

Modelo de Cálculo de Ofertas Estratégicas Formulado como um Programa Matemático com Restrições de Equilíbrio para Companhias *Price-Maker*^{*}

João Augusto Silva Lêdo^{*} Prof. Dr. Leonardo Nepomuceno^{**}

^{*} Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista
(UNESP), SP, (e-mail: joao_a94@hotmail.com);

^{**} Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista
(UNESP), SP, (e-mail: leonardo.nepomuceno@unesp.br).

Abstract: This paper aims at proposing a mathematical model for the decision making process related to the Strategic Offering Problem (COE) at an electricity day-ahead market of a price-maker generation company, having only thermal generation units in its portfolio. The proposed model takes into account the decision models adopted by the market operator, by means of the formulation of a bi-level optimization problem, in which the market operator's operational decisions are considered at the lower level. This bi-level formulation is reformulated as Mathematical Programming Problem with Equilibrium Constraints (PMRE). The proposed model is tested in an electrical system that involves 32 generating units and 17 consumers, interconnected in a 24-bus transmission system. The results show that the COE model is coherent with the microeconomic theory and that the proposed solution technique is efficient for solving the problem.

Resumo: Este trabalho tem como objetivo propor um modelo matemático para a tomada de decisão relacionada ao Cálculo de Ofertas Estratégicas (COE) em mercados de energia do dia seguinte por companhias geradoras *price-maker* que possuam unidades de geração termoeletricas em seu portfólio. O modelo proposto leva em conta os modelos de decisão adotados pelo operador de mercado, por meio da formulação de um problema de otimização bi-nível, em que as decisões operativas do operador de mercado são consideradas no nível inferior. Essa formulação bi-nível dá origem a um problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio (PMRE). O modelo proposto é testado em um sistema elétrico que envolve 32 unidades geradoras e 17 consumidores, interligados em um sistema de transmissão de 24 barras. Os resultados apontam que o modelo de COE é coerente com a teoria microeconômica e que a técnica de solução proposta se mostra eficiente para a resolução do problema.

Keywords: Calculated Strategic Bidding, Mathematical Programming with an Equilibrium Constraint.

Palavras-chaves: Cálculo de Ofertas Estratégicas, Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio.

1. INTRODUÇÃO

Os mercados de energia têm como objetivo a compra e venda de energia elétrica. Nos mercados de curto prazo (*pool*), a energia é negociada principalmente no sub-mercado do dia seguinte (Conejo et al., 2010). Vários agentes, tais como produtores, consumidores, comercializadores e operadores do sistema de energia e do mercado, estão envolvidos diretamente no mercado do dia seguinte.

Um procedimento fundamental para a solução dos mercados de energia é o leilão (Motto et al., 2002; Arroyo and Conejo, 2002). Em um leilão, os agentes produtores de energia (companhias geradoras) fornecem ofertas de venda

energia, enquanto que os consumidores fornecem lances de compra de energia. Tais ofertas/lances são processadas em um procedimento denominado de Procedimento de Equilíbrio de Mercado (PEM), o qual é executado pelo Operador de Mercado (OM). O PEM é formulado como um problema de otimização que busca maximizar a função de bem comum (dada pela função de geração agregada menos a função de consumo agregado), sujeito ao atendimento de restrições associadas ao mercado, ao balanço de energia (equilíbrio entre geração e demanda) e aos limites operacionais do sistema. O PEM processa ofertas e lances fornecidos e calcula as quantidades aceitas de geração e demanda para cada companhia e cada consumidor, respectivamente. Além disso, o PEM também calcula o chamado preço de equilíbrio de mercado, que corresponde ao preço em que a energia vendida/comprada é negociada

^{*} Agradecimento à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento parcial deste projeto.

no mercado. Este preço de equilíbrio é obtido a partir da variável dual do problema de PEM associada à restrição de atendimento de demanda.

Dentre os agentes envolvidos no mercado do dia seguinte, destaca-se a companhia *price-maker*, alvo deste trabalho, a qual tem por objetivo maximizar seus lucros neste mercado. Para isso, a companhia *price-maker* deve fornecer ofertas estratégicas no leilão de energia do dia seguinte que garanta seus lucros neste mercado. Uma companhia *price-maker* é aquela que, em geral, detém grande parte do mercado de geração disponível e, por isso, tem a capacidade de influenciar os preços de equilíbrio de mercado, dependendo do montante de energia que ela oferta neste mercado. Se, por exemplo, esta companhia oferta montantes (cotas) elevados de energia no mercado, os preços de equilíbrio deste mercado tendem a cair em função da lei de oferta e da procura. O contrário ocorre quando esta companhia oferta montantes baixos no mercado. A fim de calcular essas ofertas estratégicas, a companhia resolve o problema denominado de Cálculo de Ofertas Estratégicas (COE) (de la Torre et al., 2004). O COE é formulado como um problema de otimização que busca maximizar o lucro da companhia *price-maker* no leilão, sujeito ao atendimento das restrições de mercado e demais restrições operacionais.

A função matemática de lucro da companhia geradora, utilizada no modelo de COE, é função do preço de equilíbrio de mercado. Por sua vez, o preço de equilíbrio é obtido pela solução do PEM executado pelo OM, o qual necessita como informação de entrada das ofertas e lances dos agentes geradores e consumidores, respectivamente. Assim, há um problema de “circularidade”, do ponto de vista de informações de entrada e saída, advindo da inter-relação entre o problema de otimização resolvido pelo agente gerador (COE) e o problema resolvido pelo agente OM (PEM). Em função das dificuldades relacionadas a esta “circularidade”, uma abordagem que tem sido adotada para a solução do problema de COE envolve a representação direta da interação matemática (equilíbrio) entre os problemas de otimização do agente gerador (COE) e do OM (PEM). Nesta abordagem, o problema de PEM é inserido como uma restrição na formulação do problema de COE, dando origem a um problema de otimização bi-nível (Fortuny-Amat and McCarl, 1981; Pereira et al., 2005; Dai and Qiao, 2015). Assim, nos modelos de COE bi-nível utilizados nesta abordagem, o nível superior busca a maximização dos lucros da companhia *price-maker*, enquanto que o nível inferior representa um modelo de PEM.

Os problemas de otimização bi-nível são, em geral, de difícil solução (Luo et al., 1996). Uma das abordagens utilizadas para a solução de problemas desta natureza consiste em substituir o problema de nível inferior por suas condições de otimalidade de primeira ordem (condições de Karush-Kuhn-Tucker - KKT). Entretanto, este método de solução pode ser utilizado somente quando o problema de nível inferior (PEM) é formulado como um problema de otimização convexo (Luo et al., 1996). O problema de otimização de um único nível resultante desta substituição é denominado de Programa Matemático com Restrições de Equilíbrio (PMRE) (Luo et al., 1996; Gabriel et al., 2013).

