DOI: 10.48011/asba.v2i1.1251

Análise de Padrões de Esparsidade e Métodos de Ordenação para Estimação de Estado em Sistemas de Distribuição

Gustavo M. Hebling * **Julio A. D. Massignan** *
João B. A. London Junior * **Luciano Bento Dantas** **

* *Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, SP, (e-mail: gustavo.hebling@usp.br, julio.massignan@usp.br, jbalj@sc.usp.br).*
** *Companhia Paranaense de Energia - COPEL, PR, (e-mail: luciano.dantas@copel.com).*

Abstract: State estimation is the primary tool in real-time analysis of distribuition systems. Given the recent increase in data volume created by smart meters, distributed generation and smart grids, computational efficiency is an essential requirement in the processing of that data for real time operation. Distribution system have a specific set of particularities that enable the use of sparse techniques that vastly decrease the computational effort required to obtain a solution as well as improving its robustness. This paper proposes the use of different ordering methods to reduce fill-in in the factorization step of the state estimator. Tests conducted in three systems show an improvement in space needed for data storage and, additionaly, an improvement in the condition number of the resulting linear system.

Resumo: A estimação de estado é a ferramenta essencial para análises em tempo real de sistemas de distribuição. Devido ao aumento de dados, oriundos de smart meters, geração distribuída e redes inteligentes, a eficiência computacional no processamento desses dados se torna um requisito importante para a operação em tempo real. As particularidades dos sistemas elétricos permitem a adoção de técnicas de esparsidade que em muito diminuem o esforço computacional necessário para obter uma solução além de aumentar a robustez desta . Este artigo propõe o uso de diferentes métodos de ordenação de matrizes para reduzir o numero de elementos nulos resultantes apos a fatoração inerente ao método de estimação. São obtidas melhoras expressivas em termos de armazenamento de dados e, adicionalmente, no condicionamento do sistema linear resultante em três diferentes casos de teste.

Keywords: Distribution Systems, State Estimation, Orthogonal Methods, Sparsity, Ordering Techniques.

Palavras-chaves: Sistemas de Distribuição, Estimação de Estado, Métodos Ortogonais, Esparsidade, Técnicas de Ordenação.

1. INTRODUÇÃO

Os Sistemas de Distribuição (SDs) estão passando por uma mudança de paradigma devido a maior inserção de fontes renováveis, presença de veículos elétricos e geração distribuída. Neste novo contexto, os operadores dos SDs tem que lidar com volumes cada vez maiores de dados, como os gerados por PMUs, medidores inteligentes e também do sistema supervisório SCADA. Para garantir uma operação segura e confiável em um ambiente bastante complexo, estas informações devem ser processadas e disponibilizadas para as diferentes funcionalidades automáticas dos centros de operação. Nesse contexto, o estimador de estado é a ferramenta computacional fundamental para o monitoramento em tempo real de sistemas elétricos de potência, uma vez que fornece o estado da rede a partir das diversas medidas disponíveis (Primadianto and Lu, 2017).

O estimador de estado é, portanto, a primeira etapa de uma sequência de ferramentas de análise automáticas que são utilizadas em sistemas de gerenciamento da energia como, por exemplo, o fluxo de potência, análise de contingências, estimação de demanda, cálculo de margem de estabilidade, análises de curto-circuito e outras. Como algumas dessas aplicações tem como fonte de dados a situação da rede em tempo-real, precisão e eficiência computacional são requisitos do estimador de estado. O aumento do volume de dados nos centros de operação e nas aplicações em tempo-real explicitam ainda mais esses requisitos atualmente.

O estimador de estado por mínimos quadrados ponderados (WLS, do inglês *Weighted Least Squares*) é o estimador mais utilizado em sistemas de transmissão no entanto, como apresentado por Primadianto and Lu (2017), algorit-

⋆ Este trabalho recebeu apoio financeiro do CNPq, CAPES (processo nº 308297/2018-0) e FAPESP (processo nº 2016/19646-6) a da COPEL Distribuição S/A (projeto P&D ANEEL PD 2866-0504/2018).

mos especializados foram desenvolvidos para a Estimação de Estado em Sistemas de Distribuição (EESD). Esses algoritmos foram criados para lidar com a natureza trifásica, desbalanceada, assimétrica, não transposta e radial dos sistemas de distribuição além do alto número de pseudo-medidas e medidas virtuais disponíveis. Um desses algoritmos utiliza, ao invés da tensão nodal na forma polar, a corrente nos ramos na forma retangular como o apresentado por Pal et al. (2013). Outra formulação, baseada na matriz admitância do sistema foi proposta por Almeida and Ochoa (2017). Apesar de apresentarem resultados aderentes para sistemas radiais de média tensão, estas abordagens ainda sofrem de ressalvas teóricas, visto que se baseiam em aproximações do modelo de medição original para representar as medidas através de equivalentes de corrente. Desta forma essas propostas não solucionam inteiramente o problema central da EESD, e sim uma réplica do problema original, mas não inteiramente equivalente como apontado por Feng et al. (2012).

