

## ESTACIONAMENTO PARALELO AUTÔNOMO DE VEÍCULOS LEVES DE PASSEIO

EDUARDO V. ARGENTO\*RENAN P. VIEIRA\*TÉO C. REVOREDO\*

*\*Departamento de Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, RJ*

Email: eduardo.argento@uerj.br, renan.porto.vieira@gmail.com, teorevored@uerj.br

**Abstract**— Autonomous vehicles have great potential to solve various problems of modern transportation and contribute to the development of smart cities. Trajectory planning stands as a cornerstone of the viable improvements and a natural starting point for applications such as the extinction of traffic signs, the coordination of the shared use of different transport modes and the optimization of parking spaces use. In this context, this work proposes an algorithm for car-like trajectory planning, which takes the vehicle from an initial to a final pose through a smooth trajectory, avoiding any obstacles along the way. It also addresses autonomous parallel parking, with continuous movement from the beginning to the end of the trajectory, in addition to a simple example of search and parking in available spaces. The results prove the effectiveness of the model and the feasibility of the proposal as a starting point for broader studies.

**Keywords**— Car-like robots, Trajectory planning, parallel parking.

**Resumo**— Veículos autônomos têm grande potencial para solucionar vários problemas do transporte moderno e contribuir para o desenvolvimento das cidades inteligentes. Como pedra fundamental das melhorias cabíveis, figura o planejamento de trajetórias, ponto de partida para aplicações tais como a extinção dos sinais de trânsito, a monitoração da frota e dos ativos através da cidade e a otimização do aproveitamento de espaços de estacionamento. Nesse cenário, este trabalho propõe um algoritmo para o planejamento de da trajetória, além de um exemplo simples de escolha e estacionamento em vagas disponíveis. Os resultados comprovam a eficácia do modelo e a exequibilidade da proposta como ponto de partida para estudos mais amplos.

**Palavras-chave**— Robôs tipo carro, Planejamento de trajetórias, Estacionamento paralelo.

## 1 Introdução

Em 2008, pela primeira vez na história, mais da metade da população mundial passou a viver em cidades. Na década seguinte, o aumento populacional nas regiões urbanas se manteve e a tendência de crescimento deve perdurar para os próximos anos. Em Nova Delhi, na Índia, por exemplo, prevê-se um crescimento populacional de 52,01% entre 2018 e 2035, enquanto em São Paulo o aumento é estimado em 13,2%. (United Nations and Affairs, 2018).

Essa expansão é impulsionada pelo aumento da população e pela mudança ascendente na porcentagem de pessoas que vivem em áreas urbanas, fatores que devem adicionar 2,5 bilhões à população urbana do mundo (68%) até 2050 (United Nations and Affairs, 2019).

Assim, o tema urbano ocupa posição de destaque na agenda global. Entretanto, a urbanização intensa gera perdas de funcionalidades básicas dos centros urbanos, afetando de maneira significativa a qualidade de vida da população. Como exemplos, citam-se deficiências na gestão de resíduos, desperdícios e má gestão dos recursos naturais, restrições nos sistemas de educação, saúde e segurança pública, dificuldades logísticas e limitações nos sistemas de mobilidade urbana e de transportes (Weiss et al., 2015). Nesta última questão, os veículos autônomos têm grande potencial para solucionar vários problemas atuais do transporte moderno (Lim and Taeihagh, 2018) e contribuir para o desenvolvimento das cidades inteligentes.

A sua ampla utilização tende a resultar em um menor impacto ambiental por meio da redução de emissão de poluentes e do consumo de energia, além de proporcionar resultados econômicos e sociais positivos pela maior eficiência no gerenciamento do tráfego, na segurança rodoviária e na acessibilidade ao transporte. Isso é possível devido às características de conectividade ubíqua e pervasiva entre diferentes redes e dispositivos heterogêneos em cidades inteligentes. Assim, os veículos autônomos comunicar-se-ão entre si e com a infraestrutura de telecomunicações da cidade, permitindo a otimização do tráfego. O conceito de autonomia não se restringe aos carros particulares. Com finalidades diversas, carros, caminhões, ônibus, navios, trens, VANTs (Veículo Aéreo Não-Tripulado), aviões e helicópteros transportam pessoas e materiais dentro e fora das cidades. A logística por trás desses veículos e dos serviços que eles constituem é parte passível de otimização e fundamental para a melhoria da eficiência da cidade. Nessa conjuntura, a movimentação autônoma e o automatismo de sistemas relacionados são assuntos importantes. Extinção de sinais de trânsito, coordenação do uso compartilhado dos diferentes modais, monitoração da frota e dos ativos através da cidade, otimização do abastecimento de combustíveis e tecnologias para recarga de baterias de veículos elétricos, assim como o aproveitamento de espaços de estacionamento são alguns exemplos das necessidades a serem atendidas.

