

Cálculo de Conjuntos Invariantes Controlados Robustos com Complexidade Fixa usando Otimização Bilinear

Andreza C. C. Oliveira* Fábio Leoli Jr.**
Carlos E. T. Dórea*

* UFRN, Centro de Tecnologia, Depto. de Eng. de Computação e
Automação, Programa de Pós-Graduação em Eng. Elétrica e de
Computação (PPgEEC). 59078-900 Natal, RN (e-mail:
andrezacrystine@hotmail.com, cetdorea@dca.ufrn.br).

** UFRN, Centro de Tecnologia, Depto. de Eng. de Computação e
Automação. 59078-900 Natal, RN (e-mail: fbleoli@gmail.com)

Abstract: In this work, a numerical methodology for the computation of robust controlled invariant polyhedra of fixed complexity, based on bilinear optimization, is proposed for discrete-time linear systems, subject to constraints on the states and control inputs and to bounded disturbances. A set is robust controlled invariant if any state trajectory starting in this set can be maintained within it through a suitable control input, in spite of the disturbances. Conventional methods for robust invariant polyhedra computation can result in high complexity sets, defined by a large number of vertices. Through numerical examples, we find that the proposed methodology is able to compute polyhedra with larger volumes than those obtained by recent methods which also seek for reduced complexity sets.

Resumo: Neste trabalho uma metodologia numérica para o cálculo de poliedros invariantes controlados robustos de complexidade fixa, baseado em otimização bilinear, é proposta para sistemas lineares de tempo discreto, sujeitos a restrições nos estados e nas entradas de controle e a perturbações de amplitude limitada. Um conjunto é invariante controlado robusto se qualquer trajetória do estado iniciada dentro do conjunto pode ser mantido dentro dele por meio de uma ação de controle adequada, apesar das perturbações. Métodos convencionais de cálculo destes poliedros podem resultar em conjuntos de alta complexidade, definidos por um grande número de vértices. Por meio de exemplos numéricos, verifica-se que a metodologia proposta é capaz de calcular poliedros de volume maior do que os de métodos recentes que buscam também conjuntos com complexidade reduzida.

Keywords: Linear Systems; Invariant Sets; Control Constraints; Robust Positively Invariant Sets; Bilinear Optimization.

Palavras-chaves: Sistemas Lineares; Conjuntos Invariantes; Controle sob Restrições; Poliedros Invariantes Robustos; Otimização Bilinear.

1. INTRODUÇÃO

Em sistemas de controle, restrições em variáveis de interesse estão associadas a limites tecnológicos ou de segurança. Em geral, estas restrições correspondem a limites inferiores e/ou superiores de tais variáveis, resultando em poliedros convexos definidos no espaço de estado. Todos os sistemas de controle têm restrições e elas devem ser tratadas adequadamente, pois as consequências podem ser ultrapassagens de valores de segurança, longos tempos de acomodação e até instabilidade, a menos que sejam consideradas no projeto do controlador. Os controladores convencionais como, por exemplo, o PID, não levam restrições em conta na etapa de projeto. Todavia, controladores avançados vêm sendo propostos para lidar com restrições, como, por exemplo, os controladores preditivos e aqueles baseados em conjuntos invariantes.

A teoria de conjuntos invariantes permite tratar sistematicamente as restrições. Restrições de estado e controle podem ser satisfeitas se o estado inicial pertencer a um conjunto positivamente invariante para o sistema de malha fechada (Kerrigan and Maciejowski, 2000). Um conjunto é invariante controlado se qualquer trajetória iniciada no conjunto pode ser mantida dentro dele por meio de uma ação de controle adequada. Esse tópico ganhou considerável interesse nos últimos anos, não apenas por caracterizar a existência de solução para problemas de controle sob restrições (Mirko and Mazen, 2017) (Brião et al., 2018) (Athanasopoulos and Bitsoris, 2010), mas também por permitir garantir a estabilidade de esquemas de controle preditivo sob restrições (Mayne et al., 2000).

Em geral, o conjunto de restrições não é invariante. Sendo assim, vários pesquisadores propuseram métodos numéricos que permitem calcular um conjunto invariante con-

trolado a partir do conjunto de restrições, garantindo a satisfação das mesmas como por exemplo em (Scibilia et al., 2009), (Athanasopoulos and Bitsoris, 2009), (Athanasopoulos and Bitsoris, 2010), (Sheer and Gutman, 2016) e (Li and Liu, 2016).

Em (Blanchini, 1994) foi demonstrada a existência e proposto um algoritmo para calcular o máximo conjunto invariante controlado λ -contrativo contido no conjunto de restrições, baseado na representação interna (por vértices) do poliedro. Já em (Dórea and Hennes, 1999), um método numérico foi proposto para calcular este conjunto máximo, porém usando a representação externa (por hiperplanos) dos poliedros. Porém esses métodos têm a desvantagem de ser iterativos, com alto custo computacional e podendo resultar em poliedros muito complexos, formado por um grande número de vértices e hiperplanos, tornando-se inviável para sistemas de grande dimensão.

