DOI: 10.48011/asba.v2i1.1278

Controle por Aproximação de Modelo Utilizando Realimentação de Saída por Meio de LMIs Iterativas ⋆

Andressa M. Souza, * **Ricardo C. L. F. Oliveira** *
Pedro L. D. Peres *

* *Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP Av. Albert Einstein, 400, 13083-852, Campinas, SP, Brasil (e-mail: {andressa,ricfow,peres}@dt.fee.unicamp.br).*

Abstract: This paper addresses the problem of model match control for uncertain linear continuous-time systems by means of fixed order dynamic output-feedback. The synthesis conditions use the $\mathcal{H}_2$ norm as performance metric for the approximation error and are formulated in terms of LMIs, which are solved iteratively. The novelty of the approach with respect to the literature is that the control gains, as well as the matrices of the reference model, appear linearly in the conditions, allowing the immediate treatment of structured controllers and providing some degrees of freedom for the reference model, in the sense that some of the entries of the matrices can be determined by the synthesis conditions and do not need to be fixed a *priori*. The results are illustrated by examples based on models borrowed from the literature.

Resumo: Este artigo aborda o problema de controle por aproximação de modelo para sistemas lineares incertos contínuos no tempo por meio de realimentação dinâmica de saída de ordem fixa. As condições de síntese utilizam a norma $\mathcal{H}_2$ como métrica de desempenho para o erro de aproximação e são formuladas em termos de LMIs, que são resolvidas iterativamente. A novidade da abordagem em relação à literatura é que tanto os ganhos do controlador, quanto as matrizes do modelo de referência, aparecem linearmente nas condições, permitindo que controladores estruturados possam ser tratados de forma imediata e que o modelo de referência possa apresentar alguns graus de liberdade, no sentido de permitir que algumas entradas das matrizes sejam determinadas pela condição de síntese e não fixas a *priori*. Os resultados são ilustrados por exemplos baseados em modelos retirados da literatura.

Keywords: Model match control; Dynamic output-feedback; Polytopic uncertainties; Linear matrix inequalities; Continuous-time systems

Palavras-chaves: Controle por aproximação de modelo; Realimentação dinâmica de saída; Incertezas politópicas; Desigualdades matriciais lineares; Sistemas contínuos no tempo

1. INTRODUÇÃO

O controle clássico para sistemas lineares invariantes no tempo utiliza especificações de projeto tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo, como margem de ganho e fase, frequência de corte, tempo de subida, máxima sobrelevação, tempo de estabelecimento, erro em regime, todas relacionadas às respostas transitória e de regime permanente (Ogata, 1990). Esses critérios de desempenho em geral podem ser levados em conta de forma satisfatória em termos de robustez pelas técnicas tradicionais de controle caso os modelos não possuam parâmetros incertos. Por outro lado, o tratamento de modelos incertos com certificados de estabilidade e desempenho é uma área em que os métodos desenvolvidos a partir da teoria de Lyapunov são protagonistas. Nesse contexto destaca-se a formulação das condições de análise e projeto em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs), que podem ser solucionadas por algoritmos eficientes de programação semidefinida (Boyd et al., 1994).

Embora as técnicas baseadas em LMIs também possuam outros atrativos, como a possibilidade de projetar controladores capazes de minimizar a influência de distúrbios, por exemplo, utilizando as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ (Gahinet and Apkarian, 1994), as mesmas apresentam uma certa dificuldade de tratar alguns critérios de desempenho especificados no domínio do tempo, como máxima sobrelevação e erro em regime. Abordagens baseadas em alocação de polos podem ser úteis em alguns casos, mas uma técnica de projeto que ganhou destaque no tratamento de critérios de desempenho no domínio do tempo é conhecida como controle por aproximação de modelo (em inglês, *model match control*). A característica principal da técnica é que os critérios de desempenho são especificados por um *mo-*

⋆ O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e CNPq.

delo de referência (Paraskevopoulos and King, 1978), que possui todas as características desejadas para o sistema a ser controlado. Assim, a estratégia de projeto busca determinar um controlador de forma que a diferença entre o modelo de referência e o sistema controlado seja a menor possível, segundo alguma métrica.

Os primeiros estudos relacionados ao problema por aproximação de modelo originaram-se na década de 1950 na busca por um controlador adaptativo que garantisse robustez diante de incertezas do modelo. Mas é em Parks (1966) que surge um procedimento de projeto capaz de fornecer garantias de estabilidade do sistema em malha fechada obtido pela técnica de aproximação de modelo utilizando a teoria de Lyapunov. Particularmente no contexto de projeto por aproximação de modelos utilizando LMIs, destacam-se as contribuições de Pellanda and Apkarian (2003); Coutinho et al. (2009); Rodrigues et al. (2009); Godinho et al. (2012); Bachur et al. (2011); Gonçalves et al. (2011); Kučera and Toledo (2014); Kučera (2015, 2017).

Neste trabalho é proposta uma nova técnica de projeto por aproximação de modelo para sistemas lineares contínuos no tempo com parâmetros incertos na forma politópica. O sistema incerto é controlado por realimentação dinâmica de saída de ordem fixa, e utiliza-se a norma $\mathcal{H}_2$ como métrica de avaliação da diferença entre o sistema controlado e o sistema de referência. As condições de projeto são formuladas em termos de LMIs e o ganho de controle é computado por meio de um algoritmo iterativo inspirado nos trabalhos de Felipe (2017); Spagolla (2019); Lemaire (2019). A principal novidade em relação às técnicas existentes é que tanto os ganhos de controle quanto o modelo de referência aparecem linearmente nas condições de projeto. Essa flexibilidade permite, por exemplo, a imposição de estruturas particulares para os ganhos de controle (como descentralização) e graus de liberdade para o modelo de referência. Ou, então, algumas entradas das matrizes podem ser variáveis de otimização restritas a intervalos, permitindo que a condição de síntese determine qual é o melhor valor dentro da faixa de modo que o erro de aproximação seja o menor possível. Os resultados são ilustrados por meio de alguns exemplos numéricos retirados da literatura.

Notação: O espaço das matrizes reais de dimensões $n \times m$ é representado por $\mathbb{R}^{n\times m}$. M' denota o transposto da matriz M. Uma matriz M definida positiva é representada por $M \succ 0$ e a soma da matriz M com a sua transporta é denotada $\mathrm{He}(M) = M + M'$. O símbolo $\star$ indica um bloco induzido por simetria em uma matriz quadrada.