Como pedra fundamental das melhorias cabíveis por intermédio da movimentação autônoma,

figura o planejamento de trajetórias, definido como o processo de determinar uma lei de movimento que permita a um robô móvel se movimentar de uma pose inicial até uma pose final, sujeito às restrições. Trata-se de um tema fundamental em robótica móvel, existente em inúmeras aplicações tais como o planejamento de trajetória no estacionamento de veículos autônomos (Moon et al., 2019; Zhang et al., 2020; Ye et al., 2019; Rashid et al., 2019).

O planejamento e seguimento de trajetórias para robôs móveis do tipo carro (CLMR, do inglês *car-like mobile robots*), é um tema bem abordado na literatura, porém ainda em aberto. Além dos motivos já descritos, outra razão dos inúmeros estudos que abordam este tipo de veículo são as dificuldades que provêm das suas restrições não-holonômicas, assumindo-se que não há deslizamento das rodas. Nestes sistemas, as equações diferenciais que descrevem a cinemática não são integráveis, o que implica que os graus de liberdade totais do mesmo se tornam maiores do que os que são controláveis, o que tende a dificultar o planejamento de trajetórias (Li and Shao, 2015).

Nesse contexto, este trabalho propõe um algoritmo para o planejamento de trajetórias para veículos leves de passeio, que o leve, de maneira suave, de uma pose inicial a uma pose final, desviando-o de eventuais obstáculos pelo caminho. Como foco de aplicação, apresenta-se o estacionamento autônomo do veículo, com movimentação contínua do início ao fim da trajetória. O trabalho é organizado da seguinte maneira: a Seção 2 apresenta a modelagem cinemática do veículo, a Seção 3 discorre sobre o modelo utilizado para representar o ambiente no qual o veículo se desloca e os obstáculos, enquanto a Seção 4 apresenta o algoritmo implementado para o planejamento de trajetórias. A Seção 5 apresenta resultados de simulação para o estacionamento autônomo e na Seção 6 são realizadas considerações finais.

## 2 Modelo cinemático do veículo

A cinemática do veículo é baseada no modelo de bicicleta (Pinheiro, 2009), conforme exemplificado na Figura 1(a), sendo a dinâmica desconsiderada, supondo-se que para a geração de trajetórias em baixas velocidades a sua influência é desprezível (Zhu and Rajamani, 2006).

O raio de curvatura da trajetória é definido com base em um ponto de referência do veículo (centro do eixo traseiro), ponto P na Figura 1(a), e é função do ângulo de esterçamento do automóvel de acordo com a Equação 1, sujeito às restrições apresentadas na Equação 2, cujas variáveis e parâmetros são definidos na Tabela 1:

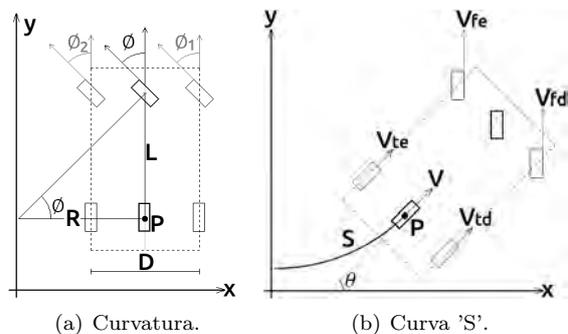


Figura 1: Modelo cinemático

$$R = \frac{L}{\tan(\phi)} \quad (1)$$

$$\phi_{min} \leq \phi \leq \phi_{max} \quad (2)$$

Tabela 1: Tabela de Parâmetros

Parâmetros	Descrição
$\phi$	Ângulo de Esterçamento Modelo bicicleta
$\phi_1$	Ângulo de Esterçamento da roda 1
$\phi_2$	Ângulo de Esterçamento da roda 2
$D$	Distância entre as rodas do eixo dianteiro
$L$	Distância entre os eixos do veículo
$R$	Raio de curvatura instantâneo
$\theta$	Ângulo do veículo em relação ao eixo x
$S$	Distância percorrida
$v$	Velocidade linear
$P$	Ponto de referência, centro do eixo traseiro