Quanto ao problema de mal condicionamento da matriz Ganho da abordagem WLS tradicional, este é causado principalmente pelos diferentes pesos atribuídos as medidas como mostrado por Atanackovic and Dabic (2013) e também pelas conexões entre linhas longas e linhas curtas comuns em SDs, visto em Monticelli et al. (1985). Apesar de um problema conhecido na literatura, poucas abordagens trataram este quesito especificamente para a realidade de sistemas de distribuição. Dentre estas, Thornley et al. (2005) destaca a representação de medidas virtuais (outra fonte de mal condicionamento) através de restrições de igualdade, evitando a alta ponderação associada a estas medidas. Em outra abordagem recente, Hebling et al. (2020) explora a aplicação de métodos ortogonais para reduzir sensivelmente o número de condicionamento numérico do problema de EESD em conjunto com a solução baseada no método QR Multifrontal. Apesar dos métodos ortogonais já serem utilizados em sistemas de transmissão (Simoes-Costa and Quintana, 1981), com bons resultados práticos, poucos estudos exploraram o contexto de sistemas de distribuição até então.

Neste sentido, este trabalho apresenta um estudo sobre métodos de ordenação e aspectos de esparsidade no problema de EESD, através do uso de uma abordagem ortogonal para a solução do problema de estimação via critério WLS. A contribuição do artigo se dá pela comparação de três métodos de ordenação (*Approximate Minimum Degree*, *Nested Dissection* e *Reverse Cuthill-Mckee*) para o tratamento de esparsidade no problema de EESD. Além disto, o trabalho busca aprofundar a discussão de aspectos numéricos e computacionais no que tange a implantação computacional de métodos de análise estática para SDs.

São apresentados testes de simulação com os sistemas IEEE de 34, 123 e 342 barras, este último uma rede malhada contemplando todos os níveis dos SDs (subestação, alimentadores primários e redes secundárias de baixa tensão), buscando assim representar também a realidade de implantação de medidores inteligentes nas redes secundárias. Os resultados obtidos mostram um sensível aumento de robustez numérica frente a redução de *fill-ins* e melhoria do condicionamento numérico. Desta forma, através destas análises, espera-se que incrementar detalhes de implantação computacional prática de EESDs, contexto de interesse para empresas de distribuição de energia que estejam implantando sistemas de medidores inteligentes e sistemas de gerenciamento de energia avançados.

2. ESTIMAÇÃO DE ESTADO EM SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO

O estimador de estado é baseado no conjunto de equações não-lineares de acordo com o seguinte modelo de medição:

$$z = h(x) + e \tag{1}$$

na qual z é o vetor de medidas, de dimensão $(mx1)$, x é o vetor de variáveis de estado $(nx1)$, $h(.)$ é o vetor de funções não-lineares que relaciona as variáveis com as medidas e e é o vetor de erro nas medidas, considerado como uma variável Gaussiana aleatória independente com média zero e matriz de covariância conhecida R_z ($R_z = (\sigma_{z1}^2, \sigma_{z2}^2, ...\sigma_{zm}^2)$, na qual σ_{zi} é o desvio padrão associado a medida i.

O vetor de variáveis de estado é obtido, no método WLS tradicional, por meio da minimização do índice $J(x)$:

$$J(x) = [z - h(x)]^T W [z - h(x)] \tag{2}$$

em que $W = R_z^{-1}$ é chamada de matriz de ponderação. Esta minimização é obtida através de um processo iterativo que calcula a atualização $\triangle x$ do vetor de variáveis de estado, até que uma tolerância pré-especificada seja atingida, através da equação:

$$H(x^k) W H^T(x^k) \triangle x = H(x^k)^T W [z - h(x^k)] \tag{3}$$

A matriz de coeficientes $H(x^k) W H^T(x^k)$ é chamada de matriz Ganho e, em sistemas observáveis, esta é simétrica e positiva definida e, portanto, o método Cholesky é bastante aplicado em sua fatoração. Entretanto, devido às particularidades dos SDs como diferentes conexões e tipos de medidas, a matriz Ganho pode se tornar mal-condicionada o que deteriora a qualidade da solução obtida.

