

Análise de erros para alinhamento em AHRS: Algoritmos QUEST e SAAM^{*}

Lucas Pimenta Silva Paiva^{*}
Fidelis Marcio Santos Rabelo de Melo Júnior^{*}
Rogério Menezes Filho^{*} Leonardo Alves Vieira^{*}
Felipe Oliveira e Silva^{*}

^{*} *Departamento de Automática, Universidade Federal de Lavras, MG,
(e-mails: paiva.lucasps@gmail.com, fjunyn@gmail.com,
rogeriofilho03@gmail.com, laviera1992@hotmail.com,
felipe.oliveira@ufla.br).*

Abstract: The alignment is a phase that precedes the navigation stage and is responsible for determining the orientation of the vehicle. However, low grade inertial sensors are not recommended to perform the alignment process. Therefore, some authors propose the integration of magnetometers with inertial sensors, which use observations of the terrestrial magnetic field density vector in the alignment. These integrated systems are often known as Attitude and Heading Reference Systems (AHRS). This article investigates the error analysis of two algorithms for AHRS alignment, namely the QUaternion ESTimator (QUEST) and the Super Fast Attitude for Accelerometer and Magnetometer (SAAM). It is noticed in the literature that most of the studies that evaluate the errors of alignment algorithms are limited to numerical results, not analytical ones. In this sense, this work has as main contribution, the analytical determination of the residual errors originated in the coordinate transformation matrix (normality, orthogonality and alignment errors) and in the respective Euler angles. Simulated and experimental results are presented, corroborating the proposed error analysis, and evidencing the performance, main advantages and disadvantages of using the QUEST and SAAM algorithm.

Resumo: O alinhamento é uma fase que antecede a etapa de navegação, e é responsável pela determinação da orientação do veículo. Contudo, sensores inerciais de baixa qualidade não são recomendados para realizar o processo de alinhamento. Diante disso, alguns autores propõem a utilização de magnetômetros integrados aos sensores inerciais, os quais medem o vetor de densidade do campo magnético terrestre no alinhamento. Estes sistemas integrados são frequentemente conhecidos como Sistemas de Referência de Orientação e Rumo (AHRS). Este artigo investiga a análise de erros de dois algoritmos para alinhamento em AHRS, a saber, o ESTimador de QUaternion (QUEST) e o Algoritmo de Atitude Super Rápido para Acelerômetros e Magnetômetros (SAAM). Percebe-se, na literatura, que a maioria dos trabalhos que avaliam os erros de algoritmos de alinhamento se limitam a resultados numéricos, e não analíticos. Nesse sentido, este trabalho tem como principal contribuição, a determinação analítica dos erros residuais originados na matriz de transformação de coordenadas (erros de normalidade, ortogonalidade e alinhamento) e nos respectivos ângulos de Euler. Resultados simulados e experimentais são apresentados, corroborando com a análise de erros proposta, e evidenciando o desempenho, principais vantagens e desvantagens da utilização dos algoritmos QUEST e SAAM.

Keywords: Navigation System; Alignment; AHRS; QUEST; SAAM.

Palavras-chaves: Sistema de Navegação; Alinhamento; AHRS; QUEST; SAAM.

1. INTRODUÇÃO

Um Sistema de Navegação Inercial (INS) é definido como um dispositivo capaz de fornecer posição, velocidade e orientação de um corpo, em um determinado sistema de coordenadas. Ele é, em geral, composto por uma Unidade

de Medição Inercial (IMU) e um computador de bordo, responsável pela execução dos algoritmos embarcados. As IMUs, por sua vez, são compostas por um conjunto de acelerômetros e girômetros, capazes de medir variáveis tais como aceleração de força específica e taxa angular do corpo em movimento (Groves, 2013). A posição, velocidade e orientação do corpo são frutos da integração numérica das forças específicas e taxas angulares, medidas em instantes específicos de amostragem (Silva, 2016). A configuração INS supracitada adquiriu relevância por volta dos anos

^{*} Esta pesquisa é financiada pela CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior)(processo Nº 88881.169927/2018-01), Embrapa (processo Nº 212-20/2018) e Universidade Federal de Lavras (UFLA).

60, sendo chamada de mecanização solidária, ou então, Sistema de Navegação Inercial Solidário (SINS), no qual os sensores estão firmemente montados no veículo (Titterton and Weston, 2004).

O processo de navegação requer uma inicialização prévia, mais conhecida como alinhamento, e que consiste na estimação da orientação inicial do corpo com relação a uma referência conhecida (Silva, 2016). Os ângulos de Euler, matrizes de rotação e *quaternions* são as parâmetrizações mais utilizadas para representar a orientação de um corpo. Ignorar o processo de inicialização pode desencadear erros inaceitáveis, resultando em grande perda de desempenho do SINS (Farrell, 2008). Na maior parte dos casos, o alinhamento é realizado em estado estacionário, devido às condições particulares do veículo (Groves, 2013). Quando o próprio SINS do veículo estima sua orientação em estado estacionário, dá-se o nome de auto-alinhamento (Britting, 1971) *apud* (Silva, 2016). O auto-alinhamento é conduzido em duas fases, o auto-alinhamento grosseiro (CA) e o auto-alinhamento fino (FA). A fase de auto-alinhamento grosseiro, como o próprio nome sugere, determina a orientação aproximada do veículo, por meio de transformações analíticas bastante diretas (Groves, 2013). As limitações deste método consistem em se considerar o sistema perfeitamente estacionário, os sensores não corrompidos e as informações externas (altitude, modelo gravitacional etc.) precisamente conhecidas (Groves, 2013).