Principiando P como ponto de referência, a distância (S) percorrida pelo veículo é dada pela Equação 3. A sua derivada é apresentada na Equação 4:

$$S = R \cdot \theta \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{R} \quad (4)$$

Combinando-se as Equações 1 e 4 chega-se a:

$$\dot{x}(t) = v \cdot \cos(\theta(t)) \quad (5)$$

$$\dot{y}(t) = v \cdot \sin(\theta(t)) \quad (6)$$

$$v = \pm \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \quad (7)$$

Por fim,  $\theta$  e a sua derivada pode ser expressas em função de  $x$  e  $y$  como segue:

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \quad (8)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (9)$$

Uma vez que o veículo possui duas rodas por eixo, com distância significativa entre si, é necessário adaptar o modelo para que o ângulo de esterçamento das rodas dianteiras seja ligeiramente

diferente, uma vez que ambas possuem raio de curvatura distintos. Sem esta adaptação, o modelo não aproximaria de maneira exata a cinemática real do automóvel, fazendo-o derrapar. O arranjo geométrico utilizado é comum no automobilismo, chamada de Geometria de Ackermann (Mitchell et al., 2006).

Para determinar os ângulos de esterçamento de cada uma das rodas dianteiras,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , utiliza-se como referência uma roda hipotética central, que seria o equivalente da roda da bicicleta que fundamenta o modelo, cujo ângulo de esterçamento é denominado por  $\phi$ . Os ângulos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são calculados de acordo com as Equações 10 e 11.

$$\phi_1 = \arctan\left(\frac{l}{R + \frac{D}{2}}\right) \quad (10)$$

$$\phi_2 = \arctan\left(\frac{l}{R - \frac{D}{2}}\right) \quad (11)$$

Para que o veículo se movimente sem deslizamento das rodas, cada uma pode assumir velocidades diferentes, dependendo do trajeto (Hartani et al., 2009). Assim, definem-se as velocidades de cada roda separadamente, utilizando a notação  $v_{ij}$ , na qual  $i = f, t$  denota o eixo da roda (frontal ou traseira) e  $j = d, e$  o lado do veículo no qual a roda é situada (direito ou esquerdo). A partir da velocidade ( $v$ ) e distância ( $D$ ) do ponto  $P$ , é possível calcular as velocidades das rodas traseiras em função do raio de curvatura instantâneo ( $R$ ) da trajetória. As rodas dianteiras podem ser analisadas aos pares com a roda traseira do mesmo lado, tal como um modelo tipo bicicleta a parte. Os cálculos são realizados de acordo com as Equações 12, 13, 14 e 15.

$$v_{te} = v \cdot \left(1 - \frac{D}{2 \cdot R}\right) \quad (12)$$

$$v_{td} = v \cdot \left(1 + \frac{D}{2 \cdot R}\right) \quad (13)$$

$$v_{fe} = \frac{v_{te}}{\cos(\phi_2)} \quad (14)$$

$$v_{fd} = \frac{v_{td}}{\cos(\phi_1)} \quad (15)$$

### 3 Modelagem do ambiente

Para representar o ambiente no qual o veículo se movimenta utiliza-se um mapa com primitivas geométricas (Thrun, 2003). Esta abordagem permite uma representação consistente e de fácil interpretação, além de ser facilmente modelada em termos computacionais.