2.1 Aplicação de Métodos Ortogonais

Em sistemas de distribuição a matriz Ganho pode ser altamente mal-condicionada levando a deterioração numérica da solução. Em Hebling et al. (2020) é proposto o uso de uma fatoração ortogonal de modo a melhorar o mal condicionamento no cálculo da atualização $\triangle x$ sem a necessidade de obter a matriz Ganho, utilizando a relação:

$$W^{1/2} H = Q^T R \tag{4}$$

A fatoração QR pode ser obtida através do método de Householder e, após manipulações algébricas a equação para obter o vetor de atualizações se torna:

$$R \triangle x^k = Q W^{1/2} [z - h(x^k)] \tag{5}$$

Uma vez que R é triangular superior, a solução deste sistema é obtida por substituição *Backward*. Pode-se mostrar que o número de condicionamento de uma matriz é a relação entre o maior e o menor de seus autovalores. Aplicando esse conceito para a matriz Ganho e fatoração ortogonal, tem-se:

$$K(G) = \frac{\lambda_{max}(G)}{\lambda_{min}(G)} \approx [K(W^{\frac{1}{2}} H)]^2 \tag{6}$$

Enquanto isso, pode ser demonstrado que o condicionamento da matriz R, através da abordagem ortogonal pela equação (5) (Hebling et al., 2020), é dado por:

$$K(R) \approx K(W^{\frac{1}{2}}H) \tag{7}$$

O que mostra que o número de condicionamento da matriz ganho é da ordem do quadrado do número de condicionamento da matriz obtida fazendo a substituição ortogonal.

2.2 Modelagem de Redes Elétricas de Distribuição

O conjunto de equações não-lineares que relaciona as variáveis de estado com as medições necessita de um modelo estático da rede que tem origem no fluxo de potência e caracteriza as expressões de injeção e fluxo de potência na rede elétrica em função das variáveis de estado. Este trabalho utiliza um modelo matricial para a rede trifásica de sistemas de distribuição baseado em quadripolos. Este modelo proporciona maior facilidade de implementação computacional e pode representar o comportamento de um grande número de circuitos lineares, ou seja, componentes de um SD.

Na figura 1 é apresentado um modelo do quadripolo de dois terminais utilizado neste artigo. Este modelo é caracterizado pela expressão:

$$\begin{pmatrix} I^p \\ I^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^{pp} & Y^{ps} \\ Y^{sp} & Y^{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^p \\ V^s \end{pmatrix} \tag{8}$$

em que os sobrescritos p e s se referem aos terminais do quadripolo, I^p e I^s são fasores de corrente e V^p e V^s são fasores de tensão nos terminais p e s, respectivamente. Os elementos Y^{pp}, Y^{ps}, Y^{sp} e Y^{ss} são matrizes de admitâncias que caracterizam os diferentes equipamentos dos SDs. A figura 2 e as equações (9) a (11) ilustram a representação de um ramal de distribuição trifásico pelo modelo de quadripólos.

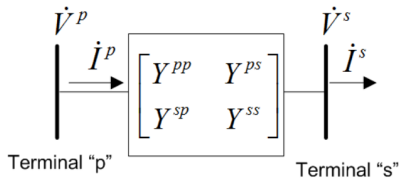

Figura 1. Modelo de um quadripolo de dois terminais, "p"e "s". (Fonte: Elaborado pelo autor)

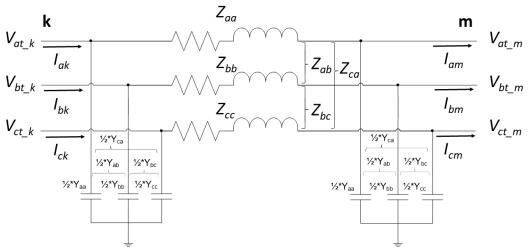

Figura 2. Modelo pi de circuito trifásico de um ramal de distribuição com acoplamento mútuo. (Fonte: Elaborado pelo autor)

$$\begin{aligned} Y^{pp} &= Y^{ss} = Z_{serie}^{-1} + Y_{shunt} \\ Y^{ps} &= Y^{sp} = -Z_{serie}^{-1} \end{aligned} \tag{9}$$

$$Z_{serie} = \begin{pmatrix} R_{aa} + j.X_{aa} & R_{ab} + j.X_{ab} & R_{ac} + j.X_{ac} \\ R_{ab} + j.X_{ab} & R_{bb} + j.X_{bb} & R_{bc} + j.X_{bc} \\ R_{ac} + j.X_{ac} & R_{bc} + j.X_{bc} & R_{ac} + j.X_{cc} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$Y_{shunt} = \begin{pmatrix} j.B_{aa} & j.B_{ab} & j.B_{ac} \\ j.B_{ab} & j.B_{bb} & j.B_{bc} \\ j.B_{ac} & j.B_{bc} & j.B_{cc} \end{pmatrix} \tag{11}$$

nas quais, R_{aa}, X_{aa}, B_{aa}, R_{bb}, X_{bb}, B_{bb},R_{cc}, X_{cc}, B_{cc}, R_{ab}, X_{ab}, B_{ab}, R_{bc},X_{bc}, B_{bc}, R_{ca}, X_{ca}, B_{ca} representam os parâmetros de resistência, reatância e capacitância próprias e mútuas do ramal de distribuição, dados em função do tipo de cabo e de características geométricas da disposição dos mesmos. Informações sobre modelos trifásicos de equipamentos de SDs, como reguladores de tensão, bancos de capacitores, transformadores, entre outros podem ser encontrados em (Hebling et al., 2020; Kersting, 2001).

