DOI: 10.48011/asba.v2i1.1262

Projeto de Filtro de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar via Decomposição Espectral de Dados Experimentais

Daiana Caroline dos Santos Gomes *
Ginalber Luiz de Oliveira Serra **

* *Universidade Federal do Maranhão, Av. dos Portugueses, 1966, Bacanga, São Luís, Maranhão, (e-mail: daianagomes159@gmail.com).*
** *Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, São Luís, Maranhão, (e-mail: ginalber@ifma.edu.br)*

Abstract: In this paper, a methodology for design of fuzzy Kalman filter, using interval type-2 fuzzy models (IT2FKF) in the discrete time domain, via spectral decomposition of experimental data, is proposed. The adopted methodology consists in recursive parametric estimation of local state space linear submodels of an interval type-2 fuzzy model of the dynamic system, by means of the Observer/Kalman Filter Identification (OKID) algorithm. The partitioning of the experimental data is performed by interval type-2 Gustafson-Kessel fuzzy (GK) clustering algorithm. The interval Kalman gains in the consequent of the IT2FKF rules, as well as the estimation of the measurement noise covariance, are updated according to the unobservable components resulting from the recursive spectral decomposition of the noisy experimental data. Computational results illustrate the efficiency of the proposed methodology when compared to relevant approaches from the literature.

Resumo: Neste artigo é proposta uma metodologia para o projeto de filtro de Kalman *fuzzy* usando modelos *fuzzy* tipo-2 intervalares (IT2FKF), no domínio do tempo discreto, via decomposição espectral de dados experimentais. A metodologia adotada consiste na estimação paramétrica recursiva dos submodelos lineares locais no espaço de estados de um modelo *fuzzy* tipo-2 intervalar, referente ao sistema dinâmico, por meio do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID). O particionamento dos dados experimentais é realizado pelo algoritmo de agrupamento *fuzzy* Gustafson-Kessel (GK) tipo-2 intervalar. Os ganhos de Kalman intervalares no consequente das regras do IT2FKF, bem como a estimação da covariância do ruído de medição, são atualizados em função das componentes não observáveis resultantes da decomposição espectral recursiva dos dados experimentais ruidosos. Resultados computacionais ilustram a eficiência da metodologia proposta quando comparada a abordagens relevantes da literatura.

Keywords: Systems identification; Interval type-2 fuzzy model; Kalman filter; Spectral analysis; Recursive parametric estimation; Fuzzy systems.

Palavras-chaves: Identificação de sistemas; Modelo *fuzzy* tipo-2 intervalar; Filtro de Kalman; Análise espectral; Estimação paramétrica recursiva; Sistemas *fuzzy*.

1. INTRODUÇÃO

Em ciências e engenharia, é muito comum a solução de problemas de natureza estocástica como predição, separação e detecção de sinais na presença de ruído (Mack and Habets, 2020; Gomez-Garcia et al., 2020). O filtro de Kalman (FK) é a ferramenta matemática mais conhecida e utilizada para estimação estocástica a partir de medições ruidosas. Ele foi proposto em 1960 por Rudolph E. Kalman em seu artigo intitulado *"A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems"*, descrevendo uma solução recursiva para o problema da filtragem linear no domínio do tempo discreto (Kalman, 1960), tornando-se uma abordagem padrão para estimação ótima. Desde sua publicação, o filtro de Kalman foi objeto de extensa pesquisa e aplicações nas áreas de cálculo de órbita, rastreamento de alvos, navegação integrada, posicionamento dinâmico, fusão de dados de sensor, microeconomia, controle, modelagem, processamento digital de imagem, reconhecimento de padrão, segmentação e detecção de borda de imagem, entre outras. Este amplo interesse pelo FK é devido a sua característica de otimalidade, forma conveniente para processamento online em tempo real, fácil formulação e implementação (Serra, 2018).

Uma vez que a maioria dos sistemas práticos são não lineares, a filtragem de Kalman precisou ser adaptada para esta realidade. Uma forma de superar esta limitação é a partir da utilização de sistemas *fuzzy* que, nos últimos anos, vem se destacando em aplicações na área de modelagem

e controle de sistemas dinâmicos devido a sua estrutura baseada em regras capaz de fazer aproximação de funções e tratamento de não linearidades e incertezas (Serra, 2012). Alguns estudos envolvendo a utilização de sistemas *fuzzy* no projeto de filtros de Kalman, já tem sido propostos no intuito de melhorar sua robustez em relação a modelagem de incertezas e perturbações do sistema dinâmico (Pires and Serra, 2019; Eyoh et al., 2018). Recentemente, os sistemas *fuzzy* tipo-2 também tem ganhado destaque em diversas aplicações devido a sua melhor capacidade em lidar com sistemas dinâmicos incertos (Evangelista and Serra, 2019; Mendel, 2019).

A metodologia apresentada neste artigo está baseada no projeto de filtros de Kalman utilizando modelos *fuzzy* tipo-2 intervalares Takagi-Sugeno (IT2FKF) no domínio do tempo discreto. As principais contribuições deste artigo que garantem a originalidade da metodologia proposta são:

- O mecanismo de ajuste dos ganhos de Kalman que compõem a base de regras do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, o qual leva em consideração a decomposição dos dados experimentais, corrompidos por ruído, utilizando análise espectral singular.

- Formulação matemática de uma versão *fuzzy* tipo-2 do algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel.

- Formulação matemática de uma versão *fuzzy* tipo-2 recursiva do algoritmo OKID para estimação paramétrica no consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar.

2. MODELAGEM COMPUTACIONAL DO FILTRO DE KALMAN *FUZZY* TIPO-2 INTERVALAR

Nesta seção, a formulação do problema, bem como da metodologia proposta para a parametrização do IT2FKF baseado em modelo, a partir do processamento dos dados experimentais por análise espectral singular, são apresentadas.