A despeito do CA ou FA, Gade (2016) afirma que é necessário uma entrada de referência para qualquer uma das etapas do alinhamento. Em casos estacionários, a orientação é definida através da observação de grandezas físicas existentes no globo terrestre, como a gravidade local e a taxa de rotação terrestre (Hu et al., 2004). Contudo, girômetros de baixo custo apresentam limitações para determinar a taxa de rotação da Terra, devido à sua pequena magnitude (Hu et al., 2004). Diante disso, as medições de um magnetômetro podem ser muito úteis para se estimar e corrigir os erros em um SINS contendo sensores de baixa qualidade. Na maior parte destas fusões sensoriais, os acelerômetros são usados para correção dos ângulos de rolamento e arfagem, enquanto magnetômetros são utilizados para corrigir o ângulo de guinada, todos derivados dos girômetros (Li and Wang, 2013). IMUs que incorporam magnetômetros em sua estrutura, são frequentemente conhecidos como Sistemas de Referência de Orientação e Rumo (AHRS).

Atualmente, encontram-se disponíveis na literatura diversos métodos que buscam resolver o problema de alinhamento em AHRS (Wu et al., 2018; Yun et al., 2008). De forma generalizada, todos eles se baseiam na observação do campo magnético terrestre, via magnetômetros (Stirling et al., 2005; Yun et al., 2008; Wu et al., 2018). O algoritmo QUEST (ESTimador de QUaternion) foi proposto por Shuster e Oh (1981), como uma solução ótima ao famoso problema de Wahba Shuster and Oh (1981). O Algoritmo de Atitude Super Rápido para Acelerômetros e Magnetômetros (SAAM) também se baseia nesta mesma premissa, no entanto este algoritmo foi proposto a fim de possuir uma forma mais simples de *quaternion* obtendo um sistema com menor gasto de energia, com equações com melhor relação custo-tempo, além de uma solução simples (Wu et al., 2018).

Este artigo, por sua vez, tem como objetivo apresentar o modelo e análise de erros dos algoritmos QUEST e SAAM, aplicados ao alinhamento em AHRS bem como seus resultados. Como principal contribuição deste trabalho, destaca-se a derivação analítica de expressões para os erros, uma vez que, na maioria dos trabalhos disponíveis na literatura, esses erros são apenas analisados e comparados via resultados numéricos.

O restante deste trabalho é organizado da seguinte forma: na Seção 2, são apresentados os conceitos de AHRS e alinhamento. Na Seção 3, são descritos os algoritmos QUEST e SAAM. Na Seção 4, é apresentada a análise de erros proposta e na Seção 5, a discussão dos resultados. Por fim, na Seção 6, encontram-se as conclusões deste trabalho.

2. ALINHAMENTO

2.1 Algoritmo Estimador de Quaternion (QUEST)

O Algoritmo QUEST, apresentado nesta seção, tem a intenção de determinar a orientação do AHRS através das leituras de acelerômetros e magnetômetros. Outras derivações deste método podem ser encontradas nos trabalhos de Crassidis et al. (2007) e Bar-Itzhack (1996). O algoritmo QUEST é capaz de fornecer uma resposta ótima e rápida, mesmo com recursos computacionais reduzidos (Kuga and Carrara, 2013). A lógica do QUEST consiste, a princípio, na resolução do problema de Wahba. Este equivale a encontrar o autovetor normalizado correspondente ao maior autovalor da seguinte matriz K ,

$$K = \begin{bmatrix} S - \sigma I & Z \\ Z^T & \sigma \end{bmatrix}, \quad (1)$$

sendo,

$$S = B + B^T, \quad (2)$$

$$B = \sum \omega_a (\mathbf{v}_a^b \cdot \mathbf{v}_a^l), \quad (3)$$

$$Z = [B_{23} - B_{32} \quad B_{31} - B_{13} \quad B_{12} - B_{21}]^T, \quad (4)$$

$$\sigma = \text{tr}[B]. \quad (5)$$

onde, \mathbf{v}_a^b é um vetor arbitrário representado no sistema de coordenadas do corpo, \mathbf{v}_a^l é o mesmo vetor, representado no sistema de coordenadas local l , ω_a é peso atribuído ao vetor (sendo proporcional às variâncias das medições dos sensores), tal que $\sum \omega_a = 1$, tr é o traço da matriz e B_{ij} representa o elemento B na linha i e coluna j . Os valores referentes às leituras dos sensores, disponíveis para serem utilizados no algoritmo são, $\mathbf{v}_g = \mathbf{g}_p / |\mathbf{g}_p|$ e $\mathbf{v}_m = \mathbf{m}_E / |\mathbf{m}_E|$, sendo \mathbf{g}_p o vetor de gravidade, inferido pelos acelerômetros, e \mathbf{m}_E os valores de densidade do campo magnético terrestre, medido pelos magnetômetros.