As equações não-lineares e modelos trifásicos são utilizados, na estimação de estado, em conjunto com o vetor de medidas. A equação de potência complexa, utilizando a formulação de quadripolos pode ser escrita como:

$$S^p = P^p + j.Q^p = \dot{V}^p \odot (\dot{I}^p)^* = \dot{V}^p \odot (Y^{pp}.\dot{V}^p + Y^{ps}.\dot{V}^s)^*, \tag{12}$$

Onde S^p é um vetor com a potência complexa por fase na barra p, $\odot$ é o produto de Hadamard (elemento a elemento) e $*$ representa o complexo conjugado.

O plano de medição pode conter medidas SCADA, usualmente medidas de fluxo ou injeção de potência além de magnitude de tensão ou corrente. Mais recentemente foram introduzidas medidas em tempo-real fornecidas por PMUs e *Smart Meters*. Em sistemas de distribuição, no entanto, o maior número de medidas disponíveis são pseudo-medidas que informam a carga conectada em transformadores de distribuição, isto é, transformadores que conectam as redes de média e baixa tensão. Estas pseudo-medidas são construídas a partir de perfis de carga e dados históricos, uma vez que não há medição em tempo-real nos transformadores e, portanto, trata-se de uma informação menos precisa do que medições em tempo-real ou SCADA.

Além das pseudo-medidas, empregadas para garantir a observabilidade devido ao baixo número de medidas disponíveis em SDs, existem as medidas virtuais que são grandezas conhecidas do sistema, como injeções nulas em barras, isto é, sem geração ou carga e por isso recebem uma ponderação que reflete a maior precisão associada a estas informações. Existem formulações que estendem o estimador WLS tradicional para lidar com medidas virtuais utilizando restrições de igualdade, no entanto, não é o foco deste artigo.

3. ESPARSIDADE E MÉTODOS DE ORDENAÇÃO

Uma matriz esparsa é aquela que possui um grande número de elementos nulos e, por isso, é interessante do ponto de vista computacional fazer o armazenamento somente dos

elementos não-nulos, o que proporciona uma economia de memória. Além disso, algoritmos especiais existem para realizar operações tanto de leitura quanto escrita nessas estruturas esparsas e, por atuarem somente nos elementos não-nulos, proporcionam um ganho de performance.

Preservar a esparsidade é, portanto, desejável do ponto de vista de eficiência computacional ainda mais para operações que necessitam de processamento em tempo-real, como é o caso do estimador de estado. Hebling et al. (2020), mostra que utilização de rotinas e armazenamento esparso é essencial para obter ganhos expressivos de performance computacional se tratando de sistemas de distribuição. Uma forma de manter a esparsidade durante o processo de estimação de estado é utilizando métodos de ordenação.

É importante destacar que, para garantir o melhor desempenho computacional, além do armazenamento esparso e dos métodos de ordenação é necessário utilizar um método de solução de sistemas lineares que seja otimizado para lidar com sistemas esparsos. Em Hebling et al. (2020), o método apresentado se chama Multifrontal QR Esparso e, além da ordenação das matrizes para redução de *fill-in*, emprega técnicas como fatoração simbólica, montagem de árvore de eliminação e reflexões de Householder para encontrar a solução do sistema linear.

Durante o processo de solução do sistema linear via fatoração, é usual reordenar as linhas e colunas da matriz de coeficientes de modo a diminuir o número de *fill-ins*, isto é, o aparecimento de elementos não-nulos que antes da fatoração eram nulos. Formulado como um problema de otimização, o objetivo é encontrar uma matriz de permutação P que minimize o número de elemento não-nulos e o esforço computacional na fatoração da matriz PAP^T, Davis (2006), Davis et al. (2016). Este problema de otimização é *NP-Complete* e heurísticas são usadas para solucioná-lo, como provado por Yannanakis (1981).

Algumas dessas heurísticas utilizam o grafo não-direcionado associado a matriz sendo fatorada uma vez que este processo de fatoração equivale a eliminação de um nó do grafo. Os *fill-ins* são, portanto, novas arestas criadas durante o processo de eliminação de nós. A ordenação resultante dos métodos que utilizam o grafo não-direcionado é a ordem em que são escolhidos os nós para serem eliminados, de acordo com cada heurística proposta. Outros métodos não utilizam a estrutura de grafo associada a matriz mas sim propriedades e características da própria matriz sendo fatorada. Na próxima seção são detalhados alguns métodos e suas aplicações.

3.1 Métodos de Ordenação

O método AMD - *Approximate Minimum Degree* é uma heurística que opera no grafo não-direcionado relacionado a matriz de coeficientes. A ordenação P é resultado de escolhas sucessivas de nós para serem eliminados no grafo e, a cada passo, o próximo nó a ser escolhido é aquele com menor grau, isto é, o menor número de nós adjacentes. Podem ocorrer empates no momento de escolha e diferentes critérios foram propostos para selecionar um nó entre os de mesmo grau, como mostrado em Vempati et al. (1991).