2. PRELIMINARES

Considere o sistema linear incerto a tempo contínuo

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x} = A(\alpha)x + B_u(\alpha)u + B_w(\alpha)w \\ z = C_z(\alpha)x + D_{zu}(\alpha)u + D_{zw}(\alpha)w \\ y = C_y(\alpha)x + D_{yw}(\alpha)w \end{cases} \tag{1}$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, representam respectivamente os estados do sistema, a entrada de controle, uma entrada externa, a saída controlada e a saída medida. As matrizes do sistema possuem as dimensões $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, $B_u(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x\times n_u}$, $B_w(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x\times n_w}$, $C_z(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z\times n_x}$, $C_y(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y\times n_x}$, $D_{zu}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z\times n_u}$, $D_{zw}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z\times n_w}$, $D_{yw} \in \mathbb{R}^{n_y\times n_w}$ e estrutura politópica, isto é, são descritas pela combinação convexa de N vértices conhecidos na forma

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i M_i, \quad \alpha \in \Lambda_N$$

sendo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)'$ o vetor de parâmetros incertos que pertence ao simplex unitário

$$\Lambda_N \triangleq \left\{\zeta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \zeta_i = 1,\, \zeta_i \geq 0\right\}$$

O problema a ser investigado é o projeto de uma lei de controle por realimentação dinâmica de saída de ordem fixa $n_c \geq 0$, com o controlador dado na forma

$$\mathcal{G}_c : \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y \end{cases}$$

com $A_c \in \mathbb{R}^{n_c\times n_c}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_c\times n_y}$, $C_c \in \mathbb{R}^{n_u\times n_c}$ e $D_c \in \mathbb{R}^{n_u\times n_y}$, tal que o sistema em malha fechada dado por

$$\mathcal{G}_{cl} : \begin{cases} \dot{x}_{cl} = A_{cl}(\alpha)x_{cl} + B_{cl}(\alpha)w \\ z = C_{cl}(\alpha)x_{cl} + D_{cl}(\alpha)w \end{cases} \tag{2}$$

com

$$\begin{aligned} x_{cl} &= \begin{bmatrix} x' & x_c' \end{bmatrix}', \\ A_{cl}(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) + B_u(\alpha)D_cC_y(\alpha) & B_u(\alpha)C_c \\ B_cC_y(\alpha) & A_c \end{bmatrix}, \\ B_{cl}(\alpha) &= \begin{bmatrix} B_u(\alpha)D_cD_{yw}(\alpha) + B_w(\alpha) \\ B_cD_{yw}(\alpha) \end{bmatrix}, \\ C_{cl}(\alpha) &= \begin{bmatrix} C_z(\alpha) + D_{zu}(\alpha)D_cC_y(\alpha) & D_{zu}(\alpha)C_c \end{bmatrix}, \\ D_{cl}(\alpha) &= \begin{bmatrix} D_{zu}(\alpha)D_cD_{yw}(\alpha) + D_{zw}(\alpha) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

seja estável, com comportamento o mais próximo possível do modelo de referência de ordem n_r expresso na forma

$$\mathcal{G}_r : \begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + B_r w \\ z_r = C_r x_r + D_r w \end{cases} \tag{3}$$

em que $A_r \in \mathbb{R}^{n_r\times n_r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{n_r\times n_w}$, $C_r \in \mathbb{R}^{n_z\times n_r}$ e $D_r \in \mathbb{R}^{n_z\times n_w}$. Para quantificar a diferença entre o sistema em malha fechada (2) e o sistema de referência (3), cria-se um sinal de erro $e = z - z_r$, cuja dinâmica é dada por

$$\mathcal{G}_e : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{cl} \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha) & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}}_{A_e(\alpha)} \begin{bmatrix} x_{cl} \\ x_r \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{cl}(\alpha) \\ B_r \end{bmatrix}}_{B_e(\alpha)} w \\ e = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{cl}(\alpha) & -C_r \end{bmatrix}}_{C_e(\alpha)} \begin{bmatrix} x_{cl} \\ x_r \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{cl}(\alpha) - D_r \end{bmatrix}}_{D_e(\alpha)} w \end{cases}$$

O problema estabelecido é conhecido na literatura como controle por aproximação de modelo.

O projeto dos ganhos do controlador de modo que alguma métrica, por exemplo, uma norma associada ao sistema $\mathcal{G}_e$ seja otimizada é um problema de difícil solução, pois trata-se de um problema de realimentação dinâmica de saída de ordem fixa, com o agravante de que as matrizes do sistema são incertas. Abordagens que têm apresentado bons resultados nesse contexto são métodos iterativos baseados em programação semidefinida, com testes numéricos formulados em termos de LMIs.

Na próxima seção é apresentado um procedimento de síntese para o controlador $\mathcal{G}_c$ de forma que um limitante

para a norma $\mathcal{H}_2$ da dinâmica $\mathcal{G}_e$ seja minimizado. Para garantir que a norma seja finita, assume-se que $D_{zw}(\alpha) = D_{yw}(\alpha) = D_r = 0$.

O lema apresentado a seguir é importante para a construção dos resultados propostos neste artigo (de Oliveira and Skelton, 2001).

Lema *1.* (Lema de Finsler) Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com posto$(\mathcal{B}) < n$ e $\mathcal{B}^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}$ (isto é, $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$). As seguintes condições são equivalentes

i. $w'\mathcal{Q}w < 0,\ \forall\ w \neq 0 : \mathcal{B}w = 0,$

ii. $\mathcal{B}^{\perp'}\mathcal{Q}\mathcal{B}^\perp \prec 0,$

iii. $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{Q} - \mu\mathcal{B}'\mathcal{B} \prec 0,$

iv. $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n\times m} : \mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' \prec 0.$

3. CONDIÇÕES DE PROJETO

A síntese do controlador $\mathcal{G}_c$ por realimentação dinâmica de saída de ordem fixa para o sistema $\mathcal{G}_e$ é realizada por meio das LMIs dependentes de parâmetros propostas pelo teorema apresentado a seguir, que é uma condição suficiente para a determinação de um limitante superior (custo garantido) para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema $\mathcal{G}_e$.