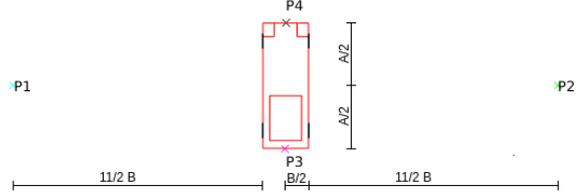
#### 3.1 Presença de obstáculos fixos

Para modelar obstáculos existentes do ambiente onde o veículo se movimenta, considera-se um automóvel de forma retangular, determina-se quatro

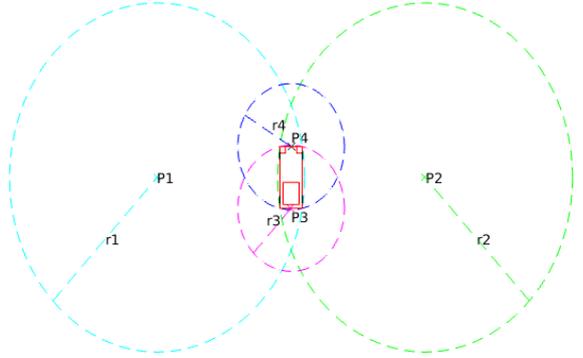
pontos de referência ( $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ ) e suas zonas de detecção conforme as Figuras 2(a) e 2(b), cujos parâmetros são descritos na Tabela 2.

**Tabela 2:** Tabela de parâmetros do veículo retangular

Parâmetros	Descrição
$A$	Comprimento do veículo
$B$	Largura do veículo
$f$	Distância entre o eixo traseiro e a traseira do veículo
$l$	Distância entre o eixo dianteiro e a dianteira do veículo
$P_1$	Ponto de referência de detecção 1
$P_2$	Ponto de referência de detecção 2
$P_3$	Ponto de referência de detecção 3
$P_4$	Ponto de referência de detecção 4



(a) Quatro pontos referenciais de detecção.



(b) Zonas de detecção.

**Figura 2:** Zonas de detecção de obstáculos.

Os raios das zonas de detecção são definidos pelas Equações 16 e 17.

$$r_1 = r_2 = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + (6,5 \cdot B)^2} \quad (16)$$

$$r_3 = r_4 = \sqrt{(A)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2} \quad (17)$$

As coordenadas dos pontos de referência são estabelecidas como apresentado na Equação 18.

$$P_n = (P_{n_x}, P_{n_y}) \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (18)$$

Dessa forma, para qualquer obstáculo  $\mathbf{O}$ , onde  $o \in \mathbf{O}$ ,  $o = (o_x, o_y)$ . A sua distância para os pontos de referência de detecção pode ser calculada por meio da Equação 19.

$$d_{P_n o} = \sqrt{(P_{n_x} - o_x)^2 + (P_{n_y} - o_y)^2} \quad (19)$$

$$n = 1, 2, 3, 4$$

Pelo exposto, dado uma trajetória, o caminho estará livre de obstáculos existentes no ambiente de movimentação, se satisfizer a Equação 20.

$$d_{P_{n_0}} > r_n \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (20)$$

Devido à área de detecção de obstáculos, é interessante redimensionar o veículo como segue:

$$B' = B + 2 \left( r_1 - \frac{13 \cdot B}{2} \right) \quad (21)$$

$$A' = 2 \cdot r_3 - A \quad (22)$$

$$f' = r_3 - L - l \quad (23)$$

$$l' = r_3 - L - f \quad (24)$$

#### 4 Planejamento de Trajetórias

O planejamento de trajetórias é realizado utilizando polinômios de quinto grau (Demirli and Khoshnejad, 2009) para duas variáveis de uma função espacial, de acordo com a Equação 25.

$$f(s) = \sum_{i=0}^5 C_i s^i \quad (25)$$

Na qual  $s$  denota a posição do veículo no espaço bidimensional, sendo o caminho dado por  $P(s)$ , de acordo com a Equação 26.

$$P(s) = (x(s), y(s)) \quad (26)$$

Impõe-se uma lei de movimento como segue:

$$s = s(t) \quad (27)$$

Desse modo, as velocidade e aceleração do veículo são dadas pelas Equações 28 e 29.

$$\dot{P} = \frac{dP}{ds} \dot{S}(t) \quad (28)$$

$$\ddot{P} = \frac{dP}{ds} \ddot{S}(t) + \frac{d^2P}{ds^2} \dot{S}(t) \quad (29)$$

Os parâmetros de entrada são geralmente as posições ( $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$  e  $x_f = x(t_f)$ ,  $y_f = y(t_f)$ ) e orientações ( $\theta_0 = \theta(t_0)$  e  $\theta_f = \theta(t_f)$ ), iniciais e finais.