Na figura 3 é apresentado o mecanismo pelo qual o *fill-in* é gerado e o que ele representa no grafo associado a matriz sendo fatorada. A escolha do nó 2 para ser eliminado provoca o aparecimento de novas arestas, em vermelho, e estas representam elementos originalmente nulos que são inseridos na matriz. Seguindo o algotimo AMD, uma possível escolha de nó para ser eliminado primeiro é o nó 1, que tem grau 1.

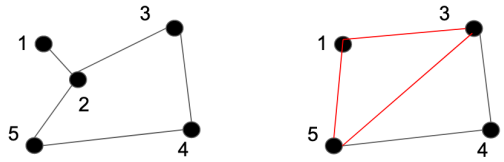

Figura 3. Exemplo de aparecimento de *fill-in* após elimação (Fonte: Elaborada pelo autor)

Outro método que tem como base o grafo associado a matriz se chama *Nested Dissection*. Esta heurística é baseada no conceito de dividir e conquistar e, partindo do grafo completo, escolhe sucessivos separadores de modo que qualquer caminho entre os subgrafos resultantes passe pelo separador obtido naquela iteração. Após um número suficiente de iterações, os vértices resultantes não contidos em separadores são escolhidos para iniciar a ordenação enquanto que aqueles vértices presentes nos primeiros separadores são ordenados por último. Esse método não ordena todos os vértices contidos nos separadores e subgrafos e outras heurísticas podem ser utilizar para ordená-los.

Outro método visa diminuir a banda diagonal da matriz e como mostrado em Chan and George (1980), obtém uma ordenação também através do grafo da matriz escolhendo, a princípio, o nó de menor grau e numerando seus adjacentes em ordem crescente de grau. O processo é repetido para os todos os nós adjacentes até que reste mais nós. Uma outra proposta utiliza a ordem inversa da obtida anteriormente e Liu and Sherman (1976) constatou que produzia melhores resultados na geração de *fill-in*, este método é chamado *Reverse Cuthill-Mckee - RCM*.

4. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Para avaliar os métodos de ordenação foram utilizados sistemas de teste da literatura IEEE com 34, 123 e 342 barras. A partir de um fluxo de potência, foram elaborados planos de medição para cada um deles de forma a representar uma condição real de operação de um sistema de distribuição em relação aos tipos de medidas disponíveis e precisões associadas, estes planos são mostrados na tabela 1.

O sistema de 342 barras é apresentado em detalhes na figura 4. Este sistema contém, em vermelho, a rede de média tensão (subestação de alta tensão e alimentadores primários) e em azul a rede de baixa tensão. Além disso, apesar de os sistemas de distribuição serem usualmente radiais esse sistema contém malhas, situação encontrada em SDs de alta densidade de carga com maiores demandas por confiabilidade. Cabe ressaltar que esta rede possibilita representar um cenário mais condizente com a integração de medidores inteligentes, uma vez que representa em detalhes as redes secundárias onde estes medidores vem sendo instalados. O sistema IEEE123, por sua vez, busca

representar uma condição de redes tipicamente radiais majoritariamente monitoradas por pseudo-medidas (curvas típicas de carga) e poucas informações dos sistemas SCADA, cenário mais comumente encontrado nos SDs típicos.

Tabela 1. Planos de Medição dos sistemas utilizados para teste

	34 barras	123 barras	342 barras
Medidas SCADA	632	72	575
Smart Meters	0	0	929
Pseudo-medidas	0	183	0
Medidas Virtuais	0	316	1230

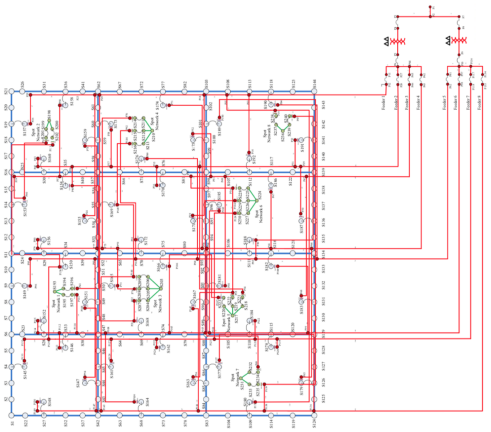

Figura 4. Sistema de 342 barras utilizado nas análises.

Para este sistema de 342 barras, são apresentados na figura 5 os padrões de esparsidade (destacando os elementos não-nulos em azul), sem aplicação de nenhum método de ordenação, para a matriz Ganho e matriz $W^{1/2}H$ utilizada no método orgotonal QR, assim como o fator L e o fator R resultado da fatoração aplicando-se os métodos Cholesky e QR, respectivamente. Nota-se que apesar de serem matriz triangulares, um excessivo número de *fill-ins* surgem durante o processo de fatoração.