Neste trabalho, propõe-se um modelo de COE para uma companhia *price-maker*, o qual é formulado, inicialmente,

como um problema de otimização bi-nível. O método de solução proposto para o modelo de COE bi-nível envolve a metodologia de substituição do problema de nível inferior (PEM) por suas condições de KKT, transformando o problema bi-nível em um PMRE de um único nível. O modelo proposto de PEM, utilizado no nível inferior, é formulado como um problema de otimização linear, o que permite a sua substituição por suas condições de KKT. O modelo do PMRE de um único nível obtido é um problema não linear com restrições de equilíbrio (associadas às restrições de complementaridade de KKT). Assim, são propostos métodos de linearização de funções do PMRE que tratam, principalmente, a função não linear de lucro e as restrições de complementaridade. O método de linearização da função lucro é feito por meio do Teorema da Dualidade Forte (Luenberger and Ye, 2008). Por sua vez, as restrições de complementaridade são linearizadas utilizando-se o método do Big-M (Fortuny-Amat and McCarl, 1981). O modelo linearizado proposto é resolvido para um sistema de potência contendo 24 barras (adaptado de Wong et al. (1999)), que envolve 32 unidades geradoras, das quais 15 são da companhia *price-maker* estudada, além de 17 consumidores. Os resultados apresentados mostram que o modelo de COE proposto é coerente com a teoria microeconômica, que envolve análises de mercados em geral. Os resultados também apontam que o modelo e a técnica de solução propostos se mostram eficientes para a solução do problema de COE para companhias *price-maker*.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma. Na Seção 2 são descritos os principais objetivos. Na Seção 3, são descritos os modelos de COE bi-nível e de um nível equivalente (PMRE). Na Seção 4 são discutidos os resultados computacionais obtidos, e as conclusões são resumidas na Seção 5.

2. FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O PROBLEMA DE COE

Neste trabalho, o problema de COE é inicialmente formulado como um problema de otimização bi-nível, o qual é descrito na Seção 3.2. Antes porém, descreve-se a nomenclatura utilizada na formulação do problema proposto na Seção 3.1. Finalmente, na Seção 3.3, o problema de COE é reformulado como um PMRE linearizado, o qual pode ser resolvido por meio de algoritmos de otimização linear inteira-mista.

2.1 Nomenclatura

A nomenclatura do modelo está organizada em conjuntos, parâmetros (constantes do problema) e variáveis, descritos a seguir.

Conjuntos

| | |
|-----|--|
| T | Períodos do dia em horas; |
| I | Unidades geradoras associadas as demais companhias; |
| J | Unidades geradoras associadas à companhia <i>price-maker</i> ; |
| K | Consumidores; |
| B | Blocos ofertados e demandados; |

| | |
|----------------|---|
| L | Unidades termoeletricas; |
| N | Barras do sistema de transmissao; |
| N_n | Barras vizinhas as barras n . |
| <i>Índices</i> | |
| t | Índice de períodos do dia; |
| i | Índice das unidades geradoras associadas as demais companhias; |
| j | Índice das unidades geradoras associadas a companhia <i>price-maker</i> ; |
| k | Índice dos consumidores; |
| b | Índice dos blocos ofertados e demandados; |
| l | Índice referente as unidades termoeletricas. |
| n | Índice que percorre o conjunto N ; |
| m | Índice que percorre o conjunto N_n . |

Parâmetros

| | |
|---------------------------|---|
| $P_{t(I \cup J)b}^{Gmin}$ | Potência mínima a ser gerada, dada em [MW]; |
| $P_{t(I \cup J)b}^{Gmax}$ | Potência máxima a ser gerada, dada em [MW]; |
| P_{tkb}^{Cmin} | Potência mínima a ser consumida, dada em [MW]; |
| P_{tkb}^{Cmax} | Potência máxima a ser consumida, dada em [MW]; |
| P_{nm}^{max} | Potência máxima admitida em cada linha de transmissao; |
| B_{nm} | Susceptância das linhas de transmissao; |
| π | Ângulos em radianos; |
| R_l^{Gup} | Rampa ascendente da função de produção termoeletrica; |
| R_l^{Gdw} | Rampa descendente da função de produção termoeletrica; |
| λ_{tib}^O | Lances de preços das demais companhia, dado em [\$/MW]; |
| λ_{tkb}^C | Lances de preços dos consumidores, dado em [\$/MW]; |
| $M_{t(I \cup J)b}^{Gmax}$ | Número suficientemente grande associado a $P_{t(I \cup J)b}^{Gmax}$; <i>Nível superior</i> |
| $P_{t(I \cup J)b}^{Gmax}$ | Número suficientemente grande associado a $P_{t(I \cup J)b}^{Gmin}$. |
| M_{tkb}^{Cmax} | Número suficientemente grande associado a M_{tkb}^{Cmax} . |
| M_{tkb}^{Cmax} | Número suficientemente grande associado a P_{tkb}^{Cmin} . |

Variáveis

| | |
|-----------------------------|---|
| λ_{tjb}^G | Lances de preços da companhia <i>price-maker</i> , dado em [\$/MW]; |
| $p_{t(I \cup J)b}^G$ | Quantidades geradas, dado em [MW]; |
| p_{tkb}^C | Quantidades consumidas, dado em [MW]; |
| θ_{tn} | Fluxo de carga nas linhas de transmissao; |
| λ_{tn} | Preços de equilíbrio de mercado, dado em [\$/MW]; |
| $\pi_{t(I \cup J)b}^{Gmin}$ | Variável dual associada a $P_{t(I \cup J)b}^{Gmin}$; |
| $\pi_{t(I \cup J)b}^{Gmax}$ | Variável dual associada a $P_{t(I \cup J)b}^{Gmax}$; |
| π_{tkb}^{Cmin} | Variável dual associada a P_{tkb}^{Cmin} ; |
| π_{tkb}^{Cmax} | Variável dual associada a $P_{t(I \cup J)b}^{Cmax}$; |
| α_{tnm}^{min} | Variável dual associada aos limites de fluxos mínimos na transmissao; |
| α_{tnm}^{max} | Variável dual associada aos limites de fluxos máximos na transmissao; |
| β_{tn}^{min} | Variável dual associada aos limites angulares mínimos da transmissao; |