Em (Anevlavix and Tabuada, 2019), é proposto um algoritmo que não depende de cálculos iterativos. Conjuntos invariantes controlados são calculados em duas etapas: 1) Eleva-se o problema para um espaço de dimensão maior, onde o máximo subconjunto Invariante Controlado (MCIS) pode ser calculado em forma fechada; 2) Projeta-se o conjunto resultante de volta ao domínio original para obter o conjunto invariante controlado desejado. Uma das vantagens desse método é a capacidade de lidar com sistemas de dimensões maiores. Embora o algoritmo proposto não calcule o máximo conjunto invariante, é, no entanto, completo no sentido de que, se o conjunto máximo não for vazio, ele calculará um conjunto invariante controlado.

Outra abordagem também presente na literatura é a de propor algoritmos iterativos para maximizar o volume dos conjuntos invariantes controlados como em (Gupta et al., 2019) e (Blanco et al., 2010). Em Gupta et al. (2019), com base em uma nova abordagem de maximização do determinante para uma matriz não simétrica, desenvolveram-se algoritmos iterativos baseados em desigualdades matriciais lineares (LMI) para obter conjuntos invariantes controlados robustos de baixa complexidade com volume aumentado a cada etapa, juntamente com os ganhos de realimentação de estado associados para sistemas lineares com incerteza política.

Este artigo trata de uma metodologia numérica, baseada em programação bilinear, para o cômputo de poliedros invariantes controlados para sistemas lineares de tempo discreto, enquanto submetidos a restrições de estado e entrada e perturbações persistentes, porém com amplitude limitada. A metodologia numérica permite o cálculo de poliedros com complexidade fixa. Duas funções-objetivo associadas à maximização do volume são analisadas. Exemplos numéricos ilustram a metodologia, que obteve conjuntos de volume maior do que os obtidos em (Anevlavix and Tabuada, 2019). O artigo está organizado da seguinte forma: Na Seção 2, é apresentada a fundamentação teórica necessária para o entendimento da metodologia de cálculo proposta. Na Seção 3, são formulados os problemas de otimização. Na Seção 4, são apresentados resultados da abordagem proposta por meio de exemplos ilustrativos que demonstram a eficácia da abordagem. Por último, conclusões são desenhadas na Seção 5.

2. DEFINIÇÕES BÁSICAS

2.1 Conjuntos Invariantes

Por simplicidade, a partir de agora vamos nos referir a conjuntos invariantes controlados robustos como conjuntos ICR.

Considere o sistema linear, de tempo discreto e invariante no tempo, descrito por (1) e (2):

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ed(k), \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k), \quad (2)$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada, $d(k) \in \mathbb{R}^r$ o vetor da perturbação e $y(k) \in \mathbb{R}^p$ o vetor de saída.

O estado e a entrada são sujeitos às seguintes restrições lineares:

$$x(k) \in \Omega_x = R[G, \rho] = \{x : Gx \leq \rho\}, \rho \geq 0, \quad (3)$$

$$u(k) \in \Psi = R[U, \phi] = \{u \in \mathbb{R}^m : Uu \leq \phi\}, \quad (4)$$

em que $G \in \mathbb{R}^{g \times n}$, $\rho \in \mathbb{R}^g$, $U \in \mathbb{R}^{q \times m}$ e $\phi \in \mathbb{R}^q$. Ω_x e Ψ são poliedros convexos fechados. A escolha de $\rho \geq 0$ significa que a origem pertence ao conjunto, e quando se trata de problema de regulação busca-se a convergência das trajetórias do estado para a origem.

Um poliedro convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito *compacto* se ele for fechado e limitado. Neste caso, ele pode ser representado pela combinação convexa de um número finito de pontos, denominados *vértices* (Hadley, 1961):

$$\Omega = \{x = V\alpha, \mathbf{1}^T \alpha = 1, \alpha \geq 0\} \quad (5)$$

sendo $V \in \mathbb{R}^{n \times l}$ uma matriz cujas colunas V^i são os l vértices de Ω e $\mathbf{1}$ um vetor de dimensões apropriadas cujos elementos são todos iguais a 1.

As perturbações $d(k)$ são supostas limitadas pelo seguinte poliedro compacto:

$$d(k) \in \mathcal{D} = \{d = D\gamma, \mathbf{1}^T \gamma = 1, \gamma \geq 0\},$$

sendo $D \in \mathbb{R}^{r \times nd}$ uma matriz cujas colunas D^i são os nd vértices de \mathcal{D} .

Definição 2.1. (Bitsoris, 1988) Um conjunto fechado não-vazio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito *positivamente invariante* em relação ao sistema dinâmico autônomo $x(k+1) = Ax(k)$ se $\forall x(0) \in \Omega, x(k) \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}$.

Isso significa que desde que $x(0) \in \Omega$, a trajetória completa do vetor de estado permanecerá dentro do conjunto Ω .