4.1 Comparação de Métodos

Os três métodos de ordenação previamente citados foram aplicados nas matrizes Ganho e na matriz $W^{1/2}H$ utilizada no método orgotonal QR dos três sistemas de teste. Para o sistema de 342 barras, são apresentados em detalhes os padrões de esparsidade nas figuras 6 e 7. O primeiro aspecto de destaque é a expressiva melhora em termos de *fill-in* em relação às matrizes sem ordenação apresentadas na figura 5. Esta melhora é observada também nos sistemas de 34 e 123 barras analisados, como pode ser visto nas tabelas 2 e 3 que mostram o percentual de redução de elementos não-nulos dos fatores L, obtido com a fatoração Cholesky da matriz Ganho, e R, resultado da fatoração QR da matriz $W^{1/2}H$, em relação aos fatores sem ordenação.

Em termos absolutos, o método ortogonal apresentado produz um número menor de elementos nulos no fator R em relação ao fator L da matriz Ganho. Em sistemas grandes, a quantidade de dados pode se tornar um empecilho para o processamento rápido e, portanto, o menor número de elementos nulos significa menos operações computacionais e uma maior eficiência. Além disso, a redução

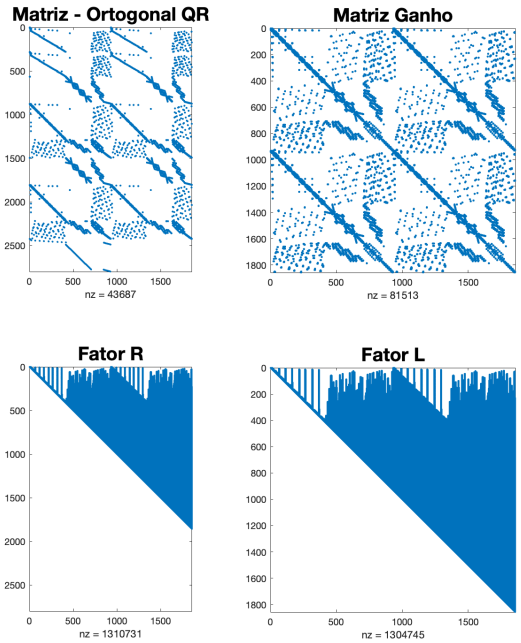

Figura 5. Padrão de esparsidade da matriz obtida com o método ortogonal QR e fator R e matriz ganho e fator L para o sistema de 342 barras.

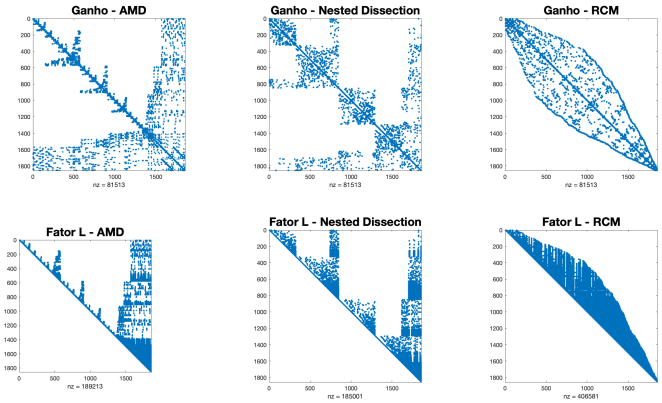

Figura 6. Padrão de esparsidade da matriz Ganho com métodos de ordenação e fatores L.

Tabela 2. Redução percentual no número de elementos nulos na formulação com matriz Ganho

	34 barras	123 barras	342 barras
AMD	77.44%	90,97%	87,52%
Nested Dissection	71,73%	90,20%	87,80%
RCM	77,44%	90,97%	73,19%

Tabela 3. Redução percentual no número de elementos nulos na formulação com matriz QR

	34 barras	123 barras	342 barras
AMD	72,30%	89,84%	85,55%
Nested Dissection	65,29%	88,96%	85,89%
RCM	71,29%	89,79%	68,99%

no número de *fill-ins* tem impacto também no número de condicionamento do fator obtido da matriz Ganho como pode ser verificado na tabela 4. Há um ganho expressivo no número de condicionamento quando uma ordenação é

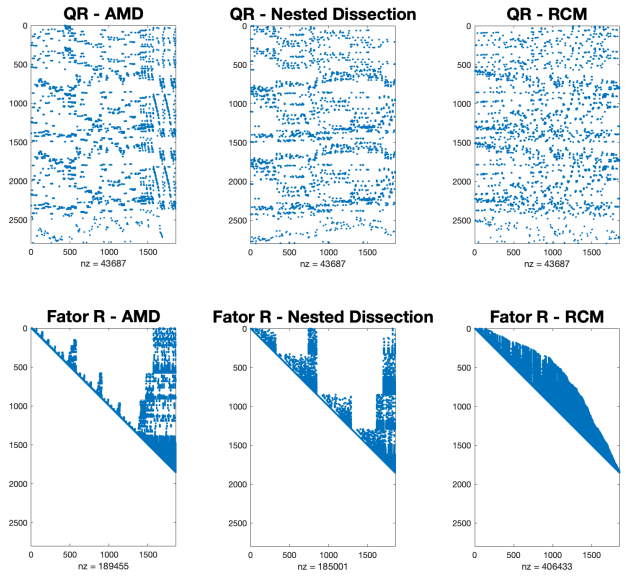

Figura 7. Padrão de esparsidade da matriz Ortogonal QR com métodos de ordenação e fatores R.