Com a parametrização temporal, tem-se:

$$X = [x(t_0) \quad x(t_f) \quad \dot{x}(t_0) \quad \dot{x}(t_f) \quad \ddot{x}(t_0) \quad \ddot{x}(t_f)]^T$$

$$Y = [y(t_0) \quad y(t_f) \quad \dot{y}(t_0) \quad \dot{y}(t_f) \quad \ddot{y}(t_0) \quad \ddot{y}(t_f)]^T$$

$$T = \begin{bmatrix} t_0^5 & t_0^4 & t_0^3 & t_0^2 & t_0 & 1 \\ t_f^5 & t_f^4 & t_f^3 & t_f^2 & t_f & 1 \\ 5t_0^4 & 4t_0^3 & 3t_0^2 & 2t_0 & 1 & 0 \\ 5t_f^4 & 4t_f^3 & 3t_f^2 & 2t_f & 1 & 0 \\ 20t_0^3 & 12t_0^2 & 6t_0 & 2 & 0 & 0 \\ 20t_f^3 & 12t_f^2 & 6t_f & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_x = [C_{x5} \quad C_{x4} \quad C_{x3} \quad C_{x2} \quad C_{x1} \quad C_{x0}]^T$$

$$C_y = [C_{y5} \quad C_{y4} \quad C_{y3} \quad C_{y2} \quad C_{y1} \quad C_{y0}]^T$$

As matrizes  $X$  e  $Y$  contêm os valores de entrada, enquanto a matriz com as condições temporais é denominada  $T$ , e as dos coeficientes de parametrização são denotadas por  $C_x$  (dimensão  $x$ ) e  $C_y$  (dimensão  $y$ ). Para obter a trajetória desejada a partir das entradas disponíveis, basta usar as Equações 30 e 31 para cada variável, restrito, no entanto, à limitação de ângulo de esterçamento máximo ( $\phi_{max}$ ).

$$C_x = T^{-1} \times X \quad (30)$$

$$C_y = T^{-1} \times Y \quad (31)$$

##### 4.1 Escolha de trajetórias

A escolha das trajetórias factíveis é feita de acordo com a variação dos parâmetros a seguir. Os parâmetros temporais são definidos por  $t_0$  e  $t_f$ , satisfazendo as Equações 32 e 33.

$$t_f > t_0 \quad (32)$$

$$t_f - t_0 \geq \frac{\sqrt{(x_f - x_0)^2 + (y_f - y_0)^2}}{|v|} \quad (33)$$

Para definição da velocidade angular, parte-se das Equações 1, 2 e 4 para se definir o intervalo descrito na Equação 34.

$$\tan(\phi_{min}) \cdot \frac{v}{L} \leq \dot{\theta} \leq \tan(\phi_{max}) \cdot \frac{v}{L} \quad (34)$$

A velocidade do veículo pode assumir dois sentidos, de acordo com a Equação 7. Valores positivos representam movimentação para frente e valores negativos para trás.

##### 4.2 Implementação computacional

A partir das posições e poses, iniciais e finais, gera-se uma trajetória que leve o veículo de uma a outra, atendendo aos limites definidos para a curva. Definida esta trajetória, a cinemática inversa determina a velocidade ( $v$ ) e o ângulo de esterçamento ( $\phi$ ) do veículo em função do tempo.

O Gerador de Trajeto é um programa fundamentado em algoritmo de força bruta, trata-se de um algoritmo de fácil implementação, que enumera de maneira simples as possibilidades de uma solução e verifica se cada uma satisfaz a solução do problema (Ziviani, 2010). Diante das condições e restrições descritas na Seção 4.1, o algoritmo seleciona a trajetória de menor tempo e execução, caso exista. Para a definição dos intervalos de busca, as Equações 35 e 36 são utilizadas. Estas descrevem respectivamente os incrementos do tempo ( $t_{fi}$ ) e da velocidade angular ( $\dot{\theta}_i$ ).

$$t_{fi} = \frac{|v|}{10} \quad (35)$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{\dot{\theta}_{max}}{10} \quad (36)$$