2.1 Formulação do Problema

No contexto de filtragem de Kalman e estimação de estados de sistemas dinâmicos, muitas abordagens propostas na literatura assumem algumas considerações sobre as propriedades estatísticas dos ruídos de medição e processo, o que influencia a eficiência durante o processamento das incertezas inerentes aos dados experimentais ruidosos (Páramo-Carranza et al., 2017; Onat, 2019). Uma vez que o conhecimento sobre essas propriedades é limitado em aplicações práticas, a proposição de metodologias de modelagem adaptativas que não tenham seu desempenho comprometido pela ausência de tais informações no processamento das incertezas inerentes aos dados experimentais ruidosos, é um campo de pesquisa ainda em aberto. Diferentemente das abordagens propostas na literatura, o IT2FKF proposto neste artigo utiliza uma estrutura intervalar adaptativa, baseada na estimação recursiva da covariância do ruído de medição a partir das componentes espectrais residuais extraídas dos dados experimentais ruidosos, de modo a obter uma região de confiança para o sinal filtrado, aumentando assim a sua eficiência diante de variações consideráveis no nível de ruído.

2.2 Pré-Processamento por Análise Espectral Singular

Etapa de Treinamento Seja o conjunto de dados experimentais ruidosos de saída do sistema dinâmico sob análise, com N_b amostras, dado por:

$$\mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_{N_b}]^T \tag{1}$$

A partir dos dados experimentais, uma matriz trajetória $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{\delta\times\rho}$ é definida considerando-se um conjunto de ρ vetores atrasados com dimensão δ, sendo δ um número inteiro definido pelo usuário, com $2 \leq \delta \leq N_b - 1$ e $\rho = N_b - \delta + 1$, dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_\rho \\ y_2 & y_3 & y_4 & \cdots & y_{\rho+1} \\ y_3 & y_4 & y_5 & \cdots & y_{\rho+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_\delta & y_{\delta+1} & y_{\delta+2} & \cdots & y_{N_b} \end{bmatrix} \tag{2}$$

e a matriz de covariância $\mathbf{S}$, é obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T, \qquad \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta} \tag{3}$$

Aplicando-se a decomposição em valores singulares à matriz $\mathbf{S}$, obtém-se um conjunto de autovalores em ordem decrescente tal que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \cdots \geq \sigma_\delta \geq 0$ com seus respectivos autovetores $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_\delta$. Considerando-se $d = max\,\{i,\ \text{tal que}\ \sigma_i > 0\}$ e $\mathbf{V}_i = \mathbf{H}^T\boldsymbol{\phi}_i/\sqrt{\sigma_i}$ com $i = 1, \dots, d$, a decomposição em valores singulares da matriz trajetória $\mathbf{H}$, pode ser reescrita por:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \cdots + \mathbf{H}_d \tag{4}$$

onde a matriz $\mathbf{H}_i$ é elementar, isto é, apresenta *rank* igual a 1, e é dada por:

$$\mathbf{H}_i = \sqrt{\sigma_i}\boldsymbol{\phi}_i\mathbf{V}_i^T \tag{5}$$

O reagrupamento das matrizes $\mathbf{H}_i|^{i=1,\dots,d}$ em ξ termos matriciais linearmente independentes $\mathbf{I}_j|^{j=1,\dots,\xi}$, cujos elementos correspondem às ξ componentes espectrais extraídas, tal que $\xi \leq d$, resulta em:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \ldots + \mathbf{I}_\xi \tag{6}$$

As ξ componentes não-observáveis $\alpha^j|^{j=1,\dots,\xi}$ extraídas dos dados experimentais, resultam do procedimento de média diagonal sobre a matriz $\mathbf{I}_j|^{j=1,\dots,\xi}$, dado por:

$$\alpha_k^j = \begin{cases} \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{k+1} I_{j_{\nu,k-\nu+1}} & 1 \leq k \leq \delta^* \\[2ex] \dfrac{1}{\delta^*}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\delta^*} I_{j_{\nu,k-\nu+1}} & \delta^* \leq k \leq \rho^* \\[2ex] \dfrac{1}{N-k+1}\displaystyle\sum_{\nu=k-\rho^*+1}^{N-\rho^*+1} I_{j_{\nu,k-\nu+1}} & \rho^* < k \leq N_b \end{cases} \tag{7}$$

onde $\delta^* = min(\delta, \rho)$, $\rho^* = max(\delta, \rho)$ e $N_b = \delta + \rho - 1$.

Etapa Recursiva Após a inicialização do algoritmo na etapa de treinamento, os próximos passos serão repetidos para cada instante de tempo k. O valor de ρ é incrementado como segue:

$$\rho = k - \delta + 1 \tag{8}$$

A matriz de covariância será atualizada recursivamente da seguinte forma:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{S}_{k-1} + \boldsymbol{\Upsilon}_k, \qquad \mathbf{S}_k \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta} \tag{9}$$

onde $\boldsymbol{\Upsilon}_k = \boldsymbol{\psi}_k \boldsymbol{\psi}_k^T \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}$ com $\boldsymbol{\psi}_k = [y_\rho, y_{\rho+1}, \ldots, y_k]^T$. Aplicando decomposição em valores singulares em $\mathbf{S}_k$, o conjunto de autovalores com seus respectivos autovetores serão atualizados tal que y_k pode ser reescrito por

$$y_k = h_k^1 + h_k^2 + \cdots + h_k^d \tag{10}$$

onde $h_k^i = \kappa_k^i \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\phi}_k^i$ tal que κ_k^i corresponde ao último elemento do autovetor $\boldsymbol{\phi}_k^i$. Por fim, o reagrupamento dos termos $h_k^i|^{i=1,\ldots,d}$ em ξ termos disjuntos $I_k^j|^{j=1,\ldots,\xi}$, resulta em

$$y_k = I_k^1 + I_k^2 + \ldots + I_k^\xi \tag{11}$$

tal que $I_k^j = \alpha_k^j$, com $j = 1, \ldots, \xi$, representa as amostras das componentes não observáveis extraídas no instante de tempo k.