A solução do *quaternion* ótimo, que relaciona o sistema de coordenadas l com relação a b , pode ser dado como segue (Kuga and Carrara, 2013),

$$q_l^b = \frac{1}{\sqrt{1 + |\mathbf{p}|^2}} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

onde \mathbf{p} é o vetor de parâmetros calculado como,

$$\mathbf{p} = [(\lambda_{max} + \sigma)I - S]^{-1} Z, \quad (7)$$

sendo λ_{max} o maior autovalor de (1), o qual é geralmente encontrado numericamente embora uma solução analítica fechada exista, a saber (Shuster and Oh, 1981),

$$\lambda = \sqrt{\omega_g^2 + \omega_g \omega_m \cos(\theta_g - \theta_m) + \omega_g^2}, \quad (8)$$

$$\cos(\theta_g - \theta_m) = (\mathbf{v}_g^1 \cdot \mathbf{v}_m^1)(\mathbf{v}_g^b \cdot \mathbf{v}_m^b) + |\mathbf{v}_g^1 \times \mathbf{v}_m^1| |\mathbf{v}_g^b \times \mathbf{v}_m^b|. \quad (9)$$

O *quaternion* ótimo pode ser convertido para sua equivalente matriz de rotação fazendo-se,

$$C_b^l = (q_4^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q})I + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^t - 2q_4 \mathbf{q} \times, \quad (10)$$

onde, q_4 representa o quarto valor do *quaternion* q_l^b e \times representa a forma antisimétrica do vetor \mathbf{q} , formado a partir dos três primeiros elementos de q_l^b .

2.2 Atitude Super Rápido para Acelerômetros e Magnetômetros (SAAM)

O algoritmo de Atitude Super Rápido para Acelerômetros e Magnetômetros (SAAM) foi proposto como uma solução de alinhamento simplificada, mas ainda na forma de *quaternion* Wu et al. (2018). O objetivo deste algoritmo é reduzir o custo computacional associado à determinação do máximo autovalor descrito na Seção 2.1.

Para computar a orientação através do algoritmo SAAM, utilizam-se as observações normalizadas dos vetores gravidade e densidade de campo magnético terrestre no sistema de coordenadas do corpo, respectivamente, $\mathbf{g}_P^b = -\mathbf{a}_{SF}^b \implies (a_x, a_y, a_z)$ e $m_m^b = (m_x, m_y, m_z)$, e seus vetores de referência dos acelerômetros e magnetômetros no sistema de coordenadas NED, i.e., $\mathbf{g}_P^1 = (0, 0, 1)^T$ e $\mathbf{m}_E^1 = (m_N, 0, m_D)$. Por serem normalizados, tem-se

$$\begin{cases} a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1; \\ m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1; \\ m_N^2 + m_D^2 = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Assim como o QUEST, o SAAM utiliza como base para seu método, a otimização do problema Wahba. Neste caso, Wu et al. (2018) afirma que pode ser utilizado métodos numéricos como Algoritmo Gradiente Descendente (GDA), Algoritmo de Gauss-Newton (GNA) e Algoritmo Levenberg-Marquardt (LMA). Por outro lado sabe-se que, a resolução do problema de Wahba consiste na solução da matriz K de Davenport, conforme (1) a (5). No SAAM, e diferentemente do QUEST, a derivação do maior autovalor de K é proposta de forma fechada e o problema do autovetor é resolvido de forma direta. O polinômio característico é obtido por:

$$\det(K - \lambda_K I) = 0, \quad (12)$$

com,

$$\lambda_K^4 + \tau_1 \lambda_K^2 + \tau_2 \lambda_K + \tau_3 = 0. \quad (13)$$

onde,

$$\tau_1 = -4\omega_g^2 + 4\omega_g - 2 + 4\alpha m_d \omega_g (\omega_g - 1), \quad (14)$$

$$\tau_2 = 0, \quad (15)$$

$$\tau_3 = 4\alpha m_D \omega_g (\omega_g - 1) (-2\omega_g^2 + 2\omega_g - 1) + 4\omega_g^2 (\omega_g - 1)^2 (\alpha^2 - m_N^2) + 4\omega_g^4 - 8\omega_g^3 + 8\omega_g^2 - 4\omega_g + 1. \quad (16)$$

$$\beta = a_x m_x + a_y m_y + a_z m_z, \quad (17)$$

Wu et al. (2018) demonstra que os autovalores de K podem ser dados através de:

$$\lambda_{K,1} = \sqrt{(1 - \omega_g)^2 + \omega_g^2 + 2\omega_g(1 - \omega_g)(\beta m_D + V)}, \quad (18)$$

$$\lambda_{K,2} = \sqrt{(1 - \omega_g)^2 + \omega_g^2 + 2\omega_g(1 - \omega_g)(\beta m_D - V)}, \quad (19)$$

$$\lambda_{K,3} = -\sqrt{(1 - \omega_g)^2 + \omega_g^2 + 2\omega_g(1 - \omega_g)(\beta m_D - V)}, \quad (20)$$

$$\lambda_{K,4} = -\sqrt{(1 - \omega_g)^2 + \omega_g^2 + 2\omega_g(1 - \omega_g)(\beta m_D + V)}, \quad (21)$$

onde,

$$V = m_N \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (22)$$

Segundo Yun et al. (2008) uma vez que o ângulo de inclinação do campo magnético terrestre $\gamma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $m_N = \cos \gamma > 0$, e portanto $V > 0$. Classificando os autovalores de K em ordem decrescente, obtém-se,

$$\lambda_{K,1} \geq \lambda_{K,2} > \lambda_{K,3} \geq \lambda_{K,4}. \quad (23)$$