Os intervalos de busca para o tempo e a velocidade angular são definidos como segue:

$$t_f = (t_{f_1}, t_{f_2}, t_{f_3}, \dots, t_{f_N}) \quad (37)$$

$$t_{f_n} = t_{f_{n-1}} + t_{f_i}$$

$$t_{f_1} = \frac{\sqrt{(x_f - x_0)^2 + (y_f - y_0)^2}}{|v|}$$

$$t_{f_N} = t_{f_{max}}$$

$$\dot{\theta}_0 = (\dot{\theta}_{0_1}, \dot{\theta}_{0_2}, \dot{\theta}_{0_3}, \dots, \dot{\theta}_{0_N}) \quad (38)$$

$$\dot{\theta}_{0_n} = \dot{\theta}_{0_{n-1}} + \dot{\theta}_i$$

$$\dot{\theta}_{0_1} = \dot{\theta}_{min}$$

$$\dot{\theta}_{0_N} = \dot{\theta}_{max}$$

$$\dot{\theta}_f = (\dot{\theta}_{f_1}, \dot{\theta}_{f_2}, \dot{\theta}_{f_3}, \dots, \dot{\theta}_{f_N}) \quad (39)$$

$$\dot{\theta}_{f_n} = \dot{\theta}_{f_{n-1}} + \dot{\theta}_i$$

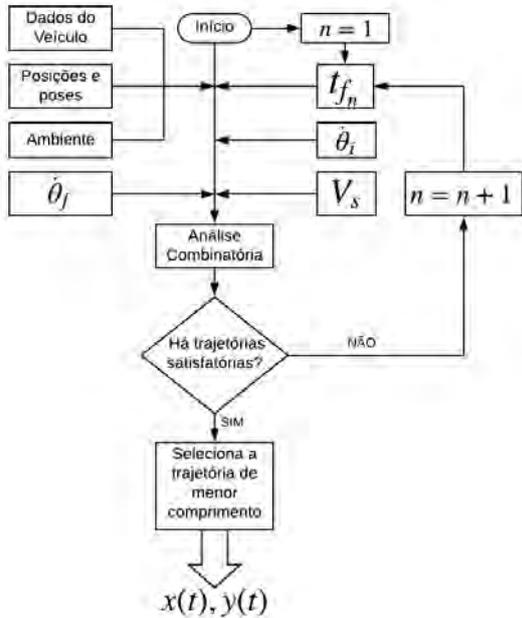
$$\dot{\theta}_{f_1} = \dot{\theta}_{min}$$

$$\dot{\theta}_{f_N} = \dot{\theta}_{max}$$

O sentido da velocidade é definido de acordo com a Equação 40, na qual, 1 e -1 representam trajetórias com movimentação para frente e para trás, respectivamente.

$$V_s = (1, -1) \quad (40)$$

O fluxograma da Figura 3 demonstra o procedimento para a geração de trajetórias.



**Figura 3:** Fluxograma do algoritmo gerador de trajetórias

Para exemplificar a aplicação do algoritmo, apresenta-se a seguir todas as curvas geradas de menor tempo, utilizando as condições apresentadas na Tabela 3. Os resultados são resumidos na Tabela 4, e nas Figuras 4(a) e 4(b), as quais apresentam todas as trajetórias satisfatórias, isto é,

atendem as restrições da Tabela 3 e sem colisões.

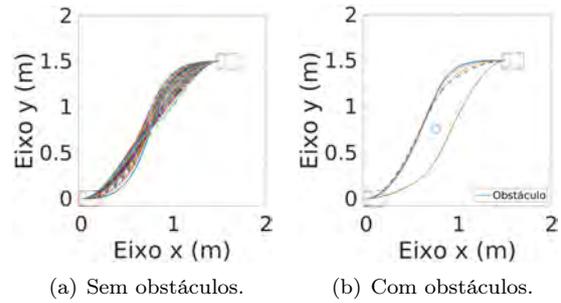
**Tabela 3:** Parâmetros da trajetória e do veículo

Parâmetros	Sem obstáculo	Com obstáculo
$(x_0, y_0, \theta_0)$	(0,0,0)	(0,0,0)
$(x_f, y_f, \theta_f)$	(1,5, 1,5, 0)	(1,5, 1,5, 0)
$L$	0,15 m	0,15 m
$v_{max}$	0,1 m/s	0,1 m/s
$\phi_{min}/\phi_{max}$	-45°/45°	-45°/45°