Teorema *1.* Sejam $B_1(\alpha)$, $B_2(\alpha)$, $B_3(\alpha)$ e $B_4(\alpha)$ matrizes incertas no parâmetro α com coeficientes conhecidos, e um escalar μ dado. Se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)' \succ 0$, $M(\alpha) = M(\alpha)'$, $X_i(\alpha)$, $i = 1,\ldots,6$, A_c, B_c, C_c e D_c de dimensões apropriadas tais que

$$\mu^2 > \text{traço}(M(\alpha)) \tag{4}$$

$$\mathcal{Q}_g(\alpha) + \text{He}\left(\mathcal{X}_g(\alpha)\mathcal{B}_g(\alpha)\right) \prec 0 \tag{5}$$

$$\mathcal{Q}_c(\alpha) + \text{He}\left(\mathcal{X}_c(\alpha)\mathcal{B}_c(\alpha)\right) \prec 0 \tag{6}$$

com

$$\mathcal{B}_g(\alpha) = [B_1(\alpha)\ B_2(\alpha)\ B_3(\alpha)\ B_4(\alpha)],$$

$$\mathcal{X}_g(\alpha) = \left[X_1(\alpha)'\ X_2(\alpha)'\ X_3(\alpha)'\ X_4(\alpha)'\right]',$$

$$\mathcal{Q}_g(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star \\ P(\alpha) & 0 & \star & \star \\ C_e(\alpha) & 0 & -I & \star \\ A_e(\alpha) & -I & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_c(\alpha) = \begin{bmatrix} -M(\alpha) & \star \\ 0 & P(\alpha) \end{bmatrix},\quad \begin{matrix} \mathcal{B}_c(\alpha) = [B_e(\alpha)\ -I] \\ \mathcal{X}_c(\alpha) = \begin{bmatrix} X_5(\alpha) \\ X_6(\alpha) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

então A_c, B_c, C_c e D_c são as matrizes do controlador por realimentação dinâmica de saída $\mathcal{G}_c$ que estabiliza o sistema $\mathcal{G}_e$ com μ como custo garantido $\mathcal{H}_2$.

Prova: Inicialmente note que a factibilidade de (5) garante que He $(X_4(\alpha)B_4(\alpha)) \prec 0$. Consequentemente, tanto $X_4(\alpha)$ quanto $B_4(\alpha)$ têm posto completo. Como a desigualdade (5) está na forma *iv.* do Lema de Finsler, tem-se a condição equivalente

$$\mathcal{B}_g(\alpha)^{\perp'}\mathcal{Q}_g(\alpha)\mathcal{B}_g(\alpha)^\perp \prec 0,$$

com

$$\mathcal{B}_g(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & (-B_4(\alpha)^{-1}B_1(\alpha))' \\ 0 & I & 0 & (-B_4(\alpha)^{-1}B_2(\alpha))' \\ 0 & 0 & I & (-B_4(\alpha)^{-1}B_3(\alpha))' \end{bmatrix}',$$

que novamente pode ser reescrita na forma *iv.* do Lema de Finsler, isto é,

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}\left(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)\right) \prec 0 \tag{7}$$

com

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ P(\alpha) & 0 & \star \\ C_e(\alpha) & 0 & -I \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = [A_e(\alpha)\ -I\ 0] \tag{9}$$

$$\mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} (-B_4(\alpha)^{-1}B_1(\alpha))' \\ (-B_4(\alpha)^{-1}B_2(\alpha))' \\ (-B_4(\alpha)^{-1}B_3(\alpha))' \end{bmatrix} \tag{10}$$

Adotando

$$\mathcal{B}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_e(\alpha) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

e aplicando novamente o Lema de Finsler em (7), tem-se a seguinte condição

$$\begin{bmatrix} A_e(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A_e(\alpha) & \star \\ C_e(\alpha) & -I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{11}$$

que pode ser reconhecida como uma extensão, em termos de LMI dependente de parâmetros, do *gramiano de observabilidade* (Boyd et al., 1994) associado ao sistema $\mathcal{G}_e$. Computando uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}_c(\alpha)$ definido no Teorema 1, por exemplo,

$$\mathcal{B}_c(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} I \\ B_e(\alpha) \end{bmatrix}$$

tem-se, pelo Lema de Finsler, que (6) é equivalente a $\mathcal{B}_c(\alpha)^{\perp'}\mathcal{Q}_c(\alpha)\mathcal{B}_c(\alpha)^\perp \prec 0$, que fornece

$$M(\alpha) \succ B_e(\alpha)'P(\alpha)B_e(\alpha)$$

Essa última desigualdade, juntamente com (11) e (4), garantem que μ é um custo garantido $\mathcal{H}_2$ para o sistema $\mathcal{G}_e$. □

A principal novidade das condições de projeto do Teorema 1 é que todas as matrizes dinâmicas do sistema $\mathcal{G}_e$ e, consequentemente, todas as matrizes do sistema $\mathcal{G}$ e do controlador $\mathcal{G}_c$, aparecem de forma afim nas desigualdades. O primeiro benefício dessa estrutura é que os ganhos do controlador podem ser tratados como variáveis de otimização do problema, e não recuperadas a *posteriori* por meio de mudanças de variáveis. Nota-se que o uso de mudanças de variáveis é o paradigma vigente na literatura para a síntese de controladores dinâmicos por realimentação de saída (Scherer et al., 1997), o que em geral dificulta a formulação do problema em termos de LMIs sem a imposição de restrições de estrutura nas variáveis de otimização (potenciais fontes de conservadorismo) ou restrições nas matrizes do sistema, por exemplo, algumas matrizes não poderem ser incertas. Além disso, se os ganhos do controlador são variáveis do problema, restrições estruturais, como decentralização, podem ser levadas em conta sem nenhum conservadorismo adicional. A segunda vantagem do fato das matrizes de $\mathcal{G}_e$ aparecerem de forma afim na desigualdade de síntese é que as matrizes do modelo de referência também não multiplicam nenhuma outra variável e, como consequência, alguns dos elementos dessas matrizes poderiam ser considerados como variáveis, fornecendo um grau extra de liberdade na escolha do modelo de referência. Por exemplo, alguns parâmetros poderiam ser especificados por faixas. Assim, o problema de otimização determinaria o melhor valor dentro da faixa para o qual o controlador é capaz de fornecer a menor "distância" (considerando o critério $\mathcal{H}_2$) em relação ao sistema controlado.

Como contraponto das interessantes vantagens oferecidas pelo Teorema 1, nota-se que são necessárias algumas matrizes de inicialização para que o problema seja linear nas variáveis de decisão, isto é, formulado em termos de LMIs dependentes de parâmetros. Como em princípio não existe uma regra geral para a escolha das matrizes $B_i(\alpha)$ de modo a produzir soluções factíveis, espera-se que os resultados sejam conservadores. Contudo, o problema da inicialização pode ser contornado por meio de algumas técnicas propostas em Felipe et al. (2016); Felipe (2017) e mais recentemente em Spagolla (2019); Lemaire (2019). Embora similar, neste artigo é proposta uma estratégia diferente dos algoritmos iterativos dos trabalhos citados quando há um custo associado, como limitantes para as normas $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$.