O *quaternion* de orientação deve ser o autovetor associado ao autovalor $\lambda_{K,1}$. Portanto, segundo Wu et al. (2018), na fusão acelerômetro-magnetômetro, tem-se,

$$m_D = \beta, \quad (24)$$

$$m_N = \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (25)$$

De acordo com Wu et al. (2018) os ângulos de rolamento e guinada não são afetados pela medição do campo magnético, dessa forma, a expressão analítica para o autovalor máximo de K pode ser simplificada para,

$$\lambda_{K,1} \approx 1. \quad (26)$$

Os resultados finais da forma escalonada para $K - I$, podem ser dados por,

$$K - I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & a \\ & 1 & \dots & b \\ & & 1 & c \\ & & & d \end{pmatrix}. \quad (27)$$

onde,

$$a = \frac{1}{P} (m_y[m_D - a_x m_N + \beta(\omega_g - 1) - \omega_g m_D] + a_y[m_N m_x + m_N^2(1 - \omega_g) + \omega_g - \omega_g \beta m_D]) \quad (28)$$

$$b = \frac{1}{P} (m_N m_z + \beta m_x(1 - \omega_g) + m_D m_x(\omega_g - 1) + a_z m_N [m_D(\omega_g - 1) - \beta \omega_g] + a_x [m_N^2(\omega_g - 1) - \omega_g + \omega_g \beta m_D]) \quad (29)$$

$$c = \frac{1}{P} (m_N [-(1 + a_z)m_y + a_y(m_D + m_z + \omega_g \beta - \omega_g m_D)]) \quad (30)$$

$$d = \frac{1}{P} (2(1 + \beta^2 - 2\beta m_D - m_N^2)(1 - \omega_g)\omega_g) \quad (31)$$

$$P = (-1 - m_N m_x - a_z m_N m_x + (\omega_g - 1)a_z m_N^2 + (\omega_g - 1)m_D m_z - a_z \omega_g + a_x m_N(m_D + m_z - m_D \omega_g)) \quad (32)$$

Como $\beta = m_D$, a solução fundamental para $(KI)q = 0$ é dada por,

$$\bar{q} = (\bar{q}_0, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3) \quad (33)$$

$$\bar{q}_0 = (a_z - 1)(m_N + m_x) + a_x(m_D - m_z) \quad (34)$$

$$\bar{q}_1 = (a_z - 1)m_y + a_y(m_D - m_z) \quad (35)$$

$$\bar{q}_2 = a_z m_D - a_x m_N - m_z \quad (36)$$

$$\bar{q}_3 = -a_y(m_N + m_x) + a_x m_y \quad (37)$$

Isso mostra que a solução do SAAM está livre dos pesos pré-determinados atribuídos às observações vetoriais no QUEST. O *quaternion* resolvido é tal que,

$$\bar{q} = (\bar{q}_0, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3)^T = \left(\mathbf{n} \sin \frac{\phi}{2}, \cos \frac{\phi}{2} \right)^T \quad (38)$$

onde \mathbf{n} é um vetor de rotação e ϕ é o ângulo de rotação em torno mesmo. Para compatibilização com o *quaternion* fornecido pelo QUEST, (38) precisa ser reorganizado e re-normalizado como segue,

$$q_b^l = \left(\cos \frac{\phi}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\phi}{2} \right)^T = \frac{(\bar{q}_3, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \bar{q}_2)^T}{\sqrt{\bar{q}_0^2 + \bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2 + \bar{q}_3^2}} \quad (39)$$

A matriz de rotação correspondente a q_b^l pode ser obtida fazendo-se,

$$C_b^l = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

Caso o resultado seja requerido na forma de ângulos de Euler, basta fazer,

$$\phi = \text{atan}_2(C_{32}/C_{33}), \quad (41)$$

$$\theta = -\text{asin} C_{31}, \quad (42)$$

$$\psi = \text{atan}_2(C_{21}/C_{11}), \quad (43)$$

onde ϕ , θ e ψ são os ângulos de rolamento, arfagem e guinada, respectivamente, e C_{ij} é o elemento de C_b^l na linha i , coluna j .

Vale a pena observar que, na modelagem acima, assumiu-se o que o ângulo de declinação magnética α do campo terrestre é zero. Se esse não for o caso (como, de fato, não é a maioria das aplicações práticas), basta-se somar α a (30), de forma a se obter o ângulo de guinada verdadeiro (i.e., em relação ao norte). Transformações similares podem ser aplicadas a (26) e (27), conforme descrito em (Groves, 2013)

3. ANÁLISE DE ERROS

A despeito da validade das equações supracitadas, elas se baseiam nas seguintes premissas: veículo perfeitamente estacionário, sensores não corrompidos, e informações externas (gravidade e campo magnético terrestre) perfeitamente conhecidas. Segundo Hu et al. (2004), nenhuma das premissas supracitadas é verdadeira em aplicações reais. Por isso, na prática, o valor exato da matriz de rotação C_b^l não pode ser determinado (Oliveira et al., 2013).

Segundo Savage (2007), a existência de erros nas variáveis acima descritas produz uma matriz de rotação corrompida \hat{C}_b^l , que é apenas uma aproximação da matriz C_b^l . A relação entre estas matrizes pode ser equacionada como,

$$\hat{C}_b^l = C_b^l + \delta C_b^l = (I + E)C_b^l, \quad (44)$$

onde I é a matriz identidade, e E e δC_b^l são matrizes representando os erros em \hat{C}_b^l .