Definição 2.2. (Blanchini, 1994) Um conjunto fechado não-vazio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito *invariante controlado robusto* (ICR) em relação ao sistema (1) se $\forall x(k) \in \Omega, \exists u(k) \in \mathbb{R}^m$ tal que $Ax(k) + Bu(k) + Ed(k) \in \Omega, \forall d(k) \in \mathcal{D}$.

No artigo original, Blanchini (1994) refere-se ao conjunto da Definição acima apenas como *invariante controlado*. Porém, em trabalhos mais recentes, começou-se a utilizar a terminologia *robusto* para se referir a esses conjuntos nos casos em que o sistema é sujeito a perturbações de amplitude limitada.

Para sistemas sem perturbações, a contratividade de um conjunto invariante determina a velocidade de conver-

gência da trajetória do estado ao ponto de equilíbrio x^* (Blanchini, 1994).

Definição 2.3. (Blanchini, 1994) Dado $0 < \lambda < 1$, um conjunto compacto não vazio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito *invariante controlado robusto λ -contrativo* em relação ao sistema (1) se $\forall x(k) \in \Omega, \exists u(k) \in \mathbb{R}^m$ tal que $Ax(k) + Bu(k) + Ed(k) \in \lambda\Omega, \forall d(k) \in \mathcal{D}$.

Existe um compromisso que deve ser levado em consideração na escolha do valor de λ . Quando se escolhe um λ menor tem-se uma convergência mais rápida para a origem, mas em compensação os conjuntos invariantes tendem a ser menores.

2.2 Invariância Controlada de Poliedros Convexos

Em decorrência da Definição (2.3), o poliedro Ω (5) é ICR λ -contrativo em relação ao sistema (1) se, e somente se (Blanchini, 1994), $\exists u^i \in \mathbb{R}^m$ e $\sigma^{ij} \in \mathbb{R}^l$, com $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, nd$, tais que:

$$\begin{aligned} AV^i + Bu^i + ED^j &= \lambda V \sigma^{ij}, \\ \mathbf{1}^T \sigma^{ij} &= 1, \quad \sigma^{ij} \geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

sendo $V \in \mathbb{R}^{n \times l}$ uma matriz cujas colunas V^i são os l vértices de Ω e σ uma matriz cujos elementos são vetores, sendo assim, uma matriz de três dimensões. Cada elemento σ^{ij} é um vetor em \mathbb{R}^l no qual i está associado ao vértice V^i do poliedro e o j está associado ao vértice D^j do conjunto de perturbações, tendo em vista que a mesma entrada u^i deve funcionar para todos $D^j \in \mathcal{D}$. Para cada vértice V^i existe uma entrada de controle tal que $AV^i + Bu^i + ED^j$ pertence ao poliedro. Quando essa condição é verificada em cada vértice, ela será verificada em cada ponto do conjunto.

O poliedro Ω inclui a origem se pelo menos uma combinação convexa de seus vértices for igual ao vetor nulo $\mathbf{0}$, o que pode ser obtido impondo-se a existência de vetores $\beta_j \in \mathbb{R}^l$ tais que, $\forall j = 1, \dots, l$:

$$V\beta_j = \mathbf{0}, \quad \mathbf{1}^T \beta_j = 1, \quad \beta_j \geq \mathbf{0}. \quad (7)$$

Nota-se que, sendo os vértices V^i de Ω desconhecidos, a equação em (6) é *bilinear* nas variáveis V^i e σ_{ij} . Na seção a seguir, um problema de otimização baseado nestas relações é formulado com o objetivo de calcular um poliedro ICR, com o respeito de restrições nas variáveis de estado e de controle.

3. FORMULAÇÕES DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Nosso objetivo agora é obter um poliedro ICR com satisfação das restrições $x(k) \in R[G, \rho]$ e $u(k) \in R[U, \phi]$, com o maior volume possível. Ressalte-se que, quanto maior o volume, maior o conjunto de estados iniciais admissíveis, a partir dos quais as restrições são respeitadas todo o tempo.

Como visto, um poliedro representado por V_1 é ICR λ -contrativo e contém a origem se satisfizer às equações (6), (7) e respeita as restrições se satisfizer a (3), (4). Para isso, usaremos as estratégias de otimização apresentadas a seguir.