| | |
|-----------------------------|--|
| β_{tn}^{max} | Variável dual associada aos limites angulares máximos da transmissao; |
| β_t^0 | Variável dual associada a restrição na barra 1 do sistema de transmissao elétrica; |
| γ_{tl}^{Gup} | Variável dual associada a restrição de rampa ascendente; |
| γ_{tl}^{Gdw} | Variável dual associada a restrição de rampa descendente; |
| $\mu_{t(I \cup J)b}^{Gmax}$ | variável binária associada a $P_{t(I \cup J)b}^{Gmax}$; |
| $\mu_{t(I \cup J)b}^{Gmin}$ | variável binária associada a $P_{t(I \cup J)b}^{Gmin}$; |
| μ_{tkb}^{Cmax} | Variável binária associada a P_{tkb}^{Cmax} ; |
| μ_{tkb}^{Cmin} | Variável binária associada a P_{tkb}^{Cmin} ; |
| μ_{tnm}^{Bmin} | Variável binária associada as restrições de complementaridade dos fluxos mínimos; |
| μ_{tnm}^{Bmax} | Variável binária associada as restrições de complementaridade dos fluxos máximos; |
| $\mu_{tn}^{\Pi min}$ | Variável binária associada as restrições de complementaridade dos limites angulares mínimos da transmissao; |
| $\mu_{tn}^{\Pi max}$ | Variável binária associada as restrições de complementaridade dos limites angulares máximos da transmissao; |
| μ_{tl}^{Gup} | Variável binária associada as restrições de complementaridade de rampa ascendente; |
| μ_{tl}^{Gdw} | Variável binária associada as restrições de complementaridade de rampa descendente; |
| DT_{tl} | Variável auxiliar associada as derivadas parciais da função Lagrangiana em relação p_{tlb}^G ($\frac{\partial L(\cdot)}{\partial p_{tlb}^G}$). |

2.2 Formulação Matemática Bi-Nível

O modelo de COE bi-nível proposto é formulado a seguir, de (1)-(11). Este modelo leva em consideração, no nível superior, o problema de maximização do lucro da companhia, e no nível inferior, o PEM.

No nível superior, o objetivo consiste na maximização do lucro da companhia, mostrado em (1), em que o primeiro termo se refere à receita obtida pela companhia com a venda de energia no mercado do dia seguinte, e o segundo termo se refere aos custos de produção desta energia. Em geral, a função custo de produção de uma unidade termoeletrica é dada por uma função quadrática de sua geração.

$$Max_{\lambda^G, p^G} \sum_{tn(j \in G^J)_b} \lambda_{tn} p_{tjb}^G - C(p_{tjb}^G). \quad (1)$$

Não são consideradas restrições operativas específicas no nível superior. Assim, a única restrição neste nível consiste no próprio problema de nível inferior, descrito a seguir.

Nível inferior

O problema de nível inferior é resolvido pelo Operador de Mercado (OM). Este operador tem como objetivo a maximização da função de bem comum. No problema de nível inferior aqui definido, busca-se a minimização do valor negativo da função de bem comum, conforme

mostrado em (2). Os dois primeiros termos desta função representam os custos das ofertas de geração da companhia *price-maker* e das demais companhias, respectivamente. Já o terceiro termo representa os custos de lances dos consumidores.

$$\text{Min}_{p^G, p^O, p^C} \sum_{tjb} \lambda_{tjb}^G p_{tjb}^G + \sum_{tib} \lambda_{tib}^O p_{tib}^G - \sum_{tkb} \lambda_{tkb}^C p_{tkb}^C. \quad (2)$$

A minimização de (2) esta sujeita às restrições mostradas de (3)–(11):

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\substack{j \in G_n^J \\ m \in N_n}} p_{tjb}^G + \sum_{\substack{i \in G_n^I \\ b}} p_{tib}^G - \sum_{\substack{k \in G_n^C \\ b}} p_{tkb}^C \\ & = \sum_{m \in N_n} B_{nm} (\theta_{tn} - \theta_{tm}) \quad (\lambda_{tn}) \end{aligned} \right\} (\lambda_{tn}), \forall t, \forall n \quad (3)$$

$$0 \leq p_{tjb}^G \leq P_{tjb}^{Gmax} \quad (\pi_{tjb}^{Gmin}, \pi_{tjb}^{Gmax}), \forall t, \forall j, \forall b \quad (4)$$

$$0 \leq p_{tib}^G \leq P_{tib}^{Gmax} \quad (\pi_{tib}^{Gmin}, \pi_{tib}^{Gmax}), \forall t, \forall i, \forall b \quad (5)$$

$$0 \leq p_{tkb}^C \leq P_{tkb}^{Cmax} \quad (\pi_{tkb}^{Cmin}, \pi_{tkb}^{Cmax}), \forall t, \forall k, \forall b \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & -P_{nm}^{max} \leq B_{nm} (\theta_{tn} - \theta_{tm}) \leq P_{nm}^{max} \\ & (\alpha_{tnm}^{min}, \alpha_{tnm}^{max}), \forall t \in T, \forall n \in N, \forall m \in N_n \end{aligned} \quad (7)$$

$$-\pi \leq \theta_{tn} \leq \pi \quad (\beta_{tn}^{min}, \beta_{tn}^{max}), \forall t \in T, \forall n \in N \quad (8)$$

$$\theta_{t1} = 0 \quad (\beta_t^0), \forall t \in T \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in B} p_{tjb}^G - \sum_{b \in B} p_{(t-1)lb}^G \leq R_l^{Gup} (\gamma_{tl}^{Gup}), \\ & \forall t \in T, t \neq 1, \forall l \in \mathcal{T} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in B} p_{(t-1)lb}^G - \sum_{b \in B} p_{tjb}^G \leq R_l^{Gdw} (\gamma_{tl}^{Gdw}), \\ & \forall t \in T, t \neq 1, \forall l \in \mathcal{T} \end{aligned} \quad (11)$$

A restrição (3) representa o balanço de potência ativa nas barras do sistema, em que os fluxos de potência que saem de cada barra são representados por meio de uma formulação linear. Os dois primeiros termos representam as gerações de potência ativa na barra relacionadas à companhia *price-maker* e às demais companhias, respectivamente. As restrições (4)–(6) representam os limites dos blocos de ofertas e lances de geradores e consumidores, respectivamente. A restrição (7) representa os limites de capacidade das linhas de transmissão. Os limites para os ângulos das tensões nas barras são definidos em (8), sendo que o ângulo é definido como valor de referência nula na barra 1, por meio da restrição (9). As restrições (10) e (11) representam os limites de tomada e alívio de carga (rampas de subida e descida) para as unidades termelétricas.

