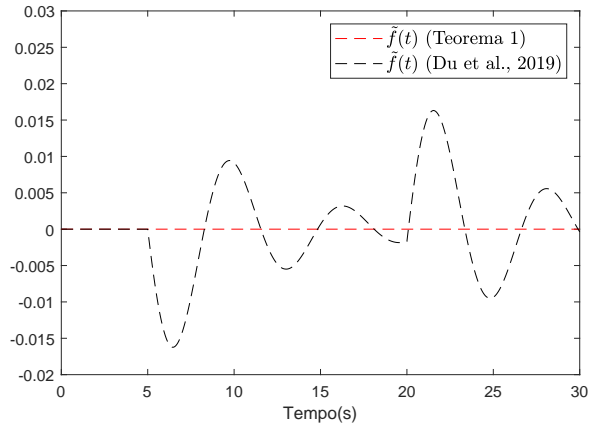


Figura 3. Erro de estimação da falha para o sistema do Exemplo 1 para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 1 e em (Du et al., 2019).

Para garantir que os limitantes para as normas \mathcal{H}_∞ são respeitados, computa-se o valor dos ganhos \mathcal{L}_2 a partir das simulações para ambos os métodos. Para o método proposto, os valores de ganho são $\gamma_0^* = 1.81 \times 10^{-7}$ e $\gamma_1^* = 5.74 \times 10^{-6}$, os quais encontram-se abaixo dos respectivos limitantes previamente reportados. Por sua vez, o método de Du et al. (2019) proveu um limitante de $\gamma_d = 3.00 \times 10^{-4}$ para a norma \mathcal{H}_∞ , sendo que o ganho \mathcal{L}_2 computado foi de $\gamma_d^* = 12.3 \times 10^{-3}$, excedendo o limitante determinado.

Exemplo 2. Considere um sistema contínuo chaveado retirado de (Benzaouia and Eddoukali, 2018), o qual é expresso por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{u1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{u2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [0.1 \quad -0.1], C_2 = [0.3 \quad -0.4], D_{f1} = 1.5, D_{f2} = 1.2$$

$$B_{d1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, B_{d2} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B_{w1} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B_{w2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}, B_{f1} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix}, B_{f2} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

Recorrendo novamente ao Teorema 1, neste exemplo utilizando a faixa de alta frequência, e adotando os seguintes parâmetros $\alpha = 0.1$, $\mu = 1.1$, $\xi = 2$, $\delta = 2$, $\varpi_h = 100$, $\gamma_0 = 0.55$ e $\gamma_1 = 0.004$, obtém-se o observador cujas matrizes são dadas por

$$N_1 = 10^7 \begin{bmatrix} -0.4255 & -0.9770 & -0.0950 \\ -0.8509 & -1.9540 & -0.1899 \\ -0.0284 & -0.0651 & -0.0063 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = 10^6 \begin{bmatrix} -3.3664 & -1.4593 & 0.7827 \\ -1.6832 & -0.7296 & 0.3914 \\ 0.2805 & 0.1216 & -0.0652 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = 10^8 \begin{bmatrix} 2.3833 \\ 4.7666 \\ 0.1589 \end{bmatrix}, L_2 = 10^7 \begin{bmatrix} -4.1264 \\ -2.0631 \\ 0.3439 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 10.00 \\ 20.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} -10.00 \\ -5.00 \\ 0.00 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 4.00 \\ 3.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

Assumindo condições iniciais nulas para os estados do sistema e do observador; $d(t)$ e $w(t)$ ruídos brancos padrão, $u(t) = 0.4e^{-0.5t}(0.5 + \sin(6\pi t))$, a regra de comutação expressa na Figura 4 e considerando um tempo de permanência $\bar{\tau}_m = 0.99$, simula-se o sistema aplicando uma falha com o seguinte perfil:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0s \leq t < 10s \\ \sin(200t), & 10s \leq t < 14s \\ 0, & 14s \leq t < 30s \end{cases}$$

Assim como no exemplo anterior, representa-se o perfil da falha em azul na Figura 5 e as estimações providas pelo método proposto em vermelho. Por sua vez, o erro de estimação é apresentado na Figura 6. Note que, devido ao perfil da falha escolhido, o método de Du et al. (2019) não pode ser empregado para comparação. Os resultados apresentados demonstram que o observador projetado pelo método proposto é capaz de estimar a falha de maneira adequada, acompanhando eficientemente sua dinâmica, apesar da rápida oscilação do sinal.