Problema P1: A estratégia escolhida para expandir o conjunto invariante controlado sem que ultrapasse as restrições $R[G, \rho]$ e $R[U, \phi]$ é multiplicar seus vértices e os vetores de controle correspondente por uma constante (α_m) a ser maximizada. Este problema possui a seguinte formulação matemática:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathcal{F} = \alpha_m \\ & (V, V_1, u, u_1, N, \sigma, \beta, \delta, \alpha_m) \\ \text{Sujeito a} \quad & AV^i + Bu^i + ED^j = \lambda V \sigma^{ij} \\ & \mathbf{1}^T \sigma^{ij} = 1, \quad \sigma^{ij} \geq 0 \\ & V\beta_j = \mathbf{0}, \quad \mathbf{1}^T \beta_j = 1, \quad \beta_j \geq \mathbf{0} \\ & \alpha_m * V = V_1 \\ & \alpha_m * u = u_1 \\ & GV_1^i \leq \rho \\ & Uu_1^i \leq \phi \\ & \alpha_{min} \leq \alpha_m \leq \alpha_{max} \\ & VN = I \\ & V\delta_i = \eta V_{zero}^i \\ & \mathbf{1}^T \delta_i \leq 1, \quad \delta_i \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Nessa estratégia, um poliedro ICR com vértices em V é calculado e expandido por meio da maximização de α_m , sem violação das restrições.

A restrição adicional $VN = I$ é colocada para garantir que as linhas da matriz V sejam linearmente independentes. Outra restrição adicional, $V\delta_i = \eta V_{zero}^i$, é utilizada para garantir que o poliedro invariante representado por V contenha um poliedro inicial suficientemente pequeno com vértices em V_{zero} . Isto evita problemas numéricos garantindo que o conjunto representado por V calculado não seja muito pequeno e α_m muito grande. Os vértices do conjunto representado por V_{zero} são escolhidos a priori, assim como o valor de η , sendo preferencialmente um valor pequeno, mas nem tanto, em relação ao poliedro de restrições originais no estado. Os vértices do poliedro ICR obtidos são as colunas da matriz V_1 .

Em (Brião et al., 2018), para sistemas sem perturbações, uma abordagem baseada em otimização bilinear foi proposta para o cálculo de um controlador estabilizante por realimentação de estado linear e um poliedro positivamente invariante associado, a partir da representação externa de poliedros (hiperplanos em vez de vértices). Aqui, os conjuntos calculados são invariantes controlados, para os quais a lei de controle associada não necessariamente é linear.

Os poliedros calculados pela metodologia proposta têm complexidade fixa porque o número de vértices é fixado a priori.

No problema P1 busca-se maximizar o volume do poliedro ICR de forma indireta. A formulação a seguir busca fazê-lo de forma mais explícita.

Problema P2: O volume de um poliedro convexo compacto é dado pela soma dos volumes dos sub-poliedros formados por n vértices adjacentes. O volume desses sub-poliedros é proporcional ao módulo do determinante da matriz cujas colunas são estes vértices adjacentes. Em (Gupta et al., 2019), para sistemas com incerteza no

modelo, são propostos algoritmos iterativos para calcular ganhos de realimentação de estado linear estabilizante maximizando ao mesmo tempo o volume de poliedros positivamente invariantes associados.

Como não se pode saber *a priori* quais são os vértices adjacentes, a matriz de vértices do conjunto invariante buscado é escrita da seguinte forma em (Gupta et al., 2019):

$$V_1 = WR,$$

sendo $R \in \mathbb{R}^{n \times l}$ uma matriz de vértices definidos a priori e $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz variável. Como $|\det(WR)| = |\det(W)\det(R)| \leq |\det(W)||\det(R)|$, maximizando-se $|\det(W)|$, maximiza-se, indiretamente, o volume do poliedro invariante para uma escolha particular de R .

A seguinte formulação é então proposta:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \mathcal{F} = \log|\det(W)| \\ & (V_1, u_1, N, \sigma, W) \\ & \text{Sujeito a} \\ & AV_1^i + Bu_1^i + ED^j = \lambda V_1 \sigma^{ij} \\ & \mathbf{1}^T \sigma^{ij} = 1, \quad \sigma^{ij} \geq 0 \\ & V_1 \beta_j = \mathbf{0}, \quad \mathbf{1}^T \beta_j = 1, \quad \beta_j \geq \mathbf{0} \\ & V_1 N = I \\ & V_1 = WR \\ & GV_1^i \leq \rho \\ & Uu_1^i \leq \phi \end{aligned} \quad (9)$$

Note-se que, nessa formulação, a função objetivo não é mais bilinear. O uso do \log torna a função objetivo côncava, que possui máximo global, o que pode facilitar a solução do problema de otimização.

Na próxima seção serão mostrados exemplos numéricos para ilustrar a solução desses problemas de otimização com a consequente obtenção de conjuntos ICR.

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Os resultados que serão apresentados a partir de agora foram obtidos usando o software KNITRO (Byrd et al., 2006) através da plataforma NEOS Server. Os tempos de execução que serão indicados são os emitidos no relatório de execução que a plataforma NEOS Server fornece. O KNITRO é um solucionador de otimização não linear que permite resolver problemas com restrições bilineares, mas não garante encontrar soluções ótimas globais. Porém, pode chegar a soluções ótimas locais caso o problema de otimização seja factível. De acordo com Brião et al. (2018), o diferencial do software é lidar com bilinearidades de maneira eficiente.