De acordo com Savage (2007), a matriz de erros E é definida como,

$$E = \delta C_b^l (C_b^l)^T = \tilde{C}_b^l (C_b^l)^T - I = E_s + E_{ss}, \quad (45)$$

com,

$$E_s = \frac{E + E^T}{2} = \begin{bmatrix} \eta_N & o_D & o_E \\ o_D & \eta_E & o_N \\ o_E & o_N & \eta_D \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$E_{ss} = \frac{E - E^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_D & -\varphi_E \\ -\varphi_D & 0 & \varphi_N \\ \varphi_E & -\varphi_N & 0 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

onde E_s é uma matriz simétrica e E_{ss} é uma matriz anti-simétrica. Os vetores de erros são definidos como: \mathbf{o} (erro de ortogonalidade), η (erro de normalidade) e φ (erro de alinhamento)¹. Segundo Silva (2016), pode-se investigar os erros desenvolvidos em C_b^l através de técnicas de perturbação linear. Dessa forma, o autor descreve δC_b^l como,

$$\delta C_b^l = \frac{\delta C_b^l}{\delta a_x} \delta a_x + \frac{\delta C_b^l}{\delta a_y} \delta a_y + \frac{\delta C_b^l}{\delta a_z} \delta a_z + \frac{\delta C_b^l}{\delta m_x} \delta m_x + \frac{\delta C_b^l}{\delta m_y} \delta m_y + \frac{\delta C_b^l}{\delta m_z} \delta m_z + \frac{\delta C_b^l}{\delta g_P} \delta g_P + \frac{\delta C_b^l}{\delta \alpha} \delta \alpha + \frac{\delta C_b^l}{\delta \gamma} \delta \gamma + \frac{\delta C_b^l}{\delta M} \delta M, \quad (48)$$

onde, δ_x representa o erro na variável genérica x .

3.1 QUEST

Os erros de normalidade, ortogonalidade e alinhamento, podem ser computados através da utilização de (10) em (48), e o resultado em (45) a (47). Ainda segundo Silva (2016), as expressões obtidas através do procedimento supracitado, para o caso genérico de um veículo arbitrariamente orientado com relação ao sistema de navegação, são complexas e de difícil interpretação. Sendo assim, adota-se a condição de perfeito alinhamento entre os triedros do corpo e de navegação em seu trabalho, premissa essa que também é adotada nesse artigo.

Dessa forma, as equações de erros residuais do algoritmo QUEST podem ser expressas como,

$$\eta_N = \eta_E = \eta_D = o_N = o_E = o_D = 0, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \varphi_N &= -\delta\phi \\ &= \left(\frac{\omega_g + \omega_m c^2 \alpha}{g_P} \right) \delta a_y - \omega_m \left[\frac{s(2\alpha)}{2g_P} \delta a_x \right. \\ &\quad \left. + \frac{s(2\alpha)s\gamma}{2M} \delta m_x + \frac{s^2 \alpha s\gamma}{M} \delta m_y - \frac{s\alpha c\gamma}{M} \delta m_z + s\alpha \delta \gamma \right], \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \varphi_E &= -\delta\theta \\ &= \left(\frac{\omega_g + \omega_m s^2 \alpha}{g_P} \right) \delta a_x + \omega_m \left[\frac{s(2\alpha)}{2g_P} \delta a_y + \frac{c^2(\alpha)s\gamma}{M} \delta m_x \right. \\ &\quad \left. + \frac{s(2\alpha)s\gamma}{2M} \delta m_y - \frac{c\alpha c\gamma}{M} \delta m_z + c\alpha \delta \gamma \right], \end{aligned} \quad (51)$$

$$\varphi_D = -\delta\psi = \frac{sat\gamma}{g_P} \delta a_x + \frac{cat\gamma}{g_P} \delta a_y - \frac{s\alpha}{Mc\gamma} \delta m_x + \frac{c\alpha}{Mc\gamma} \delta m_y - \delta\alpha \quad (52)$$

Como é possível observar, em (49), o algoritmo QUEST não apresenta erros de normalidade e ortogonalidade em sua matriz de rotação. Isso condiz com o estudo de Jiang and Lin (1991), quando o mesmo cita a não existência destes erros quando se trabalha com *quaternions*. Isso também significa que há uma redução do custo computacional do algoritmo.

As equações (50) a (52), apresentam a relação de erros presentes na DCM do algoritmo QUEST. Esse resultado havia sido explicado apenas de forma numérica em (Yun et al., 2008). Os erros de alinhamento norte e leste do algoritmo QUEST são mais corrompidos pelos valores de erros dos magnetômetros, δm_x e δm_y . Isso pode implicar em uma grande influência nos valores de alinhamento, principalmente norte e leste, em situações sujeitas a interferências magnéticas. Outro ponto importante em (50) e (51) é a influência de ω_m . Como já citado anteriormente esse valor é o peso utilizado nas equações do algoritmo QUEST para ponderar os valores das leituras dos magnetômetros. Sendo assim, percebe-se que: quanto maior o valor de ω_m maior será o erro em ϕ_N e ϕ_E . No entanto o valor de ω_m tendendo, no limite, a zero, $\omega_m \rightarrow 0$, poderia gerar um resultado de orientação indeterminado, uma vez que apenas o vetor \mathbf{v}_g continuaria sendo observado.

Dessa forma, pode-se dizer que a análise de erros do algoritmo QUEST corrobora os resultados simulados expostos em (Yun et al., 2008).

3.2 SAAM

Assim como no método QUEST, expressões analíticas para os erros provenientes do método SAAM também podem ser derivadas, substituindo-se (40) em (48), e o resultado em (45) a (47). Isso resulta nas equações de erros,

$$\eta_N = \eta_E = \eta_D = o_N = o_E = o_D = 0 \quad (53)$$

$$\varphi_N = -\delta\phi = -\frac{1}{g_P} \delta a_x \quad (54)$$

$$\varphi_E = -\delta\theta = \frac{1}{g_P} \delta a_x \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \varphi_D = -\delta\psi &= \frac{sat\gamma}{g_P} \delta a_x + \frac{cat\gamma}{g_P} \delta a_y - \\ &\quad \frac{s\alpha}{Mc\gamma} \delta m_x + \frac{c\alpha}{Mc\gamma} \delta m_y - \delta\alpha. \end{aligned} \quad (56)$$

¹ Subscritos N , E e D representam erros nas direções norte, leste e vertical, respectivamente

É possível perceber que o algoritmo SAAM também elimina os erros de normalidade e ortogonalidade, reduzindo assim seu custo computacional. Os erros presentes neste método, portanto, são exclusivamente de alinhamento, à semelhança do QUEST.