O modelo bi-nível descrito de (1)–(11) não pode ser resolvido diretamente da maneira como está formulado matematicamente (i.e. como um problema bi-nível). Portanto a Seção 3, a seguir, descreve o método de solução deste problema matemático bi-nível.

3. MÉTODO DE SOLUÇÃO

O método de solução proposto neste trabalho consiste basicamente em substituir o problema de nível inferior por suas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), o que resulta em um problema único nível denominado de Programa Matemático com Restrição de Equilíbrio (PMRE), descrito a seguir.

3.1 Reformulação como um PMRE

Para a obtenção das condições de KKT, consideram-se as variáveis do problema de nível inferior dadas por: $\mathbf{p}^G, \mathbf{p}^C, \theta$. As condições de KKT são compostas pelas restrições associadas às derivadas em relação às variáveis de otimização do problema e as condições de complementaridade, discutidas a seguir.

Derivadas em relação às Variáveis do Problema

A obtenção de regras gerais em algumas das derivadas é complexa, em virtude principalmente das relações temporais e espaciais de algumas variáveis. As derivadas obtidas estão dadas de (12) a (18):

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial p_{tib}^G} = \lambda_{tib}^O - \lambda_{tn} + \pi_{tib}^{Gmax} - \pi_{tib}^{Gmin}, \quad \forall t, \forall n, \forall i \in G_n^I, i \notin \mathcal{T}, \forall b \quad (12)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial p_{tjb}^G} = \lambda_{tjb}^G - \lambda_{tn} + \pi_{tjb}^{Gmax} - \pi_{tjb}^{Gmin}, \quad \forall t, \forall n, \forall j \in G_n^J, j \notin \mathcal{T}, \forall b \quad (13)$$

$$DT_{tl} = \begin{cases} \gamma_{(t+1)l}^{Gdw} - \gamma_{(t+1)l}^{Gup} \\ , \forall t = 1, \forall l, \forall b \\ \gamma_{tl}^{Gup} - \gamma_{(t+1)l}^{Gup} + \gamma_{(t+1)l}^{Gdw} - \gamma_{tl}^{Gdw} \\ , \forall t : t \neq 1, t \neq NT, \forall l, \forall b \\ \gamma_{tl}^{Gup} - \gamma_{tl}^{Gdw} \\ , t = NT, \forall l, \forall b \end{cases} \quad (14)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial p_{tib}^C} = \lambda_{tib}^O - \lambda_{tn} + \pi_{tib}^{Gmax} - \pi_{tib}^{Gmin} + DT_{ti}, \quad \forall t, \forall n, \forall i \in G_n^I \cap \mathcal{T}, \forall b \quad (15)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial p_{tjb}^C} = \lambda_{tjb}^G - \lambda_{tn} + \pi_{tjb}^{Gmax} - \pi_{tjb}^{Gmin} + DT_{tj}, \quad \forall t, \forall n, \forall j \in G_n^J \cap \mathcal{T}, \forall b \quad (16)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial p_{tkb}^C} = -\lambda_{tkb}^C + \lambda_{tn} + \pi_{tkb}^{Cmax} - \pi_{tkb}^{Cmin}, \quad \forall t, \forall n, \forall k \in G_n^C, \forall b \quad (17)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \theta_{tn}} = \begin{cases} \left. \begin{aligned} & \sum_{m \in N_n} B_{nm} (\lambda_{tn} - \lambda_{tm}) \\ & + \sum_{m \in N_n} B_{nm} (\alpha_{tnm}^{min} - \alpha_{tnm}^{min}) \\ & + \sum_{m \in N_n} B_{nm} (\alpha_{tnm}^{max} - \alpha_{tnm}^{max}) \\ & + \beta_t^0 + \sum_{m \in N_n} -\beta_{tn}^{min} + \beta_{tn}^{max} \end{aligned} \right\}, \forall t, n = 1 \\ \left. \begin{aligned} & \sum_{m \in N_n} B_{nm} (\lambda_{tn} - \lambda_{tm}) \\ & + \sum_{m \in N_n} B_{nm} (\alpha_{tnm}^{min} - \alpha_{tnm}^{min}) \\ & + \sum_{m \in N_n} B_{nm} (\alpha_{tnm}^{max} - \alpha_{tnm}^{max}) \\ & + \sum_{m \in N_n} -\beta_{tn}^{min} + \beta_{tn}^{max} \end{aligned} \right\}, \forall t, \forall n, n \neq 1 \end{cases} \quad (18)$$

Restrições de complementaridade

As restrições de complementaridade associadas às restrições de (4) a (11) são dadas de (19) a (25), respectivamente:

$$\begin{aligned} & 0 \leq p_{tjb}^G \perp \pi_{tjb}^{Gmin} \geq 0, \forall t \in T, \forall j \in J, \forall b \in B \\ & 0 \leq P_{tjb}^{Gmax} - p_{tjb}^G \perp \pi_{tjb}^{Gmax} \geq 0, \forall t \in T, \forall j \in J, \forall b \in B \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & 0 \leq p_{tib}^G \perp \pi_{tib}^{Gmin} \geq 0, \forall t \in T, \forall i \in I, \forall b \in B \\ & 0 \leq P_{tib}^{Gmax} - p_{tib}^G \perp \pi_{tib}^{Gmax} \geq 0, \forall t \in T, \forall i \in I, \forall b \in B \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq p_{tkb}^C \perp \pi_{tkb}^{Cmin} \geq 0, \forall t \in T, \forall k \in K, \forall b \in B \\
0 &\leq P_{tkb}^{Cmax} - p_{tkb}^C \perp \pi_{tkb}^{Cmax} \geq 0, \forall t \in T, \forall k \in K, \forall b \in B
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq B_{nm} (\theta_{tn} - \theta_{tm}) + P_{nm}^{max} \perp \alpha_{tnm}^{min} \geq 0, \\
&\forall t \in T, \forall n \in N, \forall m \in N_n \\
0 &\leq P_{nm}^{max} - B_{nm} (\theta_{tn} - \theta_{tm}) \perp \alpha_{tnm}^{max} \geq 0, \\
&\forall t \in T, \forall n \in N, \forall m \in N_n
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \theta_{tn} + \pi \perp \beta_{tn}^{min} \geq 0, \forall t \in T, \forall n \in N \\
0 &\leq \pi - \theta_{tn} \perp \beta_{tn}^{max} \geq 0, \forall t \in T, \forall n \in N
\end{aligned} \tag{23}$$

$$0 \leq R_l^{Gup} + \sum_{b \in B} p_{(t-1)lb}^G - \sum_{b \in B} p_{tlb}^G \perp \gamma_{tl}^{Gup} \geq 0, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
&\forall t \in T, t \neq 1, \forall l \in \mathcal{T} \\
0 &\leq R_l^{Gdw} + \sum_{b \in B} p_{tlb}^G - \sum_{b \in B} p_{(t-1)lb}^G \perp \gamma_{tl}^{Gdw} \geq 0, \\
&\forall t \in T, t \neq 1, \forall l \in \mathcal{T}
\end{aligned} \tag{25}$$