Visando uma melhor observação do comportamento da estimação da falha em alta frequência pelo método proposto, faz-se um destaque na região de atuação da falha entre 11 s e 13 s, como apresentado na Figura 7. Note que em torno de 11.5 s há o chaveamento entre subsistemas, acarretando em uma superestimação da falha. Apesar disso, o estimador projetado é capaz de corrigir o comportamento em um

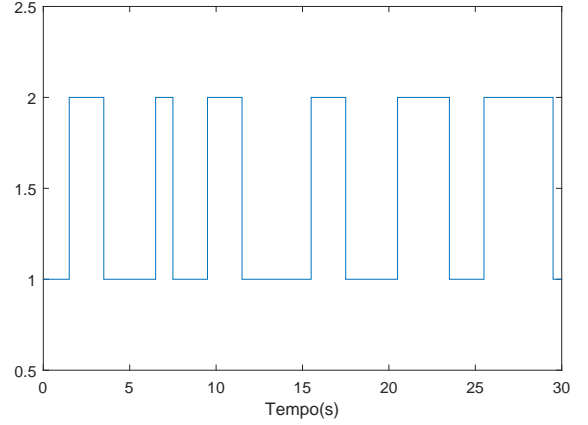


Figura 4. Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ para o sistema do Exemplo 2.

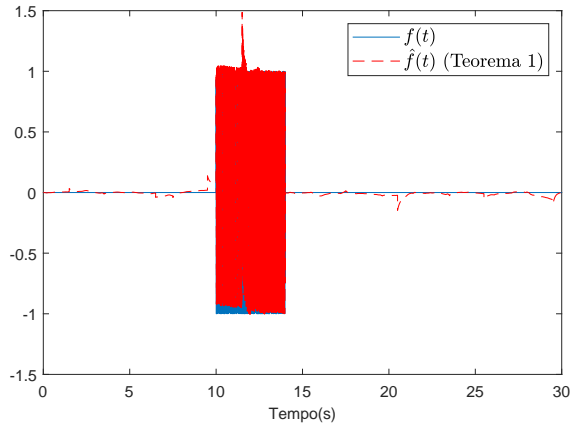


Figura 5. Falha $f(t)$ e sua estimação $\hat{f}(t)$ para o observador projetado por meio do método reportado no Teorema 1 considerando o sistema do Exemplo 2.

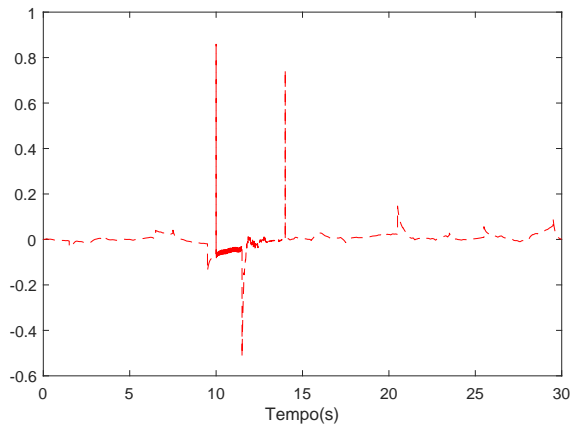


Figura 6. Erro de estimação da falha para o observador projetado por meio do método reportado no Teorema 1 para o sistema do Exemplo 2.

intervalo curto de tempo, convergindo novamente para a estimação adequada da dinâmica da falha.

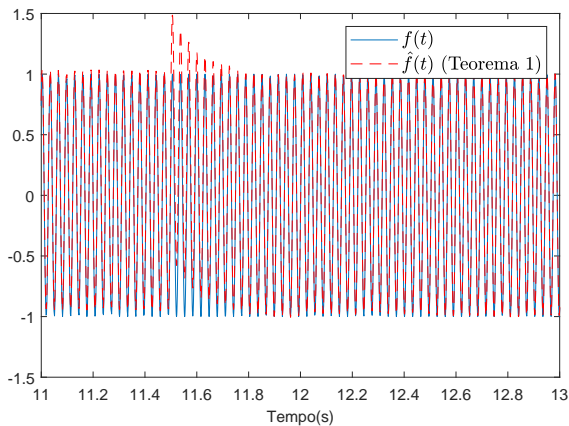


Figura 7. Falha $f(t)$ e sua estimação $\hat{f}(t)$, com uma janela de destaque entre 11 s e 13 s, para o observador projetado por meio do método reportado no Teorema 1 considerando o sistema do Exemplo 2.

Os ganhos para as normas \mathcal{H}_∞ induzidas, neste exemplo, são $\gamma_0^* = 0.47$ e $\gamma_1^* = 8.00 \times 10^{-13}$, os quais respeitam os limitantes previamente reportados.

5. CONCLUSÃO

Neste artigo foi proposta uma metodologia para estimação da dinâmica de falhas em faixas de frequência finita para sistemas chaveados contínuos. A metodologia baseou-se na síntese de um observador de entradas desconhecidas capaz de estimar a dinâmica da falha a partir da construção de um sistema aumentado. O processo de síntese do observador foi realizado por meio da resolução de um problema de otimização cujas restrições encontram-se sob a forma de LMIs. Os exemplos apresentados ilustram que a metodologia proposta é adequada para realizar a estimação de falhas em faixas pré-determinadas de frequência e, ademais, ao se comparar com outra metodologia que contempla toda a faixa frequencial, o método proposto demonstrou ser mais eficaz.