2.3 Estimação Recursiva da Covariância do Ruído de Medição

Uma vez que as componentes espectrais referentes ao sinal ruidoso foram obtidas, as que possuem menores autovalores associados correspondem a estimação do ruído de medição v. Considerando a covariância inicial de v dada por:

$$R = \mathrm{E}(vv^T) = \frac{1}{N_b}\sum_{j=1}^{N_b} v_j v_j^T \tag{12}$$

onde N_b é o número de amostras inicial usado na etapa de treinamento do IT2FKF. A atualização recursiva da covariância R, nos instantes de tempo $k = N_b + 1, N_b + 2, \ldots$, é dada por:

$$R_k = \frac{k-1}{k} R_{k-1} + \frac{1}{k} v_k v_k^T \tag{13}$$

A partir da estimação de R_k, um fator adaptativo $\mathcal{X}_k$ é proposto para ser usado como fator de ponderação na implementação do mecanismo de atualização recursivo do IT2FKF, como segue:

$$\begin{cases} \mathcal{X}_k = 1 & \text{para } \; R_k < 1 \\ \mathcal{X}_k = R_k^{-1} & \text{para } \; 1 \le R_k \le 1000 \\ \mathcal{X}_k = 1 \times 10^{-3} & \text{para } \; R_k > 1000 \end{cases} \tag{14}$$

2.4 Estimação Paramétrica do Filtro de Kalman Fuzzy tipo-2 Intervalar

A estrutura adotada para o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar aplicado a um sistema dinâmico não linear, incerto e variante no tempo de ordem n, com m entradas e p saídas, apresenta a $i|^{[i=1,2,\ldots,c]}$-ésima regra *fuzzy* dada por:

$$R^{(i)}: \; \text{IF } \mathbf{Z}_k \text{ IS } \widetilde{W}^i$$
$$\text{THEN } \begin{cases} \widetilde{\hat{\mathbf{x}}}_{k+1}^i = \widetilde{\mathbf{A}}_k^i \widetilde{\hat{\mathbf{x}}}_k^i + \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\mathcal{X}}_k \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i \\ \widetilde{\hat{\mathbf{y}}}_k^i = \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\hat{\mathbf{x}}}_k^i + \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \mathbf{u}_k \end{cases} \tag{15}$$

onde $\mathbf{Z}_k$ é a variável linguística do antecedente, $\widetilde{W}^i$ é o conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar, $\widetilde{\hat{\mathbf{x}}}_{k+1}^i \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados intervalar estimado do sistema dinâmico, $\widetilde{\hat{\mathbf{y}}}_k^i \in \mathbb{R}^p$ é o sinal de saída estimado intervalar e $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de entrada. As matrizes $\widetilde{\mathbf{A}}_k^i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_k^i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\widetilde{\mathbf{C}}_k^i \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\widetilde{\mathbf{D}}_k^i \in \mathbb{R}^{p\times m}$ e $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i \in \mathbb{R}^{n\times p}$ são, respectivamente, de estados, entrada, saída, transmissão direta e ganho de Kalman, as quais são os parâmetros que descrevem a dinâmica do sistema dentro de uma região de incerteza. O resíduo $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i$ é definido como $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i = \mathbf{y}_k - \widetilde{\hat{\mathbf{y}}}_k^i$, onde $\mathbf{y}_k$ é a saída real do sistema dinâmico e $\widetilde{\hat{\mathbf{y}}}_k^i$ é a saída intervalar estimada pelo i-ésimo submodelo. A matriz $\boldsymbol{\mathcal{X}}_k$ é um fator adaptativo, proposto neste artigo, que determina o nível de filtragem aplicado sobre o sinal ruidoso de acordo com a intensidade do ruído de medição estimado através da análise espectral singular recursiva.

O modelo *fuzzy* tipo-2 intervalar aproxima o comportamento do sistema dinâmico não linear através da soma ponderada dos submodelos do consequente das regras *fuzzy*, em função do grau de ativação normalizado intervalar $\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) = \left[\underline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k), \overline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)\right]$ da i-ésima regra, como segue:

$$\begin{aligned} \widetilde{\hat{\mathbf{x}}}_{k+1} &= \sum_{i=1}^{c} \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \widetilde{\mathbf{A}}_k^i \widetilde{\hat{\mathbf{x}}}_k + \sum_{i=1}^{c} \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{u}_k \\ &\quad + \sum_{i=1}^{c} \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\mathcal{X}}_k \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i \end{aligned} \tag{16}$$

$$\widetilde{\hat{\mathbf{y}}}_k = \sum_{i=1}^{c} \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\hat{\mathbf{x}}}_k + \sum_{i=1}^{c} \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \mathbf{u}_k \tag{17}$$

onde c é o número de regras do modelo *fuzzy*, tal que:

$$\sum_{i=1}^{c} \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) = 1, \qquad \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \ge 0 \tag{18}$$

Estimação Paramétrica do Antecedente O particionamento dos dados experimentais, de acordo com a metodologia adotada, implicará na definição das regiões de operação e, necessariamente, do número de regras do IT2FKF. Para esta metodologia, foi desenvolvida uma versão *fuzzy* tipo-2 para o algoritmo Gustafson-Kessel, a qual é formulado como segue: seja um conjunto de dados experimentais $\mathbf{Z}$, coletado previamente, de tamanho N_b e a matriz de partição inicial intervalar $\widetilde{\mathbf{U}}^{(0)}$, define-se o número de agrupamentos $1 < c < N_b$; a tolerância $\mathcal{E} > 0$ e o expoente de ponderação intervalar $\widetilde{m} = [\underline{m}, \overline{m}]$, onde $\underline{m}$ e $\overline{m}$ correspondem, respectivamente, ao expoente de ponderação das funções de pertinência superior e inferior do conjunto *fuzzy* tipo-2 $\widetilde{W}^i$.

Repetir para $l = 1, 2, \ldots$

Passo 1 - Cálculo dos centros dos agrupamentos:

$$\widetilde{\mathbf{v}}^{i^{(l)}} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \left(\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)^{i^{(l-1)}}\right)^{\widetilde{m}} \mathbf{Z}_k}{\sum_{k=1}^{N} \left(\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)^{(l-1)}\right)^{\widetilde{m}}}, \quad 1 \le i \le c \tag{19}$$

Passo 2 - Cálculo da matriz de covariância dos agrupamentos:

$$\widetilde{\mathbf{F}}^i = \frac{\sum_{k=1}^{N} \left(\widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k)^{(l-1)}\right)^{\widetilde{m}} \left(\mathbf{Z}_k - \widetilde{\mathbf{v}}^{i^{(l)}}\right)\left(\mathbf{Z}_k - \widetilde{\mathbf{v}}^{i^{(l)}}\right)^T}{\sum_{k=1}^{N} \left(\widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k)^{(l-1)}\right)^{\widetilde{m}}},$$

$$1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq k \leq N_b \tag{20}$$

Passo 3 - Cálculo das distâncias:

$$\widetilde{D}^i_{k\widetilde{\mathbf{F}}^i} = \sqrt{\left(\mathbf{Z}_k - \widetilde{\mathbf{v}}^{i^{(l)}}\right)^T \left[\det\left(\widetilde{\mathbf{F}}^i\right)^{1/n} \left(\widetilde{\mathbf{F}}^i\right)^{-1}\right] \left(\mathbf{Z}_k - \widetilde{\mathbf{v}}^{i^{(l)}}\right)} \tag{21}$$