O PMRE resultante é, portanto, formulado pela maximização do lucro dado em (1), sujeito às restrições do problema primal original, as suas respectivas derivadas e suas respectivas restrições de complementaridade, dadas de (3) – (25). Este problema possui duas fontes de não linearidades: i) as condições de complementaridade de KKT utilizadas envolvem produtos bi-lineares (multiplicação da restrição pela respectiva variável dual) e ii) a função objetivo (1) possui um produto bilinear envolvendo o preço de equilíbrio de mercado e a potência produzida pela companhia *price-maker*.

As não linearidades descritas em i) são tratadas neste trabalho por meio da técnica de otimização linear inteira mista, utilizando-se o método do *big-M* (Fortuny-Amat and McCarl, 1981). As não linearidades descritas em ii) são tratadas basicamente neste trabalho por meio da utilização do teorema da dualidade forte associado ao problema de nível inferior (PEM) (Luenberger and Ye, 2008). As técnicas de linearização são detalhadas a seguir.

3.2 Linearização das Condições de Complementaridade do PMRE

As restrições de complementaridade de (19) até (25) não podem ser diretamente introduzidas em pacotes para a solução de problemas de otimização linear inteira mista, uma vez que tais pacotes em geral não dão suporte à solução de problemas com tais restrições. Neste trabalho propõe-se a técnica do *Big-M* para a reformulação destas restrições. Por esta técnica, as restrições de complementaridade do tipo $0 \leq P \perp Q \geq 0$ podem ser reescritas por meio de restrições de desigualdade (Fortuny-Amat and McCarl, 1981), conforme:

$$\begin{aligned}
P &\leq \mu M \\
Q &\leq (1 - \mu) M \\
P &\geq 0, Q \geq 0 \\
\mu &\in \{0, 1\},
\end{aligned} \tag{26}$$

em que M é um numero suficientemente grande.

Assim, todas restrições de complementaridade de (19) até (25) devem ser reescritas utilizando a formulação equivalente dada em (26).

3.3 Linearização da Função Objetivo do PMRE

A linearização do termo bilinear $\lambda_{tn} p_{tjb}^G$ da função objetivo do problema de nível superior tem sido feita na literatura

(Ruiz and Conejo, 2009) por meio da utilização do teorema da dualidade forte aplicado do problema de nível inferior, o qual afirma que, na solução ótima, a função objetivo primal deste problema deve igualar-se a sua respectiva função objetivo dual (Luenberger and Ye, 2008).

A construção da função objetivo dual de um problema de otimização linear é detalhada em (Arenales, M. et al., 2015). Assim, a função objetivo do problema dual associado ao problema de nível inferior é dada conforme (27):

$$\begin{aligned}
D = & - \sum_{tjb} P_{tjb}^{Gmax} \pi_{tjb}^{Gmax} - \sum_{tib} P_{tib}^{Gmax} \pi_{tib}^{Gmax} + \\
& - \sum_{tkb} P_{tkb}^{Cmax} \pi_{tkb}^{Cmax} - \sum_{tn(m \in N_n)} P_{nm}^{max} \alpha_{tnm}^{min} + \\
& - \sum_{tn(m \in N_n)} P_{nm}^{max} \alpha_{tnm}^{max} - \sum_{tn} \pi \beta_{tn}^{min} - \sum_{tn} \pi \beta_{tn}^{max} + \\
& - \sum_{(t:t \neq 1)(l \in \mathcal{T})} R_l^{Gup} \gamma_{tl}^{Gup} - \sum_{(t:t \neq 1)(l \in \mathcal{T})} R_l^{Gdw} \gamma_{tl}^{Gdw}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Igualando-se as funções objetivo primal e dual e isolando-se o termo $\sum_{tjb} \lambda_{tjb}^G p_{tjb}^G$, tem-se a igualdade (28):

$$\begin{aligned}
\sum_{tjb} \lambda_{tjb}^G p_{tjb}^G = & - \sum_{tib} \lambda_{tib}^O p_{tib}^G + \sum_{tkb} \lambda_{tkb}^C p_{tkb}^G + \\
& - \sum_{tjb} P_{tjb}^{Gmax} \pi_{tjb}^{Gmax} - \sum_{tib} P_{tib}^{Gmax} \pi_{tib}^{Gmax} + \\
& - \sum_{tkb} P_{tkb}^{Cmax} \pi_{tkb}^{Cmax} - \sum_{tn(m \in N_n)} P_{nm}^{max} \alpha_{tnm}^{min} + \\
& - \sum_{tn} \pi \beta_{tn}^{min} - \sum_{tn(m \in N_n)} P_{nm}^{max} \alpha_{tnm}^{max} + \\
& - \sum_{tn} \pi \beta_{tn}^{max} - \sum_{(t:t \neq 1)(l \in \mathcal{T})} R_l^{Gup} \gamma_{tl}^{Gup} + \\
& - \sum_{(t:t \neq 1)(l \in \mathcal{T})} R_l^{Gdw} \gamma_{tl}^{Gdw}
\end{aligned} \tag{28}$$

A expressão (28) será utilizada na linearização mais adiante. Para a linearização do termo bilinear $\lambda_{tn} p_{tjb}^G$ da função objetivo do problema de nível superior, utiliza-se também a condição de KKT (13), a qual é reescrita em (29), isolando-se o termo associado a λ_{tn} :

$$\lambda_{tn} = \lambda_{tjb}^G + \pi_{tjb}^{Gmax} - \pi_{tjb}^{Gmin}, \forall t, \forall n, \forall j \in G_n^J, \forall b \tag{29}$$