A variável α_m a ser maximizada possui limites máximo e mínimo, e a escolha de seus limites influencia no tamanho do conjunto final representado por V_1 . A escolha do conjunto representado por V_{zero} também influencia o resultado final. Aqui, V_{zero} foi escolhido por tentativa-e-erro. Em trabalhos futuros, pretende-se conceber uma forma sistemática de determiná-lo.

Em relação ao problema P2, a escolha dos vértices iniciais, representados pela matriz R influencia diretamente no conjunto resultante final. Escolhendo-se um conjunto repre-

sentado por R simétrico à origem implicará um conjunto final representado por V_1 também simétrico com relação à origem. Uma possibilidade é definir R a partir dos vértices do conjunto de restrições iniciais, para que o poliedro resultante representado por V_1 acompanhe aproximadamente a forma do conjunto de restrições original.

4.1 Exemplo 1

Considere o sistema linear sem perturbações analisado em (Anevlavix and Tabuada, 2019) para o qual:

$$A = \begin{bmatrix} 1,5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,25 \end{bmatrix}.$$

A taxa de contração pré-estabelecida é $\lambda = 0,99$ e as restrições originais no estado são representadas pelo poliedro $R[G,\rho]$ com:

$$G = \begin{bmatrix} 0,9147 & -0,5402 \\ 0,2005 & 0,6213 \\ -0,8193 & 0,9769 \\ -0,4895 & -0,8200 \\ 0,7171 & -0,3581 \\ 0,8221 & 0,0228 \\ 0,3993 & -0,8788 \end{bmatrix} \quad e \quad \rho = \begin{bmatrix} 0,5566 \\ 0,8300 \\ 0,7890 \\ 0,3178 \\ 0,4522 \\ 0,7522 \\ 0,1099 \end{bmatrix}.$$

As restrições no sinal de controle são dadas por $|u(k)| \leq 1$. O resultado do cálculo do máximo conjunto invariante controlado $P_{\max}(\Omega, \lambda)$ usando o método proposto em (Dórea and Hennet, 1999) é apresentado na Figura (1), juntamente com o conjunto de restrições originais $R[G, \rho]$, com os conjuntos obtidos pelas duas formulações matemáticas desenvolvidas nesse trabalho $P1(\Omega, \lambda)$ e $P2(\Omega, \lambda)$ e com o conjunto invariante controlado $P3$ obtido pelo algoritmo 1 proposto em (Anevlavix and Tabuada, 2019), os três últimos com o número de vértices fixado em 6.

É possível observar na figura (1) e na Tabela 1 que o conjunto $P1$ é o que mais se aproxima do volume do conjunto máximo que possui 8 vértices. Os conjuntos $P1$, $P2$ e $P3$, embora apresentem a mesma quantidade de vértices, possuem volumes distintos.

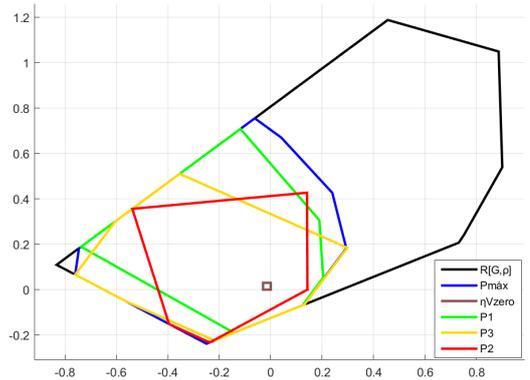


Figura 1. Conjunto de restrições originais $R[G,\rho]$ (preto); P_{\max} (azul); Conjunto ηV_{zero} (marrom); Conjunto invariante controlado obtido pelo problema P1 (verde); Conjunto invariante controlado obtido pelo problema P2 (vermelho); Conjunto P3 obtido pelo algoritmo 1 proposto em (Anevlavix and Tabuada, 2019) para $u \in [-1,1]$ (amarelo).

Para uma melhor comparação dos resultados, a quantidade de vértices e o volume dos conjuntos obtidos na Figura 1 são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Resultados obtidos para o Exemplo 1 com $|u(k)| \leq 1$.

	N.º de vértices	Volume
Pmáx (azul)	8	0,6134
P1 (verde)	6	0,4720
P2 (vermelho)	6	0,3265
P3 (amarelo)	6	0,4434

Para a restrição no sinal de controle $|u(k)| \leq 1$, observou-se um maior volume do conjunto V_1 quando os limites da variável α_m a ser maximizada no problema P1 foram $1 \leq \alpha_m \leq 10.000$, $\eta = 0, 1$ e o conjunto inicial representado por V_{zero} dado por:

$$V_{zero} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,3 & -0,3 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0 \end{bmatrix},$$

em que as colunas V_{zero}^i da matriz são seus vértices.

Para o problema P2, utilizou-se R como sendo igual à matriz de vértices do conjunto de restrições iniciais. Porém, para efeito comparativo, o número de vértices dos conjuntos $P1$ e $P2$ deveria ser igual ao de $P3$ proposto em (Anevlavix and Tabuada, 2019). Sendo assim, dos 7 vértices existentes no conjunto de restrições originais no estado, escolheram-se 6 deles para definir a matriz R , no caso, aqueles que resultaram no conjunto $P2$ de maior volume possível.