Passo 4 - Atualização da matriz de partição:
Se $\widetilde{D}^i_{k\widetilde{\mathbf{F}}^i} > 0$ para $1 \leq i \leq c$, $1 \leq k \leq N_b$

$$\widetilde{\mu}^{i^{(l)}}_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k) = \left[\underline{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k), \overline{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k)\right] \tag{22}$$

onde

$$\underline{\mu}^{i^{(l)}}_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k) = \min\left[\frac{1}{\sum_{j=1}^{c}\left(\underline{D}^i_{k\underline{\mathbf{F}}^i}/\underline{D}^i_{k\underline{\mathbf{F}}^i}\right)^{2/(\underline{m}-1)}}, \frac{1}{\sum_{j=1}^{c}\left(\overline{D}^i_{k\overline{\mathbf{F}}^i}/\overline{D}^i_{k\overline{\mathbf{F}}^i}\right)^{2/(\overline{m}-1)}}\right] \tag{23}$$

$$\overline{\mu}^{i^{(l)}}_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k) = \max\left[\frac{1}{\sum_{j=1}^{c}\left(\underline{D}^i_{k\underline{\mathbf{F}}^i}/\underline{D}^i_{k\underline{\mathbf{F}}^i}\right)^{2/(\underline{m}-1)}}, \frac{1}{\sum_{j=1}^{c}\left(\overline{D}^i_{k\overline{\mathbf{F}}^i}/\overline{D}^i_{k\overline{\mathbf{F}}^i}\right)^{2/(\overline{m}-1)}}\right] \tag{24}$$

Senão

$$\widetilde{\mu}^{i^{(l)}}_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k) = [0,\ 0] \text{ com } \underline{\mu}^{i^{(l)}}_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k) \in [0,1] \text{ e } \overline{\mu}^{i^{(l)}}_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k) \in [0,1]$$

Até $\left\|\widetilde{\mathbf{U}}^{(l)} - \widetilde{\mathbf{U}}^{(l-1)}\right\| < \mathcal{E}$

Estimação Paramétrica do Consequente Para a estimação das matrizes que compõe o modelo *fuzzy* intervalar, descrito na Eq. (15), uma versão *fuzzy* tipo-2 do método OKID (*Observer/Kalman Filter Identification*), usando a abordagem local, foi desenvolvida, a qual é formulado como segue. Seja um conjunto de dados experimentais $\mathbf{Z}$ de tamanho N_b, tal que $\mathbf{Z}_k = [\mathbf{u}_k \quad \boldsymbol{\alpha}^*_k]^T$, com $k = 1, \ldots, N_b$, onde $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ corresponde aos dados experimentais de entrada e $\boldsymbol{\alpha}^*_k \in \mathbb{R}^p$ corresponde às componentes espectrais extraídas dos dados experimentais que apresentam maiores autovalores. Defini-se o número de parâmetros de Markov q e executa-se os seguintes passos:

Passo 1 - Cálculo da matriz de regressores $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{[(m+p)q+m]\times N_b}$:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_q & \mathbf{u}_{q+1} & \cdots & \mathbf{u}_{N_b-1} \\ \mathbf{Z}_{q-1} & \mathbf{Z}_q & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-2} \\ \mathbf{Z}_{q-2} & \mathbf{Z}_{q-1} & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_1 & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-q-1} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Passo 2 - Cálculo dos parâmetros de Markov do observador intervalares para o i-ésimo submodelo $\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^i$:

$$\mathbf{y}^T = \sum_{i=1}^{c} \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i \boldsymbol{\Lambda}^T \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^{i^T} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i \mathbf{y}^T = \boldsymbol{\Lambda}\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i \boldsymbol{\Lambda}^T \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^{i^T} \tag{27}$$

Aplicando fatoração QR no termo $\boldsymbol{\Lambda}\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i\boldsymbol{\Lambda}^T$ do lado direito da Eq. (27):

$$\boldsymbol{\Lambda}\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i \mathbf{y}^T = \widetilde{\mathbf{Q}}^i \widetilde{\mathbf{R}}^i \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^{i^T} \tag{28}$$

onde $\widetilde{\mathbf{Q}}^i$ é uma matriz ortogonal, tal que $\left(\widetilde{\mathbf{Q}}^i\right)^{-1} = \left(\widetilde{\mathbf{Q}}^i\right)^T$; $\widetilde{\mathbf{R}}^i$ é uma matriz triangular superior;

$$\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i = \begin{bmatrix} \widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_q) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_{q+1}) & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_{N_b-1}) \end{bmatrix} \tag{29}$$

é a matriz diagonal de ponderação da i-ésima regra obtida a partir do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 GK;

$$\begin{aligned} \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^i &= \left[\widetilde{\mathbf{D}}^i_k \quad \widetilde{\mathbf{C}}^i_k \widetilde{\overline{\mathbf{B}}}^i_k \quad \widetilde{\mathbf{C}}^i_k \widetilde{\overline{\mathbf{A}}}^i_k \widetilde{\overline{\mathbf{B}}}^i_k \quad \cdots \quad \widetilde{\mathbf{C}}^i_k \widetilde{\overline{\mathbf{A}}}^{i^{(q-1)}}_k \widetilde{\overline{\mathbf{B}}}^i_k\right] \\ &= \left[\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}_0 \quad \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}_1 \quad \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}_2 \quad \cdots \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}_q\right] \end{aligned} \tag{30}$$

é o vetor de parâmetros de Markov do observador intervalar da i-ésima regra tal que $\widetilde{\overline{\mathbf{A}}}^i_k = \left[\widetilde{\mathbf{A}}^i_k + \widetilde{\mathbf{K}}^i_k \widetilde{\mathbf{C}}^i_k\right]$ e $\widetilde{\overline{\mathbf{B}}}^i_k = \left[\widetilde{\mathbf{B}}^i_k + \widetilde{\mathbf{K}}^i_k \widetilde{\mathbf{D}}^i_k\ , -\widetilde{\mathbf{K}}^i_k\right]$. Uma vez que a matriz $\widetilde{\mathbf{R}}^i$ é triangular superior, a Eq. (28) é solucionada por substituição retroativa, obtendo-se o vetor de parâmetros de Markov do observador $\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^i$.