REFERÊNCIAS

- Benzaouia, A. and Eddoukali, Y. (2018). Robust fault detection and control for continuous-time switched systems with average dwell time. *Circ. Syst. Signal Process.*, 37(6), 2357–2373.
- Blanke, Z., Kinnaert, M., Lunze, J., Staroswiecki, M., and Schröder, J. (2006). *Diagnosis and fault-tolerant control*, volume 2. Springer.
- Chen, J. and Patton, R.J. (2012). *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer Publishing Company, Incorporated.
- Chen, J. and Cao, Y.Y. (2013). A stable fault detection observer design in finite frequency domain. *Int. J. Control*, 86(2), 290–298.
- Chibani, A., Chadli, M., Shi, P., and Braiek, N.B. (2016). Fuzzy fault detection filter design for T–S fuzzy systems in the finite-frequency domain. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 25(5), 1051–1061.
- Cui, Y., Huang, X.h., and Wang, M. (2009). Multi-objective robust fault detection filter design in a finite frequency range. In *International Symposium on Neural Networks*, 733–743. Springer.
- de Oliveira, M.C. and Skelton, R.E. (2001). Stability tests for constrained linear systems. In S.O. Reza Moheimani (ed.), *Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, 241–257. Springer-Verlag, New York, NY.
- Ding, D.W. and Du, X. (2016). Finite-frequency model reduction of continuous-time switched linear systems with average dwell time. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 103(11), 1894–1908.
- Ding, D.W. and Yang, G.H. (2010). Fuzzy filter design for nonlinear systems in finite-frequency domain. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 18(5), 935–945.
- Du, D., Cocquempot, V., and Jiang, B. (2019). Robust fault estimation observer design for switched systems with unknown input. *Appl. Math. Lett.*, 348, 70–83.
- Gao, H. and Li, X. (2011). \mathcal{H}_∞ filtering for discrete-time state-delayed systems with finite frequency specifications. *IEEE Trans. Autom. Control*, 56(12), 2935–2941.
- Gao, Z. (2015). Fault estimation and fault-tolerant control for discrete-time dynamic systems. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 62(6), 3874–3884.
- Gao, Z. and Ding, S.X. (2007). Fault estimation and fault-tolerant control for descriptor systems via proportional, multiple-integral and derivative observer design. *IET Control Theory & Appl.*, 1(5), 1208–1218.
- Han, J., Zhang, H., Wang, Y., and Sun, X. (2019). Robust fault detection for switched fuzzy systems with unknown input. *IEEE Trans. Cybern.*, 48(11), 3056–3066.
- Hespanha, J.P. and Morse, A.S. (1999). Stability of switched systems with average dwell-time. In *Proc. 38th IEEE Conf. Decision Control*, volume 3, 2655–2660. IEEE, Phoenix, Arizona.
- Iwasaki, T. and Hara, S. (2005). Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Trans. Autom. Control*, 50(1), 41–59.
- Lin, H. and Antsaklis, P.J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. *IEEE Trans. Autom. Control*, 54(2), 308–322.
- Liu, M., Cao, X., and Shi, P. (2012). Fault estimation and tolerant control for fuzzy stochastic systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 21(2), 221–229.
- Mazanti, G.A. (2011). Sistemas chaveados: Estudo geral. Trabalho de Conclusão de Curso, USP (Universidade de São Paulo), Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo, Brasil.
- Ren, W. and Du, Y. (2020). The active fault-tolerant control of reconfigurable manipulator based on iterative fault observer. In *Proceedings of the 11th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC2019)*, 619–629. Springer.
- Wang, H. and Daley, S. (1996). Actuator fault diagnosis: An adaptive observer-based technique. *IEEE Trans. Autom. Control*, 41(7), 1073–1078.
- Wang, H. and Yang, G.H. (2008). A finite frequency domain approach to fault detection observer design for linear continuous-time systems. *Asian J. Control*, 10(5), 559–568.
- Wang, Z., Shi, P., and Lim, C. (2019). Robust fault estimation observer in the finite frequency domain for descriptor systems. *Int. J. Control*, 92(7), 1590–1599.
- Yang, H., Xia, Y., and Zhang, J. (2011). Generalised finite-frequency KYP lemma in delta domain and applications to fault detection. *Int. J. Control*, 84(3), 511–525.

- Zhang, H., Han, J., Wang, Y., and Liu, X. (2017). Sensor fault estimation of switched fuzzy systems with unknown input. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 26(3), 1114–1124.
- Zhang, K., Jiang, B., and Cocquempot, V. (2008). Adaptive observer-based fast fault estimation. *Int. J. Control Autom. Syst.*, 6(3), 320–326.
- Zhong, G.X. and Yang, G.H. (2015). Fault detection for discrete-time switched systems in finite-frequency domain. *Circ. Syst. Signal Process.*, 34(4), 1305–1324.