Em (54) e (55) contudo, percebe-se que, diferente do QUEST, os erros de alinhamento norte e leste não são afetados por erros dos magnetômetros e de campo magnético.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Resultados simulados

Para validar a análise de erros apresentada na Seção 3, bem como as verificações apresentadas, foram elaborados testes simulados.

Na etapa de simulação, o sistema foi considerado à latitude $-23^{\circ}12'47''$, longitude $-45^{\circ}51'38''$ e altitude 629 metros. Os dados da Terra, como raio equatorial, elipticidade, velocidade angular, entre outros, foram baseados no trabalho de Rogers (2007). A aceleração da gravidade local e o campo magnético da Terra foram calculados de acordo com os modelos descritos em Britting (1971) e Chulliat et al. (2015), respectivamente.

Por definição, as simulações foram concebidas assumindo-se que o sistema de coordenadas do corpo se encontra perfeitamente alinhado com o sistema de navegação local, representando, portanto, um cenário ideal.

Os sensores (acelerômetros e magnetômetros) foram simulados estacionários com frequência de amostragem de 100Hz. Os *biases* simulados dos magnetômetros e acelerômetros seguiram especificações próximas às unidades AHRS utilizada no experimento, a saber, 5 mG e 5 mg. Também foram inseridos ruídos aleatórios nos acelerômetros ($0.1\text{mg}/\sqrt{\text{Hz}}$) e magnetômetros ($0.2\text{mG}/\sqrt{\text{Hz}}$). Incertezas nos valores da gravidade local, ângulo de declinação, ângulo de inclinação, e magnitude do campo magnético local também foram consideradas, a saber, 0,005 mg, 0.1° , 0.1° e 0,1 mG, respectivamente. Esses valores simulam uma IMU de nível automotivo, a mesma usada nos testes experimentais, conforme as especificações descritas em Groves (2013).

Com base nos erros simulados foi possível obter estimativas para os erros de normalidade, ortogonalidade, alinhamento

e ângulos de Euler para cada um dos algoritmos investigados. Esses valores são oriundos das fórmulas apresentadas na Seção 3, e podem ser observados na Tabela 1.

A Figura 1, por outro lado, ilustra os erros obtidos ao longo do processo de alinhamento. Como foi demonstrado na Seção 3, tanto o QUEST como o SAAM não apresentam erros de normalidade e ortogonalidade, contudo há erros de alinhamento e nos respectivos ângulos de Euler. Nas Figuras 1(g), (h) e (i), é possível observar que: 1) os resultados de alinhamento dos algoritmos têm um comportamento parecido na direção Vertical; 2) o algoritmo QUEST apresenta menor erro na direção norte; 3) o erro de alinhamento leste do algoritmo SAAM é menor que o do QUEST. Já nas Figuras 1(j), (k) e (l), observa-se que o erro de guinada se sobrepõem, para os algoritmos investigados. O QUEST apresenta melhor resultado de rolamento, enquanto o SAAM um melhor resultado para o erro de arfagem.

Destaca-se, por fim, que os métodos QUEST e SAAM originaram resultados muito próximos, do ponto de vista de exatidão. Contudo, conforme predito pelas equações analíticas derivadas na Seção 3, em aplicações envolvendo significativos distúrbios magnéticos, o QUEST deve ter sua exatidão deteriorada, especialmente para os erros de alinhamento norte e leste (e consequentemente, para os ângulos de rolamento e arfagem).

4.2 Resultados Experimentais

Para validar os resultados alcançados no teste simulado, também foi realizado um teste experimental. O teste foi realizado no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), em São José dos Campos, Brasil. As coordenadas geográficas do experimento são latitude $-23^{\circ}21'13''$, longitude $-45^{\circ}14'18''$ e altitude 641 metros.

Utilizou-se uma unidade AHRS M2 da Innalabs, alinhada com o triedro de navegação em um mancal a ar semi-esférico de três graus de liberdade. Para calibração prévia dos dados dos sensores (magnetômetros, em particular), utilizou-se o algoritmo de Foster and Elkaim (2008). Os valores preditos para os erros de alinhamento podem ser observados na Tabela 2.

A Figura 2, por outro lado, apresenta os erros obtidos experimentalmente. Como se pode observar, os erros obtidos corroboram os previstos, seguindo o mesmo padrão evidenciado no teste simulado. Esses resultados confirmam a validade da análise de erros proposta neste documento,

Tabela 1. Erros preditos (simulação).

Erro	QUEST	SAAM
η_N [°]	0	0
η_E [°]	0	0
η_D [°]	0	0
σ_N [°]	0	0
σ_E [°]	0	0
σ_D [°]	0	0
φ_N [°]	0.1802	0.2868
φ_E [°]	-0.5542	-0.2828
φ_D [°]	1.6754	1.7053
$\delta\phi$ [°]	-0.1802	-0.2868
$\delta\theta$ [°]	0.5542	0.2828
$\delta\psi$ [°]	-1.6754	-1.7053

Fonte: Autor.