Passo 3 - Cálculo dos parâmetros de Markov do sistema e do ganho do observador:

$$\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^i_0 = \widetilde{\mathbf{D}}^i_k \tag{31}$$

$$\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^i_j = \widetilde{\mathbf{C}}^i_k \widetilde{\overline{\mathbf{A}}}^{i^{(j-1)}} \widetilde{\overline{\mathbf{B}}}^i_k \tag{32}$$

$$\begin{aligned} &= \Big[\widetilde{\mathbf{C}}^i_k \left(\widetilde{\mathbf{A}}^i_k + \widetilde{\mathbf{K}}^i_k \widetilde{\mathbf{C}}^i_k\right)^{(j-1)} \left(\widetilde{\mathbf{B}}^i_k + \widetilde{\mathbf{K}}^i_k \widetilde{\mathbf{D}}^i_k\right), \\ &\quad -\widetilde{\mathbf{C}}^i_k \left(\widetilde{\mathbf{A}}^i_k + \widetilde{\mathbf{K}}^i_k \widetilde{\mathbf{C}}^i_k\right)^{(j-1)} \widetilde{\mathbf{K}}^i_k\Big] \end{aligned} \tag{33}$$

$$= \left[\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^{i^{(1)}}_j \ , \ -\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^{i^{(2)}}_j\right], \quad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{34}$$

Os parâmetros de Markov do sistema intervalares são obtidos como segue:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_0^i = \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}_0^i = \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \tag{35}$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^i = \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}_j^{i^{(1)}} - \sum_{\iota=1}^{j} \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}_j^{i^{(2)}} \widetilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^i, \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, q \tag{36}$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^i = -\sum_{\iota=1}^{q} \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}_j^{i^{(2)}} \widetilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^i, \quad \text{para} \quad j = q+1, \ldots, \infty \tag{37}$$

e os parâmetros de Markov do ganho do observador intervalares são obtidos da seguinte forma:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_1^{i^o} = \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}_1^{i^{(2)}} = \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \tag{38}$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}_j^{i^{(2)}} - \sum_{\iota=1}^{j-1} \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}_j^{i^{(2)}} \widetilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^{i^o}, \quad \text{para} \quad j = 2, \ldots, q \tag{39}$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = -\sum_{\iota=1}^{q} \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}_j^{i^{(2)}} \widetilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^{i^o}, \quad \text{para} \quad j = q+1, \ldots, \infty \tag{40}$$

Passo 4 - Construir a matriz de Hankel $\widetilde{\mathbf{H}}^i(j-1) \in \mathbb{R}^{\gamma p \times \beta m}$:

$$\widetilde{\mathbf{H}}^i(j-1) = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{Y}}_j^i & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+1}^i & \ldots & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\beta-1}^i \\ \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+1}^i & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+2}^i & \ldots & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\beta}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma-1}^i & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma}^i & \ldots & \widetilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma+\beta-2}^i \end{bmatrix} \tag{41}$$

onde γ e β são inteiros arbitrários suficientemente grandes definidos pelo especialista.

Passo 5 - Para $j = 1$, decompor $\widetilde{\mathbf{H}}^i(0)$ usando Decomposição em Valores Singulares:

$$\widetilde{\mathbf{H}}^i(0) = \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}^i \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^i \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}^{i^T} \tag{42}$$

onde $\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}^i \in \mathbb{R}^{\alpha p \times \alpha p}$ e $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}^i \in \mathbb{R}^{\beta m \times \beta m}$ são matrizes ortogonais e $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^i \in \mathbb{R}^{\alpha p \times \beta m}$ é a matriz diagonal de valores singulares definida como:

$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^i = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_n^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{43}$$

tal que n é o número de valores singulares significativos e determina a ordem mínima do sistema.

Passo 7 - Cálculo das matrizes de observabilidade $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_\gamma^i$ e controlabilidade $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_\beta^i$:

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_\gamma^i = \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_n^i \left(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_n^i\right)^{1/2} \tag{44}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_\beta^i = \left(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_n^i\right)^{1/2} \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_n^{i^T} \tag{45}$$

onde

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_\gamma^i = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \\ \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{A}}_k^i \\ \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{A}}_k^{i^2} \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{A}}_k^{i^{\gamma-1}} \end{bmatrix} \tag{46}$$

e

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_\beta^i = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{B}}_k^i & \widetilde{\mathbf{A}}_k^i \widetilde{\mathbf{B}}_k^i & \widetilde{\mathbf{A}}_k^{i^2} \widetilde{\mathbf{B}}_k^i & \cdots & \widetilde{\mathbf{A}}_k^{i^{\beta-1}} \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \end{bmatrix} \tag{47}$$

Passo 8 - Cálculo das matrizes que compõe o modelo *fuzzy* tipo-2 intervalar:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_k^i = \left(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_n^i\right)^{-1/2} \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_n^{i^T} \widetilde{\mathbf{H}}_n^i(1) \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_n^i \left(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_n^i\right)^{-1/2} \tag{48}$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}_k^i = \text{primeiras } m \text{ colunas de } \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_\gamma^i \tag{49}$$

$$\widetilde{\mathbf{C}}_k^i = \text{primeiras } p \text{ linhas de } \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_\gamma^i \tag{50}$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}_k^i = \widetilde{\mathbf{Y}}_0^i \tag{51}$$

Passo 9 - Cálculo da matriz de ganho de Kalman:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = -\widetilde{\mathcal{P}}_\beta^i \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \tag{52}$$

$$\widetilde{\mathcal{P}}_\beta^{i^T} \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i \widetilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = -\widetilde{\mathcal{P}}_\beta^{i^T} \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i \widetilde{\mathcal{P}}_\beta^i \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \tag{53}$$

A Eq. (53) é solucionada pelo método de fatoração QR aplicado ao termo $-\mathcal{P}_\beta^{i^T} \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i \mathcal{P}_\beta^i$ para obtenção de $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i$, da mesma forma como executado no **Passo 2**.