O primeiro passo para encontrar as matrizes $B_i(\alpha)$ necessárias para a inicialização do Teorema 1 é o projeto de um controlador $\mathcal{G}_c$ estabilizante, isto é, que apenas estabiliza a matriz dinâmica $A_e(\alpha)$. Nessa etapa utiliza-se uma condição de projeto proposta em Felipe (2017), como apresenta o próximo teorema.

Teorema *2.* Seja $\mathcal{B}_s(\alpha)$ uma matriz incerta no parâmetro α e com coeficientes conhecidos. Se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)' \succ 0$, $X_i(\alpha)$, $i = 1,2,3$, A_c, B_c, C_c e D_c de dimensões apropriadas tais que

$$\mathcal{Q}_s(\alpha) + \mathrm{He}\left(\mathcal{X}_s(\alpha)\mathcal{B}_s(\alpha)\right) \prec 0 \tag{12}$$

com

$$\mathcal{Q}_s(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ P(\alpha) & 0 & \star \\ A_e(\alpha) & -I & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{X}_s(\alpha) = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix}$$

então A_c, B_c, C_c e D_c são as matrizes do controlador por realimentação dinâmica de saída $\mathcal{G}_c$ que estabiliza o sistema $\mathcal{G}_e$.

Como provado em Felipe (2017), a escolha $\mathcal{B}_s(\alpha) = [I \ I \ -I]$ garante que as condições do Teorema 2 sempre fornecem uma solução factível se a matriz $A_e(\alpha)$ for substituída por $A_e(\alpha) - rI$, sendo r um escalar real a ser determinado. Caso $r \leq 0$, o controlador é estabilizante, pois os autovalores de $A_e(\alpha)$ estão no semiplano esquerdo do plano complexo. Caso $r > 0$, as matrizes $X_i(\alpha)$ podem ser utilizadas como uma nova condição inicial $\mathcal{B}_s(\alpha)$, isto é, $\mathcal{B}_s(\alpha) = [X_1(\alpha)' \ X_2(\alpha)' \ X_3(\alpha)']$, com a garantia de que o próximo valor de r é menor ou igual ao r anterior. Para mais detalhes sobre a implementação do algoritmo iterativo baseado no Teorema 2, com r minimizado a cada iteração, recomenda-se a leitura da dissertação de Felipe (2017). Como contribuição deste trabalho, o próximo teorema fornece uma condição inicial ligeiramente diferente para o Teorema 2.

Teorema *3.* A escolha

$$\mathcal{B}_s(\alpha) = [I \ \varphi I \ \ -I], \varphi \in \mathbb{R}^+ \tag{13}$$

garante que a condição (12) testada com

$$A_e(\alpha) = A_e(\alpha) - rI, r \in \mathbb{R}^+ \tag{14}$$

sempre fornece uma solução factível para um valor de r suficientemente grande.

Prova: Substituindo as escolhas dadas em (13) e (14), e fixando $\mathcal{X}_s(\alpha) = -r/2\mathcal{B}_s(\alpha)'$ na desigualdade (12), tem-se

$$\begin{bmatrix} -rI & \star & \star \\ P(\alpha) - r\varphi I & -r\varphi^2 I & \star \\ A_e(\alpha) & (r\varphi - 1)I & -rI \end{bmatrix} \prec 0$$

Escolhendo $P(\alpha) = r\varphi I$ e aplicando um complemento de Schur, tem-se

$$-rI - \begin{bmatrix} A_e(\alpha)' \\ (r\varphi - 1)I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -r^{-1}I & 0 \\ 0 & -r^{-1}\varphi^{-2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_e(\alpha)' \\ (r\varphi - 1)I \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\Rightarrow -rI + r^{-1}A_e(\alpha)A_e(\alpha)' + \varphi^{-2}r^{-1}(\varphi r - 1)^2 I \prec 0$$

Multiplicando a desigualdade por $0{,}5\varphi r > 0$, obtém-se

$$rI \succ 0{,}5\varphi A_e(\alpha)A_e(\alpha)' + (1/2\varphi)I$$

que sempre pode ser satisfeita para um r suficientemente grande. □

A condição inicial $B_s(\alpha)$ e a relaxação r introduzida pelo Teorema 3 garantem que as condições do Teorema 2 sempre fornecem soluções em termos de um valor finito para r. Note que a existência de solução independe da escolha de $\varphi \in \mathbb{R}^+$.

Uma vez que um controlador estabilizante $\mathcal{G}_c$ está disponível, o próximo passo é produzir uma condição inicial para o Teorema 1, de modo que o mesmo garantidamente forneça um controlador estabilizante associado a um custo garantido $\mathcal{H}_2$. Neste ponto, a estratégia proposta neste trabalho diferencia-se das técnicas utilizadas em Felipe (2017); Spagolla (2019); Lemaire (2019). O teorema apresentado a seguir computa um custo garantido para o sistema $\mathcal{G}_e$ e, como subproduto, fornece condições iniciais para o Teorema 1.

Teorema *4.* Seja $\mathcal{G}_c$ um controlador estabilizante conhecido para $\mathcal{G}_e$ e $\mu > 0$ um escalar dado. Se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)' \succ 0$, $X_i(\alpha)$, $i = 1,2,3$, de dimensões apropriadas tais que (4), (6) e (7) são verificadas com

$$\mathcal{X}(\alpha) = \left[X_1(\alpha)' \ X_2(\alpha)' \ X_3(\alpha)'\right]'$$

e $\mathcal{Q}(\alpha)$ e $\mathcal{B}(\alpha)$ dadas em (8) e (9) respectivamente, então μ é um custo garantido para o sistema $\mathcal{G}_e$.

A prova do Teorema 4 não é apresentada pois trata-se de uma condição conhecida para o cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_2$ para sistemas lineares incertos contínuos no tempo (Oliveira and Peres, 2008). Como $\mathcal{G}_e$ é estável, as condições do Teorema 4 sempre produzem uma solução factível, fornecendo um custo garantido dado por μ e, mais importante, o conjunto de variáveis $X_i(\alpha)$, $i = 1,2,3$. Note que as escolhas

$$\begin{aligned} &B_1(\alpha) = X_1(\alpha)', B_2(\alpha) = X_2(\alpha)', \\ &B_3(\alpha) = X_3(\alpha)', B_4(\alpha) = -I \end{aligned} \tag{15}$$

podem ser utilizadas para inicializar a variável $\mathcal{X}(\alpha)$ dada em (10). A condição (7), assegurada por uma solução factível do Teorema 4, é equivalente a (5), garantindo que o Teorema 1 inicializado com as escolhas dadas em (15) fornece uma solução factível para um valor de μ no mínimo igual ao valor de μ calculado pelo Teorema 4, podendo ser menor, pois as matrizes do controlador voltam a ser variáveis do problema.