Tabela 2. Erros experimentais.

Erro	QUEST	SAAM
η_N [°]	0	0
η_E [°]	0	0
η_D [°]	0	0
σ_N [°]	0	0
σ_E [°]	0	0
σ_D [°]	0	0
φ_N [°]	-0.1060	-0.0698
φ_E [°]	-0.0685	0.0287
φ_D [°]	1.9684	1.9683
$\delta\phi$ [°]	0.1048	0.0702
$\delta\theta$ [°]	0.0704	-0.0275
$\delta\psi$ [°]	-1.9688	-1.9687

Fonte: Autor.

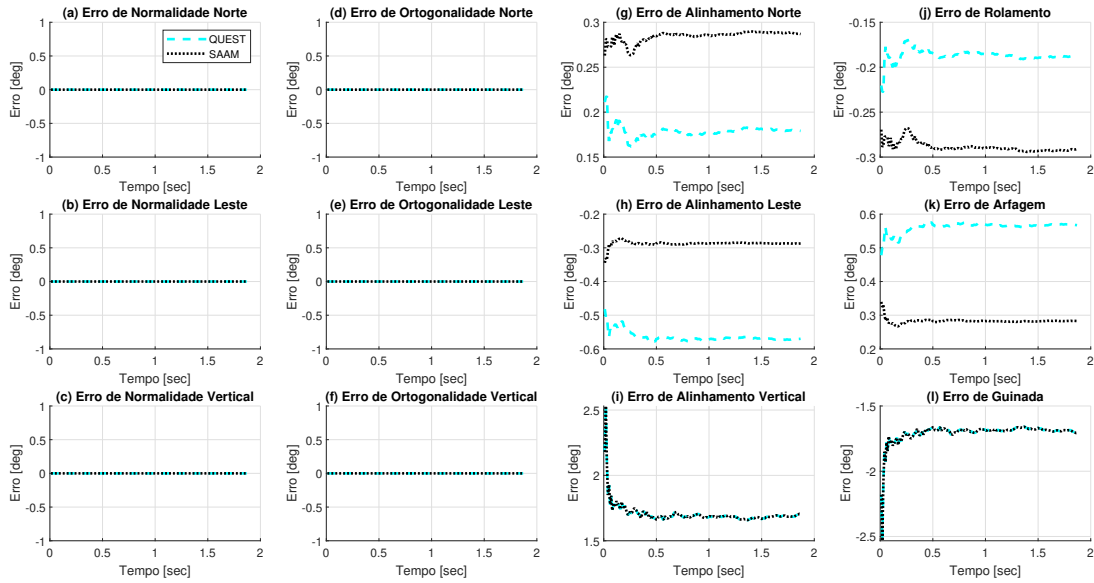


Figura 1. Resultados simulados

Fonte: Autor.

bem como as verificações descritas em relação às exatidões dos algoritmos QUEST e SAAM para fins de alinhamento estacionário em AHRS.

Nota-se que os erros de alinhamento norte e rolamento, alinhamento leste e arfagem são proporcionais em magnitude e inversos em sinal, como nos resultados simulados.

Outro ponto a ser discutido, é o fato das curvas apresentarem comportamentos diferentes entre a simulação e o experimento. Isso ocorre uma vez que o erro converge através da correção dos valores de ruídos aleatórios dos sensores, que são próximos, mas diferentes na simulação e na experimentação. Ainda assim análise de erros previu tais resultados, e estes corroboram com os trabalhos similares da área.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma análise de erros para dois algoritmos de alinhamento grosseiro empregados em Sistemas de Referência de Orientação e Rumo (AHRS), a saber: QUEST e SAAM.

Expressões analíticas para os erros residuais (normalidade, ortogonalidade e alinhamento) desenvolvidos nas matrizes de rotação computadas por cada um dos algoritmos foram derivadas. Além disso, foram derivadas expressões para os erros nos correspondentes ângulos de Euler.

Para simulação, foram considerados erros nas leituras dos acelerômetros e magnetômetros, bem como nos modelos gravitacional e magnético da Terra. Um cenário ideal de sistemas de coordenadas do corpo e de navegação perfeitamente alinhados foi adotado. Também foram realizados testes experimentais utilizando uma AHRS M2 da Innalabs. Os testes foram executados no Instituto de Pesquisas Espaciais (INPE).

Como fruto das análises, verificou-se que os algoritmos apresentaram desempenhos comparáveis. O algoritmo QUEST evidenciou melhor resultado para os erros de alinhamento norte e de rolamento. Por sua vez, o SAAM apresentou melhor desempenho para os erros de alinhamento leste e de arfagem. Para os erros de alinhamento vertical e de guinada os dois apresentaram resultados iguais. Apesar dos resultados obtidos, espera-se que o QUEST tenha sua exatidão mais severamente degradada (em comparação ao SAAM), quando da existência de significativas anomalias magnéticas.

Como metas para continuação deste trabalho, os autores pretendem expandir a análise de erros de forma mais criteriosa, tornando-a válida, por exemplo, para qualquer orientação do sistema de coordenadas do corpo com relação ao de navegação. Assim como aprofundar a discussão a respeito dos erros obtidos, em cada método, também na fase de alinhamento fino.