Atualização Recursiva do Modelo Fuzzy Tipo-2 Intervalar
Após a estimação inicial do modelo *fuzzy* tipo-2 intervalar, os submodelos no espaço de estados definidos no consequente das regras *fuzzy* serão adaptados recursivamente nos instantes $k = N_b+1, k = N_b+2, \ldots$, a cada nova amostra do conjunto de dados experimentais. Considerando o vetor de regressores no instante de tempo k, dado por:

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{Z}_k \\ \mathbf{Z}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{k-q} \end{bmatrix} \tag{54}$$

A Eq. (27) é atualizada recursivamente como segue:

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{U}}}_k^i \widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^{i^T} = \widetilde{\boldsymbol{\aleph}}_k^i \tag{55}$$

onde

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{U}}}_k^i = \widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{U}}}_{k-1}^i + \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k^T \tag{56}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\aleph}}_k^i = \widetilde{\boldsymbol{\aleph}}_{k-1}^i + \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \mathbf{y}_k^T \tag{57}$$

Aplicando-se o método de fatoração QR em $\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{U}}}_k^i$, os parâmetros de Markov do i-ésimo submodelo são atualizados. O diagrama de blocos da metodologia proposta para o projeto de filtros de Kalman com inferência *fuzzy* tipo-2 intervalar via decomposição espectral de dados experimentais, é mostrado na Figura 1.

3. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção, um exemplo computacional de rastreamento dos estados de um sistema dinâmico não linear com comportamento caótico, em ambiente ruidoso, será apresentado. Para ilustrar a eficiência da metodologia proposta, será realizada uma análise comparativa com um Filtro de Kalman *Fuzzy* baseado na metodologia proposta por (Páramo-Carranza et al., 2017) e largamente citada na literatura, sob o contexto de variação dos níveis de ruído SNR (relação sinal/ruído - do inglês *Signal Noise Ratio*). O

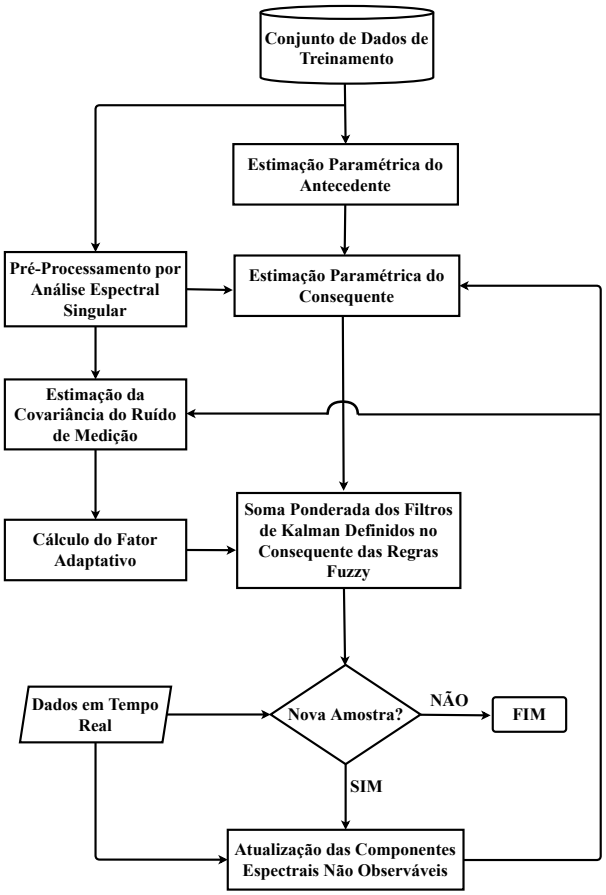

Figura 1. Diagrama de blocos da metodologia proposta.

sistema dinâmico não linear sob análise consiste no atrator caótico de Lorenz, descrito por (Huang et al., 2015):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varrho(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \varpi x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \varkappa x_3 \end{aligned} \tag{58}$$

onde $\varrho = 10$, $\varkappa = 8/3$ e $\varpi = 28$ proporcionam ao sistema não linear um comportamento caótico.

Foi realizada a identificação do sistema dinâmico não linear baseado na estrutura adotada para o IT2FKF conforme Eq. (15). Para tal, um conjunto de dados experimentais foi adquirido, de tamanho $N = 10000$, a um período de amostragem de $T = 1$ ms, onde as primeiras 4000 amostras foram utilizadas para a etapa de treinamento do IT2FKF. Considerando este conjunto inicial de dados, foi realizado o particionamento referente à variável de estado x_1 através do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar GK, considerando a seguinte parametrização: $c = 2$, índice de fuzzificação intervalar $\widetilde{m} = [1.5 \;\; 2]$ e tolerância $\mathcal{E} = 10^{-5}$. Os parâmetros para a estimação do consequente do modelo *fuzzy* foram definidos como $q = 1$, $\gamma = 10$ e $\beta = 10$. A partir da amostra 4001, é iniciada a estimação recursiva do modelo *fuzzy* tipo-2 intervalar, onde os submodelos do consequente são adaptados recursivamente a cada nova amostra do conjunto de dados.

A dinâmica das variáveis de estado do atrator caótico de Lorenz foram corrompidas por ruído e, variando-se o nível de ruído (SNR), foram obtidas as estimativas dos estados usando-se o IT2FKF baseado na metodologia proposta, através dos resultados de 100 realizações. Nesta aplicação, considerou-se a decomposição dos dados ruidosos referentes à variável de estado x_1 em 2 componentes espectrais, e usou-se a componente com maior autovalor associado para realizar a identificação do sistema dinâmico, enquanto a outra componente foi utilizada para realizar a estimação da covariância do ruído de medição v sobre a variável de estado x_1. A fim de demonstrar a eficiência do IT2FKF baseado na metodologia proposta, comparado com o FKF proposto por (Páramo-Carranza et al., 2017), utilizou-se o critério de validação MSE (*Mean Square Error*) como índice de avaliação de desempenho. Os valores de MSE, para diferentes níveis de ruído (SNR), considerando-se o efeito de 100 realizações na estimação das variáveis de estado x_1, x_2 e x_3 são mostrados nas Figuras (2)-(4), respectivamente. Observa-se que, com a metodologia proposta neste artigo, a dinâmica das variáveis de estado do atrator caótico de Lorenz foram rastreadas de forma eficiente, considerando o MSE obtido pelos limites superior e inferior do IT2FKF, apresentando um melhor desempenho quando comparado à metodologia proposta em (Páramo-Carranza et al., 2017), para diferentes níveis de ruído.