Multiplicando-se a expressão (29) por p_{tjb}^G e somando-se os termos para $\forall t, \forall n, \forall j \in G_n^J, \forall b$, chega-se à expressão:

$$\begin{aligned}
\sum_{tn(j \in G_n^J)b} \lambda_{tn} p_{tjb}^G = & \sum_{tn(j \in G_n^J)b} \lambda_{tjb}^G p_{tjb}^G + \sum_{tn(j \in G_n^J)b} \pi_{tjb}^{Gmax} p_{tjb}^G + \\
& - \sum_{tn(j \in G_n^J)b} \pi_{tjb}^{Gmin} p_{tjb}^G
\end{aligned} \tag{30}$$

A expressão acima pode ainda ser reescrita conforme (31), a qual será também utilizada mais adiante no processo de linearização. Cabe ressaltar que o primeiro termo à esquerda da igualdade corresponde ao termo já linearizado em (28) e que os dois termos seguintes são ainda bilineares.

$$\begin{aligned}
\sum_{tn(j \in G_n^J)b} \lambda_{tn} p_{tjb}^G = & \sum_{tjb} \lambda_{tjb}^G p_{tjb}^G + \sum_{tjb} \pi_{tjb}^{Gmax} p_{tjb}^G + \\
& - \sum_{tjb} \pi_{tjb}^{Gmin} p_{tjb}^G
\end{aligned} \tag{31}$$

Os dois últimos são linearizados a seguir, utilizando-se a restrição de complementaridade descrita em (19), por meio

da qual se chega às igualdades:

$$\begin{aligned} \pi_{tjb}^{Gmin} p_{tjb}^G &= 0, \forall t \in T, \forall j \in J, \forall b \in B \\ \pi_{tjb}^{Gmax} P_{tjb}^{Gmax} &= \pi_{tjb}^{Gmax} p_{tjb}^G, \forall t \in T, \forall j \in J, \forall b \in B \end{aligned} \quad (32)$$

Substituindo-se (28) e (32) em (31), chega-se à expressão final que lineariza o termo bilinear na função objetivo do problema de nível superior, dada por:

$$\begin{aligned} \sum_{tn(j \in G_n^d)b} \lambda_{tn} p_{tjb}^G &= - \sum_{tib} \lambda_{tib}^O p_{tib}^G + \sum_{tkb} \lambda_{tkb}^C p_{tkb}^C + \\ &- \sum_{tib} P_{tib}^{Gmax} \pi_{tib}^{Gmax} - \sum_{tkb} P_{tkb}^{Cmax} \pi_{tkb}^{Cmax} + \\ &- \sum_{tn(m \in N_n)} P_{nm}^{max} \alpha_{tnm}^{min} + \\ &- \sum_{tn(m \in N_n)} P_{nm}^{max} \alpha_{tnm}^{max} + \\ &- \sum_{tn} \pi \beta_{tn}^{min} - \sum_{tn} \pi \beta_{tn}^{max} + \\ &- \sum_{(t:t \neq 1)(l \in T)} R_l^{Gup} \gamma_{tl}^{Gup} + \\ &- \sum_{(t:t \neq 1)(l \in T)} R_l^{Gdw} \gamma_{tl}^{Gdw} \end{aligned} \quad (33)$$

3.4 Modelo de um único nível equivalente

O PMRE linearizado, equivalente ao problema bi-nível original, é sintetizado em (34), e incluindo-se as restrições de complementaridade linearizadas conforme (26):

$$\begin{aligned} Max \quad &(33) - \sum_{tn(j \in G_n^d)b} \left(C \left(p_{tjb}^G \right) \right) \\ s.a : \quad &(3) \text{ até } (11) \\ &(12) \text{ até } (18) \end{aligned} \quad (34)$$

Os resultados obtidos com o modelo proposto são discutidos na Seção 4.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção o modelo de cálculo de ofertas estratégicas proposto, formulado em (34) é avaliado para um sistema teste.

4.1 Sistema Teste Utilizado

O sistema teste utilizado é composto por 32 unidades geradoras, das quais, as unidades de 11 a 14 e a unidade 31 pertencem à companhia *price-maker*, estudada. O sistema possui ainda 17 consumidores. O sistema de transmissão possui 24 barras (Wong et al., 1999; Conejo et al., 2010), sendo que sua estrutura é mostrado na Figura 1. As unidades geradoras estão conectadas da seguinte forma: 1 e 2 estão conectadas à barra 1, 3-4 estão na barra 15, 5-7 estão na barra 23, 8 está na barra 22, 9-11 estão na barra 18, 12-14 estão na barra 21, 15-16 estão na barra 16, 17-19 estão na barra 15, 20 está na barra 7, 21-30 estão na barra 13, 31 está na barra 2 e 32 está na barra 23. O problema é discretizado em base horária, tendo, portanto, 24 períodos. Considera-se que tanto os geradores como os consumidores fornecem 4 blocos de ofertas/lances no mercado do dia seguinte. A estrutura de preço/quantidade de cada bloco não é mostrada aqui, em função do grande volume de informações envolvidas.

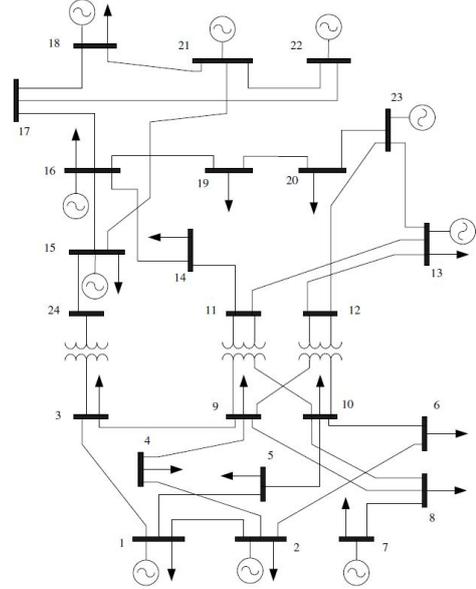


Figure 1. Sistema Teste 24 Barras. Fonte: (Conejo et al., 2010).

4.2 Resultados Obtidos

A Tabela 1 mostra os despachos de geração obtidos com as potências geradas pela companhia *price-maker* e pelas demais companhias, bem como as potências consumidas. Verifica-se que o balanço de potência é satisfeito para cada período. Verifica-se que em alguns períodos as outras companhias não geram energia no mercado, especialmente nos períodos de carga leve, em que a companhia *price-maker* é capaz de suprir toda a demanda.