A matriz R escolhida para obter $P2$ foi, assim:

$$R = \begin{bmatrix} 0,4548 & 0,9000 & 0,7515 & 0,7307 & -0,2497 & -0,8325 \\ 1,1891 & 0,5395 & 0,2422 & 0,2070 & -0,2385 & 0,1094 \end{bmatrix}$$

Consideremos agora o mesmo sistema do Exemplo 1, as mesmas restrições no estado $R[G,\rho]$, modificando apenas a restrição no sinal de controle para $u \in [-2,2]$.

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \phi = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Para essa restrição no sinal de controle, os limites da variável α_m a ser maximizada no problema P1 foram $1 \leq \alpha_m \leq 10.000$, $\eta = 0, 4$ e o conjunto V_{zero} representado pela matriz a seguir:

$$V_{zero} = \begin{bmatrix} -0,25 & 0,26 & 0,05 & -0,46 \\ 0,02 & 0,42 & 0,75 & 0,33 \end{bmatrix}.$$

Os conjuntos $P1$, $P2$, $P3$ e $Pmáx$ possuem a mesma complexidade, com 6 vértices. É possível observar por meio da Figura (2) e dos volumes apresentados na Tabela 2 que o conjunto $P1$ novamente é o que mais se aproxima em volume do conjunto máximo.

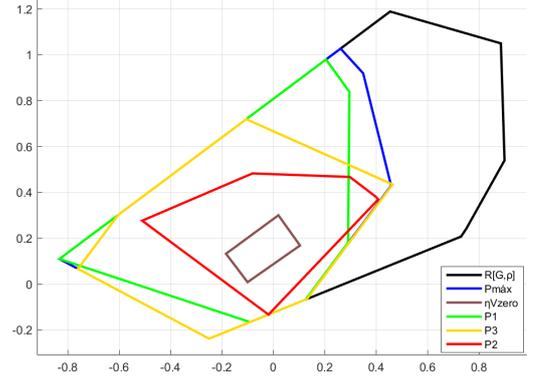


Figura 2. Conjunto de restrições originais $R[G,\rho]$ (preto); $Pmáx$ (azul); Conjunto ηV_{zero} (marrom); Conjunto invariante controlado obtido pelo problema P1 (verde); Conjunto invariante controlado obtido pelo problema P2 (vermelho); Conjunto P3 obtido pelo algoritmo 1 proposto em (Anevlavix and Tabuada, 2019) para $u \in [-2,2]$ (amarelo).

Tabela 2. Resultados obtidos para o Exemplo 1 com $|u(k)| \leq 2$.

	N.º de vértices	Volume
Pmáx (azul)	6	0,8165
P1 (verde)	6	0,6823
P2 (vermelho)	6	0,3038
P3 (amarelo)	6	0,6521

Novamente, dos 7 vértices existentes no conjunto de restrições originais no estado, escolheram-se 6 deles para definir a matriz R , escolhendo-se os 6 vértices que resultaram no conjunto $P2$ de maior volume possível.

A matriz R escolhida para obter $P2$ foi a seguinte:

$$R = \begin{bmatrix} 0,4548 & 0,8859 & 0,9000 & 0,7515 & 0,7307 & -0,2497 \\ 1,1891 & 1,0500 & 0,5395 & 0,2422 & 0,2070 & -0,2385 \end{bmatrix}$$

4.2 Exemplo 2

Considere o sistema linear discreto explorado em (Dantas, 2018) para o qual:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

A taxa de contração pré-estabelecida é $\lambda=0,96$ e as restrições originais do sistema são simétricas e dadas por $|x_i(k)| \leq 40$.

As restrições no sinal de controle são dadas por $|u(k)| \leq 1$.

O máximo conjunto invariante controlado $Pmáx$ calculado como em (Dórea and Hennes, 1999) é apresentado na Figura (3), juntamente com o conjunto de restrições originais $R[G,\rho]$, com os conjuntos obtidos pelas duas formulações matemáticas desenvolvidas nesse trabalho P1 e P2 e com o conjunto invariante controlado P3 calculado com o algoritmo 1 proposto em Anevlavix and Tabuada (2019), com 6 vértices.

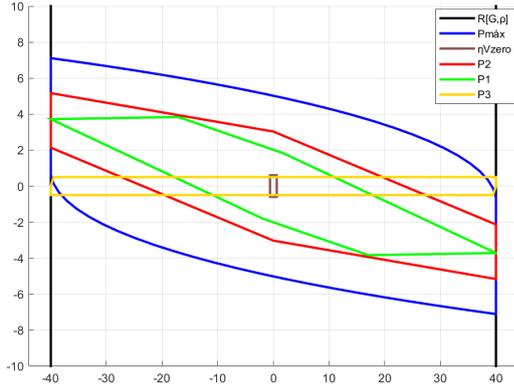


Figura 3. Conjunto de restrições originais $R[G,\rho]$ (preto); $Pmáx$ (azul); Conjunto ηV_{zero} (marrom); Conjunto invariante controlado obtido pelo problema P1 (verde); Conjunto invariante controlado obtido pelo problema P2 (vermelho); Conjunto P3 obtido pelo algoritmo 1 proposto em (Anevlavix and Tabuada, 2019)(amarelo).