**Tabela 4:** Algoritmo para o menor intervalo do tempo

Parâmetros	Sem obstáculo	Com obstáculo
$t_{min_{traj}}$	21,21 s	21,21 s
$N_{total}$	41	5
$d_{min_{traj}}$	2,16 m	2,2465 m

Na Tabela 4,  $t_{min_{traj}}$  denota a duração das trajetórias de menor tempo,  $N_{total}$  representa o número total de trajetórias válidas para o menor tempo ( $t_{min_{traj}}$ ) e  $d_{min_{traj}}$  anuncia a menor distância percorrida entre as  $N_{total}$  trajetórias. Posto



**Figura 4:** Trajetórias válidas.

isto, o algoritmo seleciona o trajeto de menor tempo e distância que, nesse exemplo, possui as características apresentadas na Tabela 5.

A validação da trajetória projetada é realizada utilizando-se os parâmetros de entrada da cinemática do veículo para emular a movimentação do CLMR em um modelo computacional implementado em Simulink/Matlab. Na Seção 5 são apresentados resultados de validação computacional para trajetórias projetadas para o estacionamento paralelo automático do veículo.

## 5 Resultados

Para os resultados a seguir, a parametrização do veículo é tal como apresentada na Tabela 6.

### Estacionamento de frente.

Para o veículo estacionar paralelamente de frente, com movimentação contínua e sem colisão, as dimensões da vaga são parametrizadas em função

**Tabela 5:** Características do trajeto selecionado

Parâmetros	Sem obstáculo	Com obstáculo
Tempo	21,21 s	21,21 s
Distância	2,16 m	2,2465 m
$v_{max}$	0,1317 m/s	0,1524 m/s
$ \phi _{max}$	44,8766°	44,9050°

**Tabela 6:** Parâmetros do veículo

Parâmetros	Valor
$\phi$	-45°/45°
L	150 mm
B	170 mm
f	53 mm
l	32,5 mm
A	235,5 mm
$v_{max}$	0,1 m/s

das características do veículo (Vorobieva et al., 2015), sendo  $L_{PF}$  a largura e  $C_{PF}$  o comprimento da vaga.

$$L_{PF} = R_{Bl_{min}} - R_{min} + \frac{B'}{2} \quad (41)$$

$$C_{PF} = L + f' + \alpha \quad (42)$$

$$\alpha = \sqrt{R_{Bl_{min}}^2 - \left(R_{min} - \frac{B'}{2}\right)^2}$$

Nas quais:

$$R_{Bl_{min}} = \sqrt{\beta + (L + f')^2} \quad (43)$$

$$\beta = \left(R_{min} + \frac{B'}{2}\right)^2$$

$$R_{min} = \frac{L}{\tan(|\phi|_{max})}$$

Na qual  $L$  é a distância entre os eixos do veículo.  $B'$  e  $f'$  são, respectivamente, a largura do veículo e a distância entre o eixo dianteiro e a frente do mesmo, redimensionados devido à área de detecção de obstáculos.

A posição final na vaga é definida como aquela em que o veículo fica totalmente em seu interior e aproveita ao máximo o espaço de manobra. A Figura 5 apresenta o resultado obtido. O veículo tem o movimento contínuo e suave, realizando toda a trajetória com sucesso e sem interrupção em 9,81 segundos, com velocidade máxima de 0,1187 m/s e ângulo de esterçamento máximo ( $\phi$ ) 44,8730°.

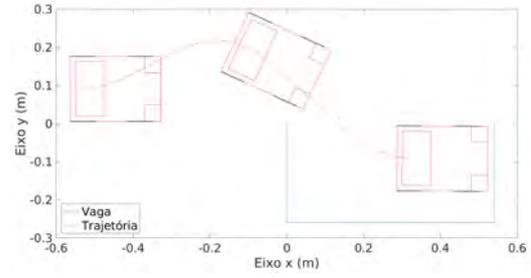
#### Estacionamento de ré

De forma análoga ao estacionamento de frente, define-se, para o estacionamento de ré, a largura  $L_{PR}$  e o comprimento  $C_{PR}$  da vaga em função das dimensões do veículo (de Oliveira Andrade, 2011).