Resumindo a discussão apresentada até este ponto, sempre que um controlador estabilizante está disponível, é possível construir uma solução factível para o Teorema 1, que fornece um novo controlador estabilizante e um custo garantido $\mathcal{H}_2$ associado. Além disso, as variáveis $X_i(\alpha)$,

$i = 1, \ldots, 4$ podem ser utilizadas para construir uma nova condição inicial, e assim sucessivamente, com garantia de não crescimento para μ, como prova o próximo teorema.

Teorema 5. Sejam $\bar{\mu}$, $\bar{\mathcal{X}}_g(\alpha)$ e $\bar{\mathcal{Q}}_g(\alpha)$ soluções do Teorema 1 para uma determinada matriz de inicialização $\bar{\mathcal{B}}_g(\alpha)$. A escolha $\mathcal{B}_g(\alpha) = \bar{\mathcal{X}}_g(\alpha)'$ em um novo teste das condições do Teorema 1 garante solução para $\mu \leq \bar{\mu}$.

Prova: Como (4), (6) e

$$\bar{\mathcal{Q}}_g(\alpha) + \mathrm{He}\left(\bar{\mathcal{X}}_g(\alpha)\bar{\mathcal{B}}_g(\alpha)\right) \prec 0$$

estão satisfeitas com $\bar{\mu}$, um novo teste

$$\mathcal{Q}_g(\alpha) + \mathrm{He}\left(\mathcal{X}_g(\alpha)\bar{\mathcal{X}}_g(\alpha)'\right) \prec 0$$

está automaticamente satisfeito com $\mathcal{Q}_g(\alpha) = \bar{\mathcal{Q}}_g(\alpha)$ e $\mu \leq \bar{\mu}$ pois $\mathcal{X}_g(\alpha) = \bar{\mathcal{B}}_g(\alpha)'$ é uma solução válida. □

O Algoritmo 1 é o resultado de todas as propriedades e condições de análise e síntese apresentadas neste trabalho. Como entrada, devem ser fornecidos o número máximo de iterações it_{max} e a inicialização para a etapa de estabilização. O valor de φ deve ser dado e a matriz dinâmica $A_e(\alpha)$ é alterada para contemplar o fator de relaxação r. O algoritmo permanece na fase 1 até que um controlador estabilizante seja encontrado e $k < it_{max}$. Se um controlador for encontrado, r é removido do problema e, na linha 9, as condições do Teorema 4 são testadas, de modo a produzir a condição inicial $\mathcal{B}_g(\alpha)$ (de acordo com (15)) para o Teorema 1. Nesse ponto o algoritmo passa para a fase 2, em que é produzida uma sequência de custos μ_k por meio das condições do Teorema 1 até que o número máximo de iterações seja atingido ou o decrescimento de μ entre uma iteração e outra esteja dentro de uma certa tolerância ϵ especificada a *priori*. Caso o algoritmo seja encerrado durante a fase 2, o procedimento fornecerá um ganho estabilizante para o sistema em malha fechada e um custo garantido para a dinâmica do erro de aproximação.

Se um controlador estabilizante estiver disponível, a fase 1 do algoritmo pode ser simplificada. Nesse caso apenas as linhas 7–11 precisam ser executadas, e logo em seguida passa-se para a fase 2. Esse procedimento pode ser útil quando as condições do Teorema 2 falham, mas outra condição de síntese da literatura encontra um controlador estabilizante.

Como comentário final sobre o Algoritmo 1, note que a fase 1 procura por um controlador estabilizante por meio da matriz dinâmica modificada $A_e(\alpha) - rI$, alocando os autovalores à esquerda do semiplano centrado em r a cada iteração. Em termos práticos, esse procedimento tende a produzir controladores dinâmicos ($n_c > 0$) com estruturas particulares, em geral com as matrizes B_c e C_c nulas e a matriz A_c diagonal. Embora isso não seja um problema para o problema de estabilização, a estrutura determinada na fase 1 tende a se manter nas fases subsequentes, podendo gerar soluções conservadoras em termos da norma $\mathcal{H}_2$. Para evitar a ocorrência dessas estruturas particulares, é proposta a aplicação da seguinte transformação de similaridade nas matrizes de $\mathcal{G}_{cl}$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{cl} \\ \bar{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ T & -I_{n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cl} \\ x_r \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0_{n_c \times (n-n_c)} \end{bmatrix}$$

Essa transformação cria um acoplamento entre os estados do sistema controlado e os estados do sistema de referência ($Tx_{cl} - x_r$), impedindo que as escolhas triviais mencionadas anteriormente sejam suficientes para estabilizar a matriz $A_e(\alpha)$ transformada. Note que não se observa a ocorrência das estruturas mencionadas em controladores estáticos.

Algoritmo 1

1: **Inicialização:** $it_{max}, \mathcal{B}_s(\alpha) \leftarrow [I \ \varphi I \ -I]$, $\varphi > 0$ $k \leftarrow 0$, fase $\leftarrow 1$, $A_e(\alpha) \leftarrow (A_e(\alpha) - rI)$
2: **Enquanto** $k < it_{max}$ **Resolva**
3: $k \leftarrow k + 1$;
4: **Se** fase $= 1$ **Então**
5: **Resolva** $\min r$ s. a $P(\alpha) \succ 0$ e (12)
6: **Se** $r \leq 0$ **Então**
7: $\mathcal{G}_c \leftarrow (A_c, B_c, C_c, D_c)$;
8: $r \leftarrow 0$;
9: **Resolva** $\min \mu$ s. a $P(\alpha) \succ 0$, (4), (6) e (7)
10: inicialize $\mathcal{B}_g(\alpha)$ de acordo com (15)
11: fase $\leftarrow 2$;
12: **Senão**
13: $\mathcal{B}_s(\alpha) \leftarrow \mathcal{X}_s(\alpha)'$;
14: **Fim Se**
15: **Senão Se** fase $= 2$ **Então**
16: **Resolva** $\min \mu$ s. a $P(\alpha) \succ 0$ e (4)–(6)
17: $\mu_k \leftarrow \mu$;
18: **Se** $|\mu_k - \mu_{k-1}| < \epsilon$ **Então**
19: abandone;
20: **Fim Se**
21: $\mathcal{B}_g(\alpha) \leftarrow \mathcal{X}_g(\alpha)'$;
22: **Fim Se**
23: **Fim Enquanto**
24: **Se** fase $= 2$ **Então Retorna** (A_c, B_c, C_c, D_c, μ_k)
25: **Fim Se**