É possível observar por meio da Figura (3) que o conjunto $P2$ é o que mais se aproxima em volume do conjunto máximo que possui 50 vértices. Os conjuntos $P1$, $P2$ e $P3$ embora apresentem a mesma quantidade de vértices possuem volumes distintos.

Tabela 3. Resultados obtidos para o Exemplo 2.

	N.º de vértices	Volume
$Pmáx$ (azul)	50	743,3134
P1 (verde)	6	207,7515
P2 (vermelho)	6	363,7270
P3 (amarelo)	6	79,75

Os limites da variável α_m a ser maximizada no problema P1 que proporcionaram um maior volume do conjunto foram $1 \leq \alpha_m \leq 1.000$, $\eta = 0,6$ e o conjunto V_{zero} representado pela matriz a seguir:

$$V_{zero} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para o problema P2, como o número de vértices escolhido para cálculo foi 6 e o conjunto de restrições iniciais possui apenas 4 vértices, optou-se por pegar 6 pontos regularmente espaçados em uma circunferência para definir a matriz R .

A matriz R escolhida para obter $P2$ foi:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & -0,5 & -1 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,866 & 0,866 & 0 & -0,866 & -0,866 \end{bmatrix}$$

4.3 Exemplo 3

Considere o sistema linear discreto explorado em Dantas (2018) para o qual:

$$A = \begin{bmatrix} 0,7326 & -0,0861 \\ 0,1722 & 0,9909 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,0609 \\ 0,0064 \end{bmatrix} \quad e \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema está sujeito a perturbações limitadas ao conjunto $\mathcal{D} = \{d : |d| \leq 0,1\}$, com taxa de contração $\lambda = 0,96$ e possui como restrições $|x_i(k)| \leq 2$ e $|u(k)| \leq 2$. Neste exemplo, a restrição $V\delta_i = \eta V_{zero}^i$ não foi usada porque a perturbação já impõe um tamanho mínimo pra o conjunto representado por V .

Os conjuntos $P1$, $P2$ e $Pmáx$ são representados na Figura (4), juntamente com o conjunto de restrições originais $R[G,\rho]$.

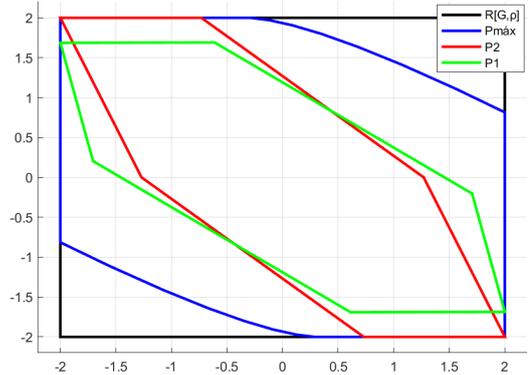


Figura 4. Conjunto de restrições originais $R[G,\rho]$ (preto); $Pmáx$ (azul); Conjunto invariante controlado obtido pelo problema P1 (verde); Conjunto invariante controlado obtido pelo problema P2 (vermelho).

É possível observar através da Figura (4) que o conjunto $P2$ é o que está mais próximo em volume do conjunto máximo que possui 18 vértices. Os conjuntos $P1$ e $P2$ embora apresentem a mesma quantidade de vértices possuem volumes distintos.

Tabela 4. Resultados obtidos na Figura 4

	N.º de vértices	Volume
$Pmáx$ (azul)	18	13,6986
P1 (verde)	6	7,5799
P2 (vermelho)	6	7,6167

Os limites da variável α_m a ser maximizada no problema P1 foram $1 \leq \alpha_m \leq 100.000.000$. Para o problema P2, como o número de vértices escolhido para cálculo foi 6 e o conjunto de restrições iniciais possui apenas 4 vértices, escolheu-se a matriz R da mesma maneira que foi escolhida no Exemplo 2.

A matriz R escolhida para obter $P2$ foi:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & -0,5 & -1 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,866 & 0,866 & 0 & -0,866 & -0,866 \end{bmatrix}$$

4.4 Exemplo 4 - Sistema de alta ordem

Os modelos desse sistema de décima ordem foram definidos através de números aleatórios normalmente distribuídos. O sistema está sujeito a perturbações limitadas ao conjunto $\mathcal{D} = \{d : |d| \leq 0,1\}$, com taxa de contração $\lambda = 0,99$ e não possui restrições nos estados nem no sinal de controle. Neste exemplo, a restrição $V\delta_i = \eta V_{zero}^i$ não foi usada pelo mesmo motivo já mencionado no Exemplo 3.