utilizada. Para a formulação QR apresentada, o número de condicionamento obtido é da ordem da raiz quadrada do que é visto com a matriz Ganho, como era de se esperar, entretanto as diferentes ordenações apresentadas não tem efeito no número de condicionamento, como apresentado pela tabela 5.

Tabela 4. Comparação do número de condicionamento da matriz Ganho com diferentes ordenações

	34 barras	123 barras	342 barras
Sem Ordenação	1,58E+20	7,30E+18	7,72E+24
AMD	8,25E+10	1,15E+11	1,42E+14
Nested Dissection	8,25E+10	1,15E+11	1,42E+14
RCM	8,25E+10	1,15E+11	1,42E+14

Tabela 5. Comparação do número de condicionamento da matriz obtida com o método QR com diferentes ordenações

	34 barras	123 barras	342 barras
Sem Ordenação	1,87E+05	2,97E+05	6,88E+06
AMD	1,87E+05	2,97E+05	6,88E+06
Nested Dissection	1,87E+05	2,97E+05	6,88E+06
RCM	1,87E+05	2,97E+05	6,88E+06

A diferença no desempenho dos métodos de ordenação nos sistemas de teste pode ser explicada pela diferença de topologia, além da dimensão, entre eles. O sistema de 342 barras apresentado em detalhes possui malhas, o que não é usual para sistemas de distribuição que, usualmente operam em configuração radial como é o caso do sistema de 123 barras. Essa diferença pode ser observada também pela diferença no padrão de esparsidade da matriz Ganho dos sistemas. Na figura 8 é apresentado o padrão de esparsidade para o sistema de 123 barras e nota-se uma estrutura de simetria bastante diferente daquela observada na figura 5 uma vez que no sistema de 342 barras existem muito mais elementos entre a diagonal principal e diagonal do quadrante inferior e superior. A diferença entre os padrões dos sistemas de 123 e 342 barras também é evidenciada pelos fatores R e L apresentados na figura 9. É predominante a presença de elementos não-nulos próximos a diagonal principal, devido a radialidade do sistema de 123 barras.

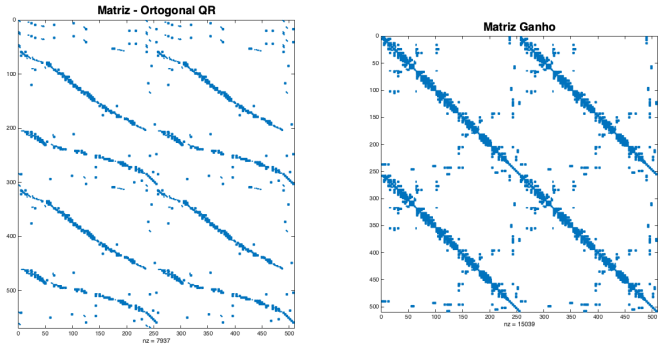

Figura 8. Padrão de esparsidade da matriz Ganho do sistema de 123 barras.

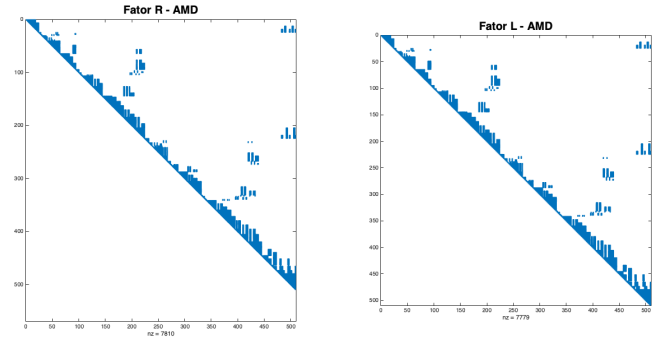

Figura 9. Padrões de esparsidades dos fatores R e L do sistema de 123 barras com ordenação AMD.

Para efeito de comparação de eficiência computacional, os três sistemas de teste foram simulados com um estimador de estado em um computador com processador i5 de 2.7 Ghz e 8Gb de memória RAM utilizando sistema Unix. Na tabela 6 são apresentados os tempos (em segundos) da execução do programa para os sistemas sem ordenação e para as ordenações AMD e Nested Dissection que obtiveram os melhores desempenhos na redução de *fill-in*. Para os sistemas de 34 e 123 barras, apesar do melhor desempenho da ordenação AMD para redução de *fill-in*, o melhor tempo computacional é obtido com a ordenação Nested dissection em todos os sitemas simulados.