4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

As condições de análise e projeto apresentadas nos teoremas foram formuladas em termos de LMIs dependentes de parâmetros, que em geral só podem resolvidas por meio de aproximações. Como tem-se tornado rotina na literatura de controle de sistemas incertos, aproximações polinomiais de grau arbitrário são o método de solução mais eficiente e usual, com amplo amparo teórico (Bliman et al., 2006; Oliveira and Peres, 2007), de programação (Agulhari et al., 2019) e numérico (Sturm, 1999; Andersen and Andersen, 2000) disponíveis atualmente. Para os exemplos numéricos apresentados na próxima seção, aproximações polinomiais de grau um foram utilizadas para as variáveis de otimização em todas as condições. As implementações foram feitas utilizando o *parser* de LMIs robustas ROLMIP (Agulhari et al., 2019), que trabalha em conjunto com o *parser* YALMIP (Löfberg, 2004) e solucionadas com resolvedor de programação semidefinida Mosek (Andersen and Andersen, 2000). O Algoritmo 1 foi testado com $it_{max} = 25$ e $\epsilon = 10^{-3}$. As variáveis de folga $X_i(\alpha)$ nos Teoremas 1, 2 e 4 foram consideradas com estruturas simétricas devido aos bons resultados numéricos obtidos. Estruturas como diagonal, arbitrária e até mesmo nula poderiam ser utilizadas, fornecendo resultados diferentes. O parâmetro de inicialização φ serve como uma maneira de produzir soluções diferentes para a fase 1, e consequentemente para a fase 2. Os seguintes valores foram testados nos experimentos $\varphi \in \{0.0001, 0.001, 0.01, 0.1\}$. Os experimentos foram realizados em um PC com as seguintes configurações: Core

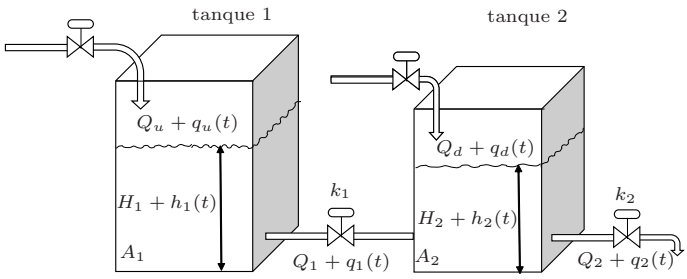

Figura 1. Sistema de tanques interligados.

i3-2328M, 2.20 GHz, 4 GB de RAM, Windows 7 Home Premium (32bits) e Matlab versão 2015b(win32).

5. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

5.1 Exemplo 1

Considere o problema de controle de nível de dois tanques interligados proposto em Bachur et al. (2011) e reproduzido na Figura 1.

Conforme sugerido em Bachur et al. (2011), os pontos de operação, representados por letras maiúsculas, são dados por: $Q_u = Q_1 = 0{,}4\ m^3/s$, $Q_d = 0{,}1\ m^3/s$, $Q_2 = 0{,}5\ m^3/s$, $H_1 = 2\ m$ e $H_2 = 1\ m$.

O sinal de controle da vazão de entrada no tanque 1 é dado por $u = q_u$. O vetor de variáveis exógenas é dado por $w = [w_1\ w_2\ w_3]'$ (sinal de referência, w_1, distúrbio da segunda vazão de entrada no tanque 2, $w_2 = q_d$, e ruído de medição, w_3). O vetor de estados é definido por $x = [h_1\ h_2\ \nu]'$, sendo h_i o nível do tanque i e ν uma variável associada à ação de controle integral dada por $\nu = \int(w_1 - h_2 - w_3)dt$. A saída controlada é dada por z e y é a saída medida do sistema associada a h_2. A representação linear da dinâmica é dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{A_1} & \frac{k_1}{A_1} & 0 \\ \frac{k_1}{A_2} & -\frac{k_1+k_2}{A_2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} w$$

$$z = [0\ 1\ 0]\, x, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

As áreas transversais dos tanques são $A_1 = 10\ m^2$ e $A_2 = 5\ m^2$. Os coeficientes de vazão nos dutos são considerados incertos na forma $0{,}15 \le k_1 \le 0{,}25$ e $0{,}2 \le k_2 \le 0{,}3$. Na aplicação do método proposto as matrizes D_{zu} e D_{yw} do modelo de Bachur et al. (2011) são consideradas iguais a zero.

O objetivo é projetar um controlador dinâmico de saída, voltado para as influências do sinal de referência w_1 sobre a saída z, sem levar em consideração os efeitos das entradas w_2 e w_3, de forma que o comportamento do sistema em malha fechada se aproxime do modelo de referência definido pela função de transferência

$$G_r(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{16}$$

com $0{,}7 \le \xi \le 0{,}9$ e $\omega_n = 0{,}05\ rad/s$. Note que a possibilidade de considerar faixas para os parâmetros é uma flexibilidade importante da abordagem proposta.

Tabela 1. Resultados do Algoritmo 1 (A1) e do método dos dois estágios (2Est) proposto em Agulhari et al. (2010) para o Exemplo 1.

método	n_c	φ	ξ	μ	it_{total}	$s./it$
2Est	2	100	0,8827	0,1620	22	2,34
A1	2	0,001	0,8827	0,0218	14	3,26
2Est	1	10	0,8827	0,3332	22	3,29
A1	1	0,001	0,8827	0,0229	10	3,14
2Est	0	100	0,8827	0,3332	22	4,54
A1	0	0,001	0,8827	0,0447	12	2,68

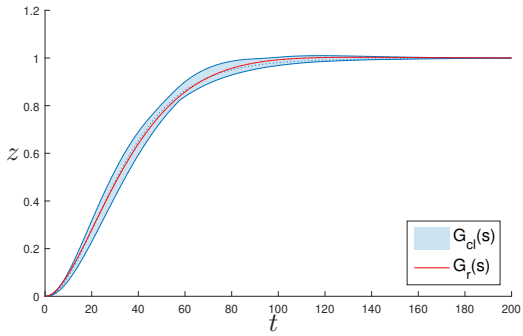

Figura 2. Resposta ao degrau do sistema de dois tanques controlado $\mathcal{G}_{cl}$ (considerando toda a faixa incerta) com $n_c = 2$ e do sistema de referência.