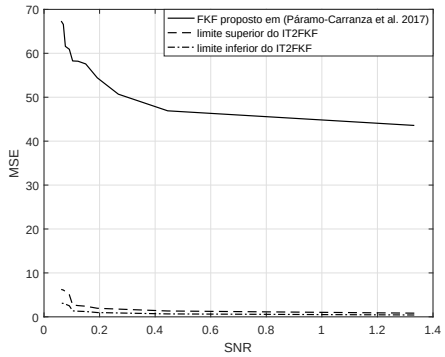

Figura 2. Valores de MSE resultantes do processo de estimação da variável de estado x_1, considerando-se o efeito de 100 realizações.

Considerando-se o caso particular de $SNR = 0.65$, o comportamento referente à variável de estado x_1, do atrator caótico de Lorenz, bem como as componentes espectrais extraídas, são mostrados nas Figuras 5-6.

Uma vez que a componente α^2, mostrada na Figura 6, está mais correlacionada à dinâmica da variável de estado x_1, enquanto que a componente α^1, apresenta um comportamento mais correlacionado ao ruído, a componente α^2 foi utilizada para implementação do IT2FKF proposto, no processo de estimação das variáveis de estado do atrator caótico de Lorenz, enquanto α^1 foi utilizada para a estimação da covariância R_k do ruído de medição v. A partir desta estimação, o fator adaptativo $\boldsymbol{\mathcal{X}}_k$ é definido como segue:

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_k = \begin{bmatrix} R_k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{59}$$

A estimação da covariância do ruído de medição, referente a variável de estado x_1, bem como o fator $\mathcal{X}_{11}$, obtido

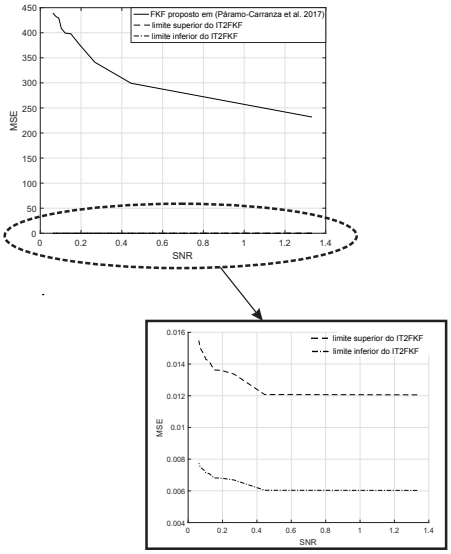

Figura 3. Valores de MSE resultantes do processo de estimação da variável de estado x_2, considerando-se o efeito de 100 realizações.

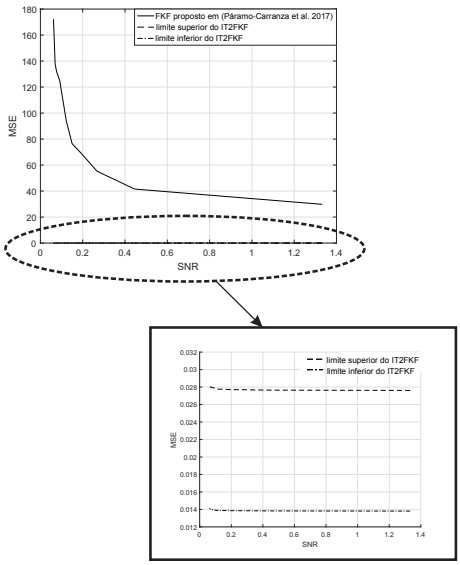

Figura 4. Valores de MSE resultantes do processo de estimação da variável de estado x_3, considerando-se o efeito de 100 realizações.

a partir da covariância estimada, durante as etapas de treinamento e recursiva, são mostrados na Figura 7. A estimação da região de confiança para as variáveis de estado x_1, x_2 e x_3, do atrator caótico de Lorenz, usando-se a metodologia proposta neste artigo, estão ilustradas na Figura 8, enquanto as estimações usando-se a metodologia proposta por (Páramo-Carranza et al., 2017), estão ilustradas na Figura 9. Na Tabela 1 são mostrados os valores de MSE obtidos para cada um dos estados do sistema dinâmico caótico de Lorenz, para o caso de SNR = 0.65, considerando a metodologia proposta e o FKF proposto por (Páramo-Carranza et al., 2017).

Verifica-se, portanto, a eficiência do IT2FKF proposto neste artigo, quando comparado à abordagem proposta por Páramo-Carranza et al. (2017), uma vez que o mesmo

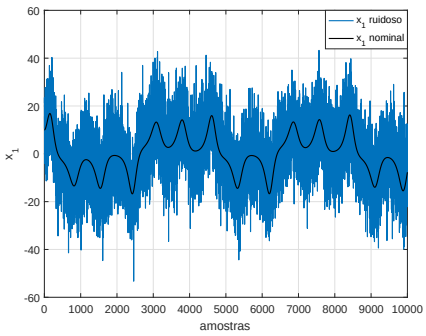

Figura 5. Variável de estado x_1 do atrator caótico de Lorenz corrompida por ruído com $SNR = 0{,}65$.

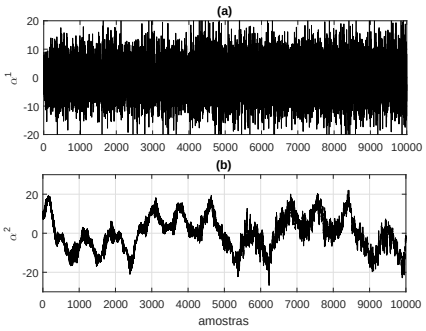

Figura 6. Componentes espectrais extraídas da variável de estado x_1 em ambiente ruidoso com $SNR = 0{,}65$.

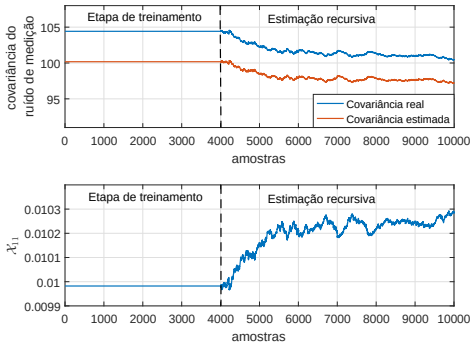

Figura 7. Estimação recursiva da covariância do ruído de medição referente à variável de estado x_1 e elemento $\mathcal{X}_{11}$ do fator adaptativo.