Para este exemplo observou-se um maior volume do conjunto representado por V_1 quando os limites da variável α_m a ser maximizada pelo problema P1 foram $1 \leq \alpha_m \leq 1.000.000$.

Tabela 5. Resultados obtidos para o Exemplo 4.

	Conjunto P1
N.º de vértices	24
Volume	$2,5558 \times 10^{28}$
Quantidade de Variáveis	1037
Quantidade de Restrições	716
Tempo total da execução (seg)	140
Tempo para achar uma solução (seg)	130,412

Também tentou-se a busca de uma solução ótima global através do solucionador Couenne, porém ao tentar executar os três exemplos aqui apresentados com os problemas P1 e P2, o solucionador esgotou o período permitido de 8 horas para execução e não retornou solução.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposta uma metodologia baseada em otimização para construir conjuntos invariantes controlados robustos com complexidade fixa, para sistemas lineares de tempo discreto sujeitos a restrições nos estados e nas entradas de controle e a perturbações persistentes de amplitude limitada.

Por meio de exemplos ilustrativos, mostrou-se que a metodologia proposta é capaz de calcular poliedros com volumes maiores do que um método recente da literatura. Como trabalhos futuros, alguns pontos importantes restam ser explorados, tais como novas possibilidades de função objetivo para o problema P2 que levem à maximização do volume do poliedro calculado e uma maneira de fazer a formulação matemática proposta no problema P1 incluir um poliedro invariante já conhecido para aumentar o volume a partir dele. Outro ponto a explorar é a possibilidade de obter via otimização uma lei de controle afim por partes de complexidade fixa associada aos conjuntos ICR.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado em parte pelo CNPq, Processo 309862/2019-1.

REFERÊNCIAS

Anevlavix, T. and Tabuada, P. (2019). Computing controlled invariant sets in two moves. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, 6248–6254. IEEE.

Athanasopoulos, N. and Bitsoris, G. (2009). A novel approach to the computation of the maximal controlled invariant set for constrained linear systems. In *2009 European control conference (ECC)*, 3124–3129. IEEE.

Athanasopoulos, N. and Bitsoris, G. (2010). Invariant set computation for constrained uncertain discrete-time linear systems. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 5227–5232. IEEE.

Bitsoris, G. (1988). On the positive invariance of polyhedral sets for discrete-time systems. *Systems & control letters*, 11(3), 243–248.

Blanchini, F. (1994). Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced lyapunov functions. *IEEE Transactions on automatic control*, 39(2), 428–433.

Blanco, T.B., Cannon, M., and De Moor, B. (2010). On efficient computation of low-complexity controlled invariant sets for uncertain linear systems. *International journal of Control*, 83(7), 1339–1346.

Brião, S.L., Pedrosa, M.V., Castelan, E.B., Camponogara, E., and de Assis, L.S. (2018). Explicit computation of stabilizing feedback control gains using polyhedral lyapunov functions. In *2018 IEEE International Conference on Automation/XXIII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA)*, 1–6. IEEE.

Byrd, R.H., Nocedal, J., and Waltz, R.A. (2006). Knitro: An integrated package for nonlinear optimization. In *Large-scale nonlinear optimization*, 35–59. Springer.

Dantas, A.D.O.d.S. (2018). *Projeto de controladores com complexidade reduzida para sistemas lineares sujeitos a restrições usando análise de agrupamentos de dados*. Ph.D. thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Dórea, C.E.T. and Hennes, J. (1999). (A, B)-invariant polyhedral sets of linear discrete-time systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 103(3), 521–542.

Gupta, A., Köroğlu, H., and Falcone, P. (2019). Computation of low-complexity control-invariant sets for systems with uncertain parameter dependence. *Automatica*, 101, 330–337.

Hadley, G. (1961). *Linear Algebra*. Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass.

Kerrigan, E.C. and Maciejowski, J.M. (2000). Invariant sets for constrained nonlinear discrete-time systems with application to feasibility in model predictive control. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 00CH37187)*, volume 5, 4951–4956. IEEE.

Li, Y. and Liu, J. (2016). Computing maximal invariant sets for switched nonlinear systems. In *2016 IEEE conference on computer aided control system design (CACSD)*, 862–867. IEEE.

Mayne, D.Q., Rawlings, J.B., Rao, C.V., and Sokaert, P.O. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6), 789–814.

Mirko, F. and Mazen, A. (2017). Computing control invariant sets is easy. *arXiv preprint arXiv:1708.04797*.

Scibilia, F., Bitmead, R., Oлару, S., and Hovd, M. (2009). Maximal robust feasible sets for constrained linear systems controlled by piecewise affine feedback laws. In *2009 IEEE International Conference on Control and Automation*, 104–109. IEEE.

Sheer, S. and Gutman, P.O. (2016). A novel approach to the computation of polyhedral invariant sets for constrained systems. In *2016 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design (CACSD)*, 1428–1433. IEEE.