A aplicação do Algoritmo 1 produz os seguintes resultados (ganhos dos controladores truncados com 4 casas decimais):

- $n_c = 0$,
$$D_c = [-3{,}2079\ 0{,}0756]$$
- $n_c = 1$,
$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} -1{,}2778 & -1{,}4017 & 0{,}1597 \\ \hline -6{,}2884 & -7{,}8141 & 0{,}8174 \end{array}\right]$$
- $n_c = 2$,
$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0{,}2971 & 10{,}4400 & -11{,}2479 & 0{,}1494 \\ -1{,}2228 & -14{,}7705 & 13{,}3498 & -0{,}0136 \\ \hline 0{,}6346 & 74{,}4611 & -77{,}2426 & 0{,}7777 \end{array}\right]$$

Os custos garantidos $\mathcal{H}_2$, os valores de ξ (determinados para $n_c = 2$) e a complexidade computacional são informados na Tabela 1, juntamente com os resultados da abordagem de realimentação de saída de Agulhari et al. (2010) adaptada para tratar o problema de controle por aproximação de modelo. A técnica, em dois estágios, utiliza o Teorema 1 e Corolário 5 para primeiro e segundo estágios, respectivamente. Foram testados 13 valores para o escalar do primeiro estágio (informados em termos de φ na tabela). O valor de ξ foi escolhido pela técnica proposta neste trabalho, uma vez que o método dos dois estágios não é capaz de tratar modelo de referência com variáveis de otimização. A resposta ao degrau do sistema em malha fechada para toda a faixa de incerteza juntamente com a resposta do sistema de referência para o valor de ξ determinado pela condição de síntese são mostradas na Figura 2. Como pode ser percebido, o controlador consegue garantir uma faixa de resposta que contém a resposta do modelo de referência.

Como um experimento adicional para esta planta, é projetado um controlador descentralizado, de modo que os

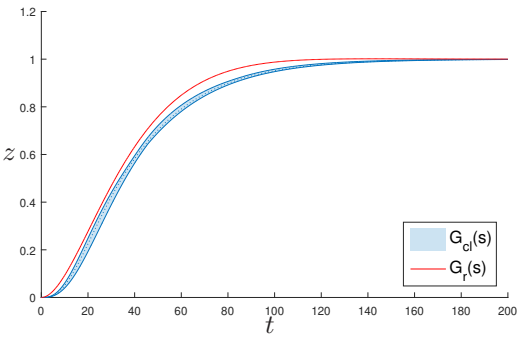

Figura 3. Resposta ao degrau do sistema de dois tanques controlado $\mathcal{G}_{cl}$ (considerando toda a faixa incerta) e do sistema de referência para o controlador descentralizado de ordem $n_c = 2$.

efeitos das entradas na saída sejam independentes. Essa restrição pode ser levada em conta de modo imediato pela abordagem proposta apenas impondo a estrutura desejada nas matrizes do controlador. Foram necessárias 11 iterações com um esforço computacional médio de 9,12 s/it para obter o seguinte controlador descentralizado:

- $n_c = 2$, $\mu = 0{,}0277$, $\xi = 0{,}8999$:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0{,}2615 & 0 & -0{,}7038 & 0 \\ 0 & -0{,}2607 & 0 & 0{,}0045 \\ \hline -2{,}2387 & -0{,}8259 & -10{,}2292 & 0{,}1204 \end{array}\right]$$

A Figura 3 apresenta a resposta ao degrau do sistema em malha fechada para toda a faixa de incerteza juntamente com a resposta do sistema de referência ($\xi = 0{,}8999$).

5.2 Exemplo 2

Considere o modelo do helicóptero VTOL proposto em Keel et al. (1988) com a representação de estados linearizada dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0{,}0366 & 0{,}0271 & 0{,}0188 & -0{,}4555 & 0 \\ 0{,}0482 & -1{,}0100 & 0{,}0024 & -4{,}0208 & 0 \\ 0{,}1002 & a_{32} & -0{,}7070 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$+ \begin{bmatrix} 0{,}4422 & 0{,}1761 \\ 3{,}5446 & -7{,}5922 \\ -5{,}5200 & 4{,}4900 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

$$z = [0\ 1\ 0\ 0\ 0]\, x, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

em que os parâmetros incertos são estruturados na forma

$$a_{32} = 0{,}3681 \pm 0{,}0920$$
$$a_{34} = 1{,}4200 \pm 0{,}3550$$

levando a uma representação politópica de $N = 4$ vértices. O objetivo é sintetizar uma lei de controle por realimentação dinâmica de saída de forma que o comportamento do sistema controlado se aproxime do modelo de referência dado em (16) com $0{,}5 \leq \xi \leq 3$, $\omega_n = 0{,}5$ rad/s. Aplicando o Algoritmo 1 obtêm-se os seguintes controladores de ordens $n_c \in \{0{,}1{,}2\}$ (truncados com 4 dígitos decimais):

- $n_c = 0$,

Tabela 2. Resultados do Algoritmo 1 (A1) e do método dos dois estágios (2Est) proposto em Agulhari et al. (2010) para o Exemplo 2.

método	n_c	φ	ξ	μ	it_{total}	s./it
2Est	2	1	1,5763	0,3226	20	5,74
A1	2	0,0001	1,5763	0,0251	25	5,98
2Est	1	1	1,5763	0,3789	20	4,52
A1	1	0,0001	1,5763	0,0917	13	5,04
2Est	0	1	1,5763	0,3822	20	3,45
A1	0	0,0001	1,5763	0,1599	25	4,23

$$D_c = \begin{bmatrix} 0{,}1208 & -0{,}0416 \\ 3{,}0003 & -0{,}7133 \end{bmatrix}$$

- $n_c = 1$,

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} -0{,}1020 & 1{,}8607 & -0{,}3289 \\ \hline -0{,}0136 & 0{,}1008 & -0{,}0389 \\ 0{,}6202 & 3{,}4733 & -0{,}6029 \end{array}\right]$$

- $n_c = 2$,

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0{,}4462 & -1{,}8746 & 0{,}9359 & 0{,}5752 \\ 2{,}6409 & -6{,}9471 & -2{,}9700 & -0{,}0578 \\ \hline -0{,}4075 & 0{,}9830 & 0{,}4311 & 0{,}0231 \\ -0{,}2975 & -0{,}7418 & 3{,}8006 & -0{,}2726 \end{array}\right]$$

Os custos garantidos $\mathcal{H}_2$ associados bem como informações sobre o esforço computacional são mostrados na Tabela 2. Para fins de comparação, os resultados obtidos com o método de Agulhari et al. (2010) também são apresentados (a mesma implementação descrita no Exemplo 1 foi utilizada). A Figura 4 mostra a resposta ao degrau do sistema em malha fechada para toda a faixa de incerteza, sendo a linha destacada em vermelho a resposta do sistema de referência, mostrando uma boa aproximação do modelo de referência.