Table 1. Despacho horário de geração e consumo.

| Tempo | Potência gerada companhia <i>price-maker</i> | Potência gerada demais companhias | Potência consumida |
|-------|--|--------------------------------------|-----------------------|
| 1 | 1885.86 | 0 | 1885.86 |
| 2 | 1829.448 | 0 | 1829.448 |
| 3 | 1742.304 | 0 | 1742.304 |
| 4 | 1713.288 | 0 | 1713.288 |
| 5 | 1713.288 | 0 | 1713.288 |
| 6 | 1891.164 | 0 | 1891.164 |
| 7 | 1894.4 | 459.232 | 2353.632 |
| 8 | 1894.4 | 840.928 | 2735.328 |
| 9 | 1894.4 | 1127.128 | 3021.528 |
| 10 | 1623.364 | 1430 | 3053.364 |
| 11 | 1894.4 | 1158.96 | 3053.364 |
| 12 | 1894.4 | 1127.12 | 3021.528 |
| 13 | 1894.4 | 1127.12 | 3021.528 |
| 14 | 1894.4 | 1127.12 | 3021.528 |
| 15 | 1894.4 | 1063.54 | 2957.94 |
| 16 | 1894.4 | 1063.54 | 2957.94 |
| 17 | 1718.752 | 1430 | 3148.752 |
| 18 | 1750.612 | 1430 | 3180.612 |
| 19 | 1750.612 | 1430 | 3180.612 |
| 20 | 1623.364 | 1430 | 3053.364 |
| 21 | 1879.402 | 1014.95 | 2894.352 |
| 22 | 1890.1 | 749.9 | 2640 |
| 23 | 1836.8 | 317.2 | 2154 |
| 24 | 1829.448 | 0 | 1829.448 |

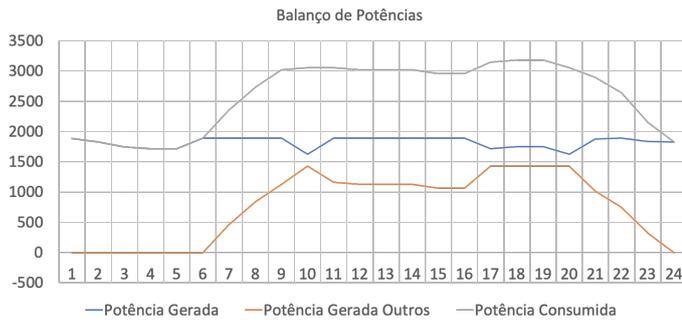


Figure 2. Balanço de potência ativa, perfil de geração das companhias e demanda.

A Tabela 2 mostra os preços médios ofertados pela companhia *price-maker*, os preços médios ofertados pelas demais companhias, os preços ofertados pelos consumidores e o preço de equilíbrio de mercado. Percebe-se que os preços médios associados à companhia geradora são exatamente iguais aos preços de equilíbrio de mercado. Isso ocorre, porque com a maximização dos lucros da companhia, a melhor estratégia de ofertas da companhia *price-maker* é fornecer a energia a um preço exatamente igual ao preço de equilíbrio de mercado. Assim, de fato, percebe-se que a companhia *price-maker* dita os preços de mercado, conforme esperado. Do ponto de vista das demais companhias, nota-se que os valores de preços médios em alguns períodos são superiores aos preços de equilíbrio. Neste período, especialmente em carga leve, estas companhias não fornecem energia no leilão, conforme mostrado na Tabela 1, anterior. Do ponto de vista do consumidor, é possível observar que os preços médios estão sempre acima dos valores de preços de equilíbrio em cada período. Com esta estratégia de lances, os consumidores recebem a demanda total solicitada para este caso investigado. A Tabela 3



Figure 3. Perfil diários dos preços médios de ofertas das companhias, de lances dos consumidores e preço de equilíbrio de mercado.

mostra a geração ofertada pela companhia *price-maker* e sua respectiva capacidade de geração, em cada período. Desta tabela, verifica-se que o modelo de COE proposto neste trabalho decide que nem sempre é melhor ofertar ao leilão do dia seguinte toda a sua capacidade de geração. De fato, em alguma situações, pode ser que para uma maior oferta da companhia *price-maker* no leilão, ocorra uma redução de preços, em função de um maior volume de geração no mercado, ocasionando uma redução de lucros

da companhia. Como o lucro é dado pelo produto entre as gerações ofertadas em cada período e os respectivos preços de equilíbrio de mercado, o modelo precisa ponderar entre preços de equilíbrio e ofertas de modo a maximizar o lucro da companhia. Para companhias que não são do tipo *price-maker*, essa ponderação não é necessária, uma vez que tais companhias não conseguem alterar os preços de equilíbrio com suas ofertas no mercado. Para essas companhias, quanto maior a produção no mercado, maiores serão também seus lucros.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho tem como objetivo propor um modelo de Cálculo de Ofertas Estratégicas (COE) em que um companhia geradora do tipo *price-maker* calcula os preços e quantidades que esta companhia deve ofertar no leilão do dia seguinte, de modo a maximizar os seus lucros no leilão. O modelo proposto é inicialmente descrito por um problema de otimização bi-nível, no qual o nível superior busca a maximização dos lucros e o nível inferior busca representar a operação do mercado do dia seguinte, por meio do seu Procedimento de Equilíbrio de Mercado (PEM). A técnica de solução proposta para o problema de otimização bi-nível envolve a reformulação do problema bi-nível em um problema equivalente, no qual a problema de nível inferior é substituído por suas condições de otimalidade de KKT. O problema equivalente resultante é conhecido na literatura como um Programa Matemático com Restrições de Equilíbrio (PMRE). O PMRE proposto é um problema de otimização linear inteiro-misto, o qual é resolvido neste trabalho utilizando-se o solver *CPLEX* na plataforma *CPLEX-Studio* da IBM. O modelo proposto

Table 2. Preços médios ofertados por cada companhia e pelos consumidores e preços de equilíbrio de mercado em cada período.