Tabela 1. Análise comparativa entre o IT2FKF baseado na metodologia proposta com o FKF proposto em Páramo-Carranza et al. (2017), considerando o critério MSE.

	MSE_{x_1}	MSE_{x_2}	MSE_{x_3}
FKF	33.7164	173.6338	23.6985
limite superior do IT2FKF	1.6826	0.0145	0.1033
limite inferior do IT2FKF	2.1672	0.1255	0.1571

garante que o sinal nominal referente aos estados do sistema dinâmico estejam dentro de uma região de confiança. Porém, uma possível limitação da metodologia proposta é a determinação de alguns parâmetros (γ, β, q e $\mathbf{Z}$) para a

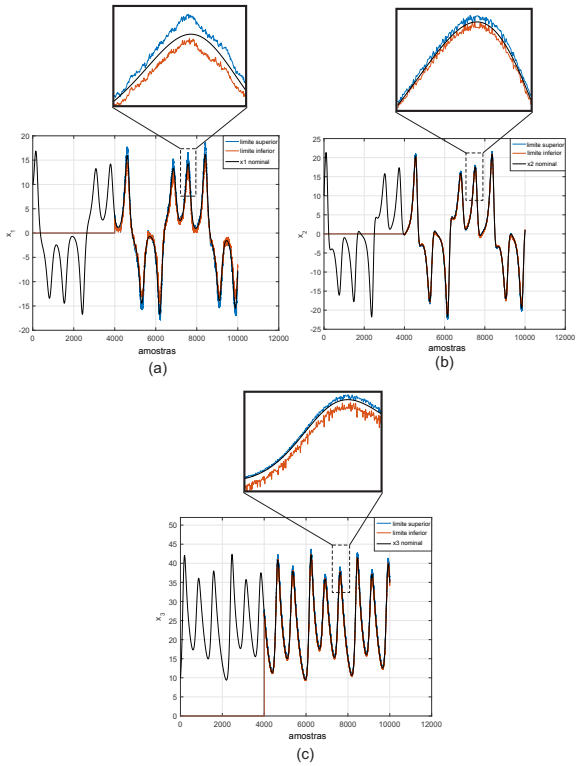

Figura 8. Estimação da região de confiança para as variáveis de estado (a) x_1, (b) x_2 e (c) x_3 pelo IT2FKF, comparadas aos comportamentos nominais das respectivas variáveis, para o caso de SNR = 0.65.

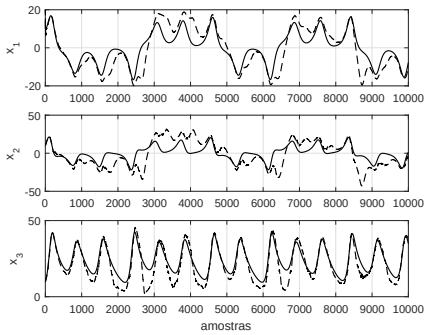

Figura 9. Estimações das variáveis de estado x_1, x_2 e x_3 pelo FKF proposto em Páramo-Carranza et al. (2017) (linha tracejada), comparadas aos comportamentos nominais das respectivas variáveis (linha sólida), para o caso de SNR = 0.65.

estimação paramétrica da proposição do consequente do IT2FKF. A definição destes parâmetros requer alguma intuição do especialista e depende do conjunto de dados experimentais utilizados na parametrização do IT2FKF.

4. CONCLUSÃO

A partir dos resultados obtidos, o IT2FKF mostrou-se eficiente na filtragem e estimação de uma região de confiança para os estados de um sistema dinâmico não linear com comportamento caótico e na estimação recursiva da covariância do ruído de medição. Para fins de trabalhos futuros, a formulação e aplicabilidade desta metodologia no contexto evolutivo é de particular interesse.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro, e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão (PPGEE/UFMA) pelo suporte ao desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

Evangelista, A.P.F. and Serra, G.L.O. (2019). Multivariable state-space recursive identification algorithm based on evolving type-2 neural-fuzzy inference system. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 30(6), 921–942. doi:10.1007/s40313-019-00528-0.

Eyoh, I., John, R., Maere, G.D., and Kayacan, E. (2018). Hybrid learning for interval type-2 intuitionistic fuzzy logic systems as applied to identification and prediction problems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(5), 2672 – 2685.

Gomez-Garcia, R., Yang, L., Munoz-Ferreras, J.M., and Feng, W. (2020). Lossy signal-interference filters and applications. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 68(2), 516–529. doi:10.1109/tmtt.2019.2953585.

Huang, Y., Zhang, P., and Zhao, W. (2015). Novel grid multiwing butterfly chaotic attractors and their circuit design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 62(5), 496–500. doi:10.1109/tcsii.2014.2385274.

Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transaction of the ASME*, 82.

Mack, W. and Habets, E.A.P. (2020). Deep filtering: Signal extraction and reconstruction using complex time-frequency filters. *IEEE Signal Processing Letters*, 27, 61–65. doi:10.1109/lsp.2019.2955818.

Mendel, J.M. (2019). Comparing the performance potentials of interval and general type-2 rule-based fuzzy systems in terms of sculpting the state space. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 27(1), 58–71. doi:10.1109/tfuzz.2018.2856184.

Onat, A. (2019). A novel and computationally efficient joint unscented kalman filtering scheme for parameter estimation of a class of nonlinear systems. *IEEE Access*, 7, 31634–31655. doi:10.1109/access.2019.2902368.

Páramo-Carranza, L.A., Meda-Campaña, J.A., de Jesús Rubio, J., Tapia-Herrera, R., Curtidor-López, A.V., Grande-Meza, A., and Cázares-Ramírez, I. (2017). Discrete-time kalman filter for takagi–sugeno fuzzy models. *Evolving Systems*, 8(3), 211–219. doi:10.1007/s12530-017-9181-0.

Pires, D.S. and Serra, G.L.O. (2019). Methodology for evolving fuzzy kalman filter identification. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17(3), 793–800.

Serra, G.L.O. (ed.) (2012). *Frontiers in Advanced Control Systems*. Intech.

Serra, G.L.O. (ed.) (2018). *Kalman Filters - Theory for Advanced Applications*. InTech. doi:10.5772/intechopen.68249.