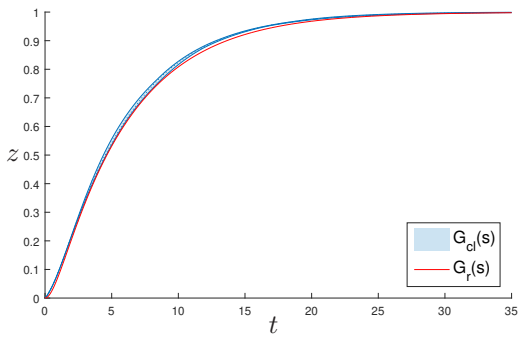

Figura 4. Resposta ao degrau do sistema VTOL controlado $\mathcal{G}_{cl}$ (considerando toda a faixa incerta) com $n_c = 2$ e do sistema de referência.

6. CONCLUSÃO

Novas condições de controle por aproximação de modelo utilizando um algoritmo iterativo baseado em LMIs foram propostas neste artigo. A novidade da abordagem é o fato de as matrizes do sistema, do controlador e do modelo de referência aparecerem linearmente nas condições de síntese. Essa característica confere algumas facilidades interessantes, como por exemplo, atribuir um certo grau de liberdade ao modelo de referência, e impor estruturas no controlador, como descentralização. Exemplos numéricos

retirados da literatura ilustram a eficácia da técnica e as vantagens quando comparada a uma outra abordagem.

REFERÊNCIAS

C. M. Agulhari, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Static output feedback control of polytopic systems using polynomial Lyapunov functions. In *Proc. 49th IEEE Conf. Decision Control*, pages 6894–6901, 2010.

C. M. Agulhari, A. Felipe, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 45(3):36:1–36:25, August 2019. `http://rolmip.github.io`.

E. D. Andersen and K. D. Andersen. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang, editors, *High Performance Optimization*, volume 33 of *Applied Optimization*, pages 197–232. Springer US, 2000. `http://www.mosek.com`.

W. E. G. Bachur, E. N. Gonçalves, V. J. S. Leite, and R. M. Palhares. Multiobjective robust discrete dynamic output-feeback control synthesis based on closed-loop reference model. In *Proc. 2011 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, pages 632–637, Denver, CO, USA, 2011.

P.-A. Bliman, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Existence of homogeneous polynomial solutions for parameter-dependent linear matrix inequalities with parameters in the simplex. In *Proc. 45th IEEE Conf. Decision Control*, pages 1486–1491, San Diego, CA, USA, December 2006.

S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.

D. F. Coutinho, L. F. A. Pereira, and T. Yoneyama. Robust $\mathcal{H}_2$ model matching from frequency domain specifications. *IET Control Theory & Appl.*, 3(8):1119–1131, 2009.

M. C. de Oliveira and R. E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 241–257. Springer-Verlag, New York, NY, 2001.

A. Felipe. Um algoritmo de busca local baseado em LMIs para computar ganhos de realimentação estabilizantes diretamente como variáveis de otimização. Diss. Mestrado, FEEC – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, 2017.

A. Felipe, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. An iterative LMI based procedure for robust stabilization of continuous-time polytopic systems. In *Proc. 2016 Amer. Control Conf.*, pages 3826–3831, Boston, MA, USA, July 2016.

P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 4(4):421–448, July-August 1994.

D. A. Godinho, E. N. Gonçalves, V. J. S. Leite, and R. M. Palhares. Síntese de pré-filtro discreto: Formulação LMI para aproximação de modelo $\mathcal{H}_\infty$. In *XIX CBA*, pages 756–761, Campina Grande, PB, Brasil, Setembro 2012.

E. N. Gonçalves, W. E. G. Bachur, R. M. Palhares, and R. H. C. Takahashi. Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty/$ reference model dynamic output-feedback control synthesis. *Int. J. Control*, 84(12):2067–2080, 2011.

L. Keel, S. P. Bhattacharyya, and J. W. Howze. Robust control with structured perturbations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 33(1):68–78, 1988.

V. Kučera. Model matching by non-regular static state feedback. In *Proc. 2015 Amer. Control Conf.*, pages 3528–3533, Chicago, IL, USA, July 2015.

V. Kučera. Model matching by dynamic state feedback. In *Proc. 20th IFAC World Congr.*, pages 3045–3050, Toulouse, France, July 2017.

V. Kučera and E. C. Toledo. A review of stable exact model matching by state feedback. In *Proc. 22nd Medit. Conf. Control Aut. (MED2015)*, pages 85–90, Palermo, Italy, June 2014.

A. A. Lemaire. Métodos iterativos baseados em desigualdades matriciais lineares para controle de sistemas lineares incertos positivos contínuos no tempo. Diss. Mestrado, FEEC – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, Agosto 2019.

J. Löfberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, pages 284–289, Taipei, Taiwan, September 2004. `http://yalmip.github.io`.

K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1990.

R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(7):1334–1340, July 2007.

R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. A convex optimization procedure to compute $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norms for uncertain linear systems in polytopic domains. *Optim. Control Appl. Meth.*, 29(4):295–312, July/August 2008.

P. N. Paraskevopoulos and R. E. King. Multivariable process-controller design by approximate model-matching. *IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, IECI-25(1):50–54, 1978.

P. Parks. Liapunov redesign of model reference adaptive control systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 11(3): 362–367, 1966.

P. C. Pellanda and P. Apkarian. Synthesis of controllers for modal shaping in linear parameter-varying systems via the implicit model following formulation. In *Proc. 2003 Amer. Control Conf.*, volume 6, pages 5161–5166, Denver, CO, USA, June 2003.

L. A. Rodrigues, E. N. Gonçalves, V. J. S. Leite, and R. M. Palhares. Robust reference model control with LMI formulation. In *Proc. IASTED Int. Conf. Control Appl.*, pages 127–132, Cambridge, UK, 2009.

C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Trans. Autom. Control*, 42(7):896–911, July 1997.

A. Spagolla. Análise de estabilidade e síntese de controle para sistemas lineares positivos discretos no tempo por meio de desigualdades matriciais lineares. Diss. Mestrado, FEEC– Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, Março 2019.

J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optim. Method Softw.*, 11(1–4):625–653, 1999. `http://sedumi.ie.lehigh.edu/`.