| Tempo | Preço médio companhia <i>price-maker</i> | Preço médio das demais companhias | Preço médio consumidores | Preço de Equilíbrio |
|-------|--|-----------------------------------|--------------------------|---------------------|
| 1 | 79.8 | 91,85 | 94.5204 | 79,84 |
| 2 | 73.92 | 91,85 | 89.9327 | 73,92 |
| 3 | 72.688 | 91,85 | 88.2291 | 72,68 |
| 4 | 72.688 | 91,85 | 88.1235 | 72,68 |
| 5 | 73.92 | 91,85 | 89.5103 | 73,92 |
| 6 | 82 | 91,85 | 109.048 | 82 |
| 7 | 85 | 91,85 | 127.182 | 85 |
| 8 | 88.4 | 91,85 | 140.943 | 88,4 |
| 9 | 90.2 | 91,85 | 143.28 | 90,2 |
| 10 | 105.37 | 91,85 | 143.38 | 105,376 |
| 11 | 90.2 | 91,85 | 141.99 | 90,2 |
| 12 | 90.19 | 91,85 | 141.89 | 90,2 |
| 13 | 90.2 | 91,85 | 141.89 | 90,2 |
| 14 | 90.2 | 91,85 | 139.11 | 90,2 |
| 15 | 90.00 | 91,85 | 138.90 | 90 |
| 16 | 90 | 91,85 | 147.23 | 90 |
| 17 | 109.76 | 91,85 | 149.25 | 109,76 |
| 18 | 109.76 | 91,85 | 149.36 | 109,76 |
| 19 | 109.76 | 91,85 | 149.36 | 109,76 |
| 20 | 105.37 | 91,85 | 143.38 | 105,376 |
| 21 | 90.00 | 91,85 | 135.91 | 90 |
| 22 | 88.4 | 91,85 | 123.96 | 88,4 |
| 23 | 85 | 91,85 | 109.03 | 85 |
| 24 | 77.616 | 91,85 | 94.097 | 77,616 |

Table 3. Geração ofertada pela companhia price-maker e sua respetiva capacidade de geração, em cada período.

| Tempo | Geração ofertada pela companhia price-maker | Capacidade de geração da companhia price-maker |
|-------|---|--|
| 1 | 1885.86 | 1894,4 |
| 2 | 1829.448 | 1894,4 |
| 3 | 1742.304 | 1894,4 |
| 4 | 1713.288 | 1894,4 |
| 5 | 1713.288 | 1894,4 |
| 6 | 1891.164 | 1894,4 |
| 7 | 1894.4 | 1894,4 |
| 8 | 1894.4 | 1894,4 |
| 9 | 1894.4 | 1894,4 |
| 10 | 1623.364 | 1894,4 |
| 11 | 1894.4 | 1894,4 |
| 12 | 1894.4 | 1894,4 |
| 13 | 1894.4 | 1894,4 |
| 14 | 1894.4 | 1894,4 |
| 15 | 1894.4 | 1894,4 |
| 16 | 1894.4 | 1894,4 |
| 17 | 1718.752 | 1894,4 |
| 18 | 1750.612 | 1894,4 |
| 19 | 1750.612 | 1894,4 |
| 20 | 1623.364 | 1894,4 |
| 21 | 1879.402 | 1894,4 |
| 22 | 1890.1 | 1894,4 |
| 23 | 1836.8 | 1894,4 |
| 24 | 1829.448 | 1894,4 |

foi aplicado à solução de um problema de COE para um sistema teste investigado, envolvendo 32 unidades geradoras, das quais 15 são da companhia price-maker estudada, e 17 consumidores. Os resultados mostram que os preços horários ofertados pela companhia price-maker no leilão seguem os valores dos preços de equilíbrio de mercado em cada período, ou seja, a companhia de fato dita os preços de mercado. Os resultados mostram ainda que nem sempre é interessante para a companhia geradora ofertar toda a sua capacidade no leilão. Em alguns períodos, a companhia oferta valores menores que a sua capacidade, pois ofertas maiores poderiam reduzir os preços de equilíbrio, reduzindo também o lucro da companhia no mercado. Assim, o modelo e a técnica de solução propostos se mostram eficientes para a solução do problema de COE para companhias price-maker. Trabalhos futuros envolvem a implementação de restrições relacionadas à representação de unidades geradoras hidrelétricas e eólicas no portfólio da companhia.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pelo financiamento de parte do projeto.

REFERENCES

Arenales, M., Armentano, V., Morábito, R., and Yanasse, H. (2015). *Pesquisa operacional*. GEN LTC, edição: 2 edition.

Arroyo, J. and Conejo, A. (2002). Multiperiod auction for a pool-based electricity market. *IEEE Transactions on Power Systems*, 17(4), 1225–1231. doi:10.1109/TPWRS.2002.804952.

Conejo, A.J., Carrión, M., and Morales, J.M. (2010). *Decision Making Under Uncertainty in Electricity Markets*, volume 153 of *International Series in Operations Research & Management Science*. Springer US, Boston, MA. URL <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-7421-1>.

Dai, T. and Qiao, W. (2015). Optimal Bidding Strategy of a Strategic Wind Power Producer in the Short-Term Market. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 6(3), 707–719. doi:10.1109/TSTE.2015.2406322.

de la Torre, S., Contreras, J., and Conejo, A. (2004). Finding multiperiod Nash equilibria in pool-based electricity markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, 19(1), 643–651. doi:10.1109/TPWRS.2003.820703.

Fortuny-Amat, J. and McCarl, B. (1981). A Representation and Economic Interpretation of a Two-Level Programming Problem. *The Journal of the Operational Research Society*, 32(9), 783–792. doi:10.2307/2581394. URL <https://www.jstor.org/stable/2581394>.

Gabriel, S.A., Conejo, A.J., Fuller, J.D., Hobbs, B.F., and Ruiz, C. (2013). *Complementarity Modeling in Energy Markets*, volume 180 of *International Series in Operations Research & Management Science*. Springer New York, New York, NY. URL <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-6123-5>.

Luenberger, D.G. and Ye, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, New York, NY, 3rd edition edition.

Luo, Z.Q., Pang, J.S., and Ralph, D. (1996). *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 1 edition edition.

Motto, A., Galiana, F., Conejo, A., and Arroyo, J. (2002). Network-constrained multiperiod auction for a pool-based electricity market. *IEEE Transactions on Power Systems*, 17(3), 646–653. doi:10.1109/TPWRS.2002.800909.

Pereira, M.V., Granville, S., Fampa, M.H.C., Dix, R., and Barroso, L.A. (2005). Strategic bidding under uncertainty: a binary expansion approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(1), 180–188. doi:10.1109/TPWRS.2004.840397.

Ruiz, C. and Conejo, A.J. (2009). Pool Strategy of a Producer With Endogenous Formation of Locational Marginal Prices. *IEEE Transactions on Power Systems*, 24(4), 1855–1866. doi:10.1109/TPWRS.2009.2030378.

Wong, P., Albrecht, P., Allan, R., Billinton, R., Chen, Q., Fong, C., Haddad, S., Li, W., Mukerji, R., Patton, D., Schneider, A., Shahidehpour, M., and Singh, C. (1999). The IEEE Reliability Test System-1996. A report prepared by the Reliability Test System Task Force of the Application of Probability Methods Subcommittee. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(3), 1010–1020. doi:10.1109/59.780914.