AGRADECIMENTOS

Os autores a agradecem à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) (processo N^o 88881.169927/2018-01), à FAPEMIG (processo no. CAG-APQ-01449-17), ao CNPq (processo no. 313160/2019-8) e Embrapa (processo N^o 212-20/2018) e ao Departamento de Automática (DAT) da Universidade Federal de Lavras (UFLA), pelo suporte dado à pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Bar-Itzhack, I.Y. (1996). Request-a recursive quest algorithm for sequential attitude determination. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 19(5), 1034–1038.
- Britting, K.R. (1971). Inertial navigation systems analysis.
- Chulliat, A., Macmillan, S., Alken, P., Beggan, C., Nair, M., Hamilton, B., Woods, A., Ridley, V., Maus, S., and

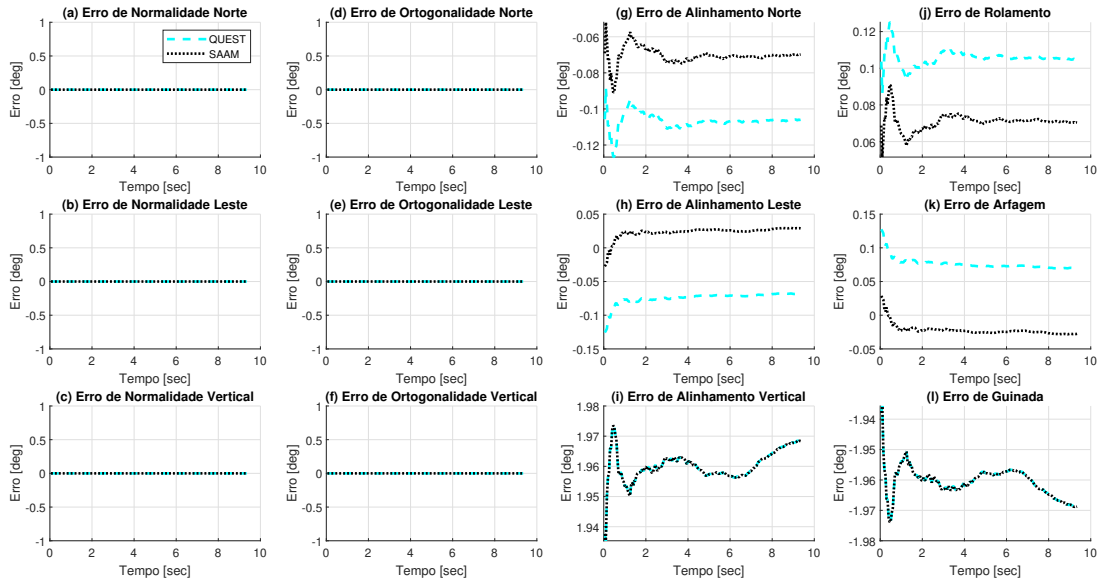


Figura 2. Erros experimentais

Fonte: Autor.

- Thomson, A. (2015). The US/UK world magnetic model for 2015-2020.
- Crassidis, J.L., Markley, F.L., and Cheng, Y. (2007). Survey of nonlinear attitude estimation methods. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 30(1), 12–28.
- Farrell, J. (2008). *Aided navigation: GPS with high rate sensors*. McGraw-Hill, Inc.
- Foster, C.C. and Elkaim, G.H. (2008). Extension of a two-step calibration methodology to include nonorthogonal sensor axes. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 44(3), 1070–1078.
- Gade, K. (2016). The seven ways to find heading. *The Journal of Navigation*, 69(5), 955–970.
- Groves (2013). Principles of gnss, inertial, and multisensor integrated navigation systems. *London: Artech House Remote Sensing Library*.
- Hu, X., Liu, Y., Wang, Y., and Yan, D. (2004). Errors analysis and compensation of low cost attitude measurement system. In *Intelligent Control and Automation, 2004. WCICA 2004. Fifth World Congress on*, volume 4, 3688–3691. IEEE.
- Jiang, Y.F. and Lin, Y.P. (1991). Error analysis of quaternion transformations (inertial navigation). *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*, 27(4), 634–639.
- Kuga, H.K. and Carrara, V. (2013). Attitude determination with magnetometers and accelerometers to use in satellite simulator. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013.
- Li, W. and Wang, J. (2013). Effective adaptive Kalman filter for MEMS-IMU/magnetometers integrated attitude and heading reference systems. *The Journal of Navigation*, 66(1), 99–113.
- Oliveira, F.S., de Castro Leite Filho, W., et al. (2013). Análise do tempo de alinhamento em sistemas de navegação inercial solidários. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 1(1).
- Savage, P. (2007). Strapdown analytics: Part 1, maple plain, mn: Strapdown associates.
- Shuster, M.D. and Oh, S.D. (1981). Three-axis attitude determination from vector observations. *Journal of guidance and Control*, 4(1), 70–77.
- Silva, F.O. (2016). *Stationary Self-Alignment and Calibration Techniques for Straodown Inertial Navigation Systems*. Instituto Tecnológico Aeronáutico-São José dos Campos, Thesis of Doctor of Science.
- Stirling, R., Fyfe, K., and Lachapelle, G. (2005). Evaluation of a new method of heading estimation for pedestrian dead reckoning using shoe mounted sensors. *The Journal of Navigation*, 58(1), 31–45.
- Titterton, D. and Weston (2004). *Strapdown inertial navigation technology*, volume 17. IET.
- Wu, J., Zhou, Z., Fourati, H., and Cheng, Y. (2018). A super fast attitude determination algorithm for consumer-level accelerometer and magnetometer. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 64(3), 375–381.
- Yun, X., Bachmann, E.R., and McGhee, R.B. (2008). A simplified quaternion-based algorithm for orientation estimation from earth gravity and magnetic field measurements. *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, 57(3), 638–650.