Tabela 6. Tempos de execução do Estimador de Estado com e sem ordenação

	34 barras	123 barras	342 barras
Sem Ordenação	0,117 s	0,235 s	3,267 s
AMD	0,144 s	0,177 s	1,394 s
Nested Dissection	0,133 s	0,190 s	1,296 s

5. CONCLUSÃO

Nesse artigo foram apresentados alguns métodos de ordenação para redução de *fill-in* durante o processo de fatoração inerente ao estimador de estado WLS. Esses métodos de ordenação proporcionam uma melhoria significativa no número de condicionamento além do ganho de performance computacional uma vez que são realizadas menos

operações. A formulação QR apresentada, associada aos métodos de ordenação, proporcionam ganho ainda maior em eficiência computacional em conjunto com algoritmo Multifrontal QR que é especializado no tratamento de matrizes esparsas e pode lidar com os grandes volumes de dados associados a SDs.

Dos três métodos apresentados, AMD, Nested Dissection e RCM, o método AMD obteve melhor desempenho em redução de *fill-in* para os sistemas de 34 e 123 barras enquanto que para o sistema de 342 barras o método Nested Dissection apresentou a maior redução. Já no tempo computacional, o método que apresenta o melhor desempenho em todos os sistemas foi o método Nested Dissection. Foram utilizados 3 sistemas de testes com dimensões diferentes e com planos de medição variados, incluindo pseudo-medidas, medidas virtuais e *Smart Meters*, com objetivo de simular diferentes estágios de disponibilidade de informação.

Os resultados apresentados indicam uma melhora significativa porém as técnicas de esparsidade foram aplicadas apenas ao estimador WLS tradicional. Em trabalhos futuros espera-se aplicas essas técnicas em outras formulações específicas da estimação de estado em SDs como, por exemplo, a formulação que representa medidas virtuais com restrições de igualdade através do Lagrangeano. Também espera-se a aplicação das técnicas citadas neste trabalho em sistemas de larga escala, e que podem ter ganhos ainda maiores no quesito armazenamento de dados. Outra possibilidade de pesquisa futura é o estudo de outras formulações de estimadores para sistemas de distribuição, como os baseados em formulações de equivalentes de corrente, e o impacto da ordenação nestas alternativas ao estimador WLS.

REFERÊNCIAS

Almeida, M.C. and Ochoa, L.F. (2017). An improved three-phase amb distributionsystem state estimator. *IEEE Transactions on Power Systems*, 32(2).

Atanackovic, D. and Dabic, V. (2013). Deployment of real-time state estimatorand load flow in bc hydro dms - challenges and opportunities. *IEEE PES General Meeting*.

Chan, W.M. and George, A. (1980). A linear time implementation of the reverse cuthill-mckee algorithm. *BIT Numer. Math.*, 8–14.

Davis, T.A. (2006). *Direct methods for sparse linear systems*. SIAM, Philadelphia, PA.

Davis, T.A., Rajamanickam, S., and Sid-Lakhdar, W.M. (2016). A survey of direct methods for sparse linear systems. *Acta Numerica*, (25), 386–566.

Feng, X., Yang, F., and Peterson, W. (2012). A practical multi-phase distribution state estimation solution incorporating smart meter and sensor data. *IEEE Power and Energy Society General Meeting*, 22–26.

Hebling, G.M., Massignan, J.A.D., London Jr., J.B.A., and Camillo, M.H.M. (2020). Sparse and mumerically stable implementation of a distribution system state estimation based on multifrontal qr factorization. *Power System Computation Conference*.

Kersting, W.H. (2001). *Distribution system modeling and analysis*. CRC Press, Boca Raton, Florida.

Liu, J.W.H. and Sherman, A.H. (1976). Comparative analysis of the cuthill- mckee and the reverse cuthill-mckee ordering algorithms for sparse matri- ces. *SIAM J. Numer. Anal.*, (13(2)), 198–213.

Monticelli, A., Murari, C.A.F., and Wu, F.F. (1985). A hybrid state estimator:solving normal equations by orthogonal transformations. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-104(12), 3460–3468.

Pal, M. et al. (2013). Efficient branch-current-based distribution system stateestimation including synchronized measurements. *IEEE Transactions instrumentation and measurement*, 62(9).

Primadianto, A. and Lu, C. (2017). A review on distribution system state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 32(5).

Simoes-Costa, A. and Quintana, V. (1981). A robust numerical technique for power system state estimation. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-100(2), 691–698.

Thornley, V., N., J., and S., W. (2005). State estimation applied to active distribution networks with minimal measurements. *Power System Computation Conference*.

Vempati, N., Slutsker, I.W., and Tinney, W.F. (1991). Enhancements to givens rotations for power system state estimation. *IEEE Trans. on Power Systems*.

Yannanakis, M. (1981). Computing the minimum fill-in is np-complete. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 77–79.