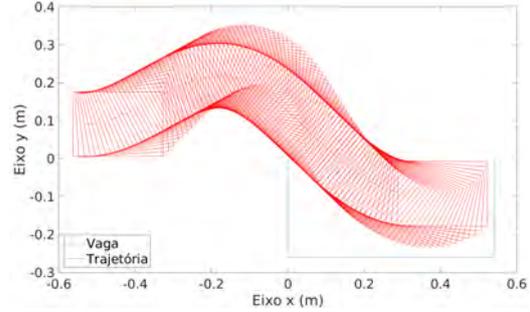
$$L_{PR} = B' \quad (44)$$

$$C_{PR} = \sqrt{\gamma + (A' - l')^2} + b' \quad (45)$$

$$\gamma = 2R_{min}B'$$



(a) Trajetória.

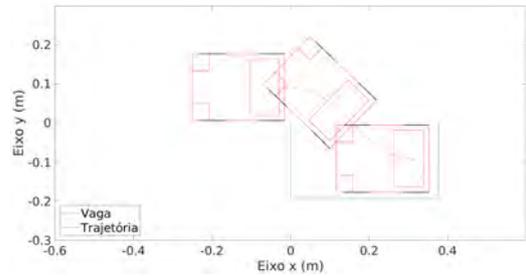


(b) Poses ao longo do tempo.

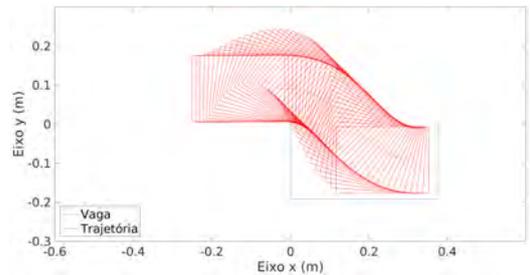
**Figura 5:** Estacionamento paralelo de frente.

$A'$ ,  $B'$ ,  $l'$  são, respectivamente, o comprimento do veículo, sua largura e a distância entre o eixo dianteiro e a frente do mesmo, redimensionados devido à área de colisão.

A posição final é definida de acordo com o mesmo critério do estacionamento de frente. A Figura 6 apresenta o resultado obtido. O estaci-



(a) Trajetória.



(b) Poses ao longo do tempo.

**Figura 6:** Estacionamento paralelo de ré.

onamento é executado com sucesso, com duração de 4,1 segundos, sendo o veículo conduzido sem interrupções de movimento do início ao fim da trajetória, alcançando uma pose final adequada com velocidade máxima de 0,1142 m/s e ângulo de es-

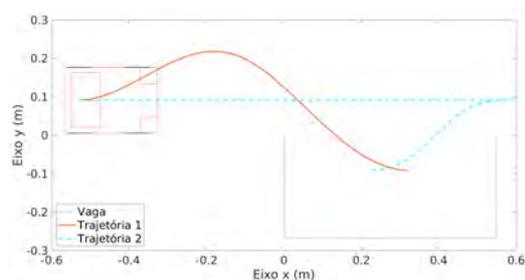
terçamento máximo ( $\phi$ ) 44,6387°.

### Movimentação combinada

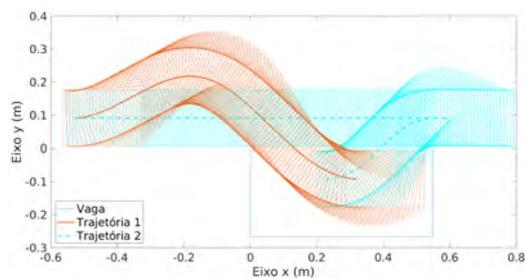
Observando-se os resultados apresentados, pode-se notar que o estacionamento de ré necessita de menos espaço lateral de manobra disponível. Dessa maneira, é relevante e, por vezes necessário, que o veículo inicialmente posicionado para estacionar de frente movimente-se frontalmente até ultrapassar a vaga e, então, reverta o sentido de movimento para realizar o estacionamento de marcha à ré. A Figura 7 exemplifica esta proposta e a Tabela 7 explicita as principais características das trajetórias desempenhadas para estacionar diretamente de frente e com a reversão de movimento.

**Tabela 7:** Principais características das trajetórias desempenhadas para estacionar diretamente de frente e com a reversão de movimento.

Parâmetros	Frente	Com reversão
Tempo	9,81 s	15,28 s
Distância percorrida	0,9794 m	1,5434 m
$v_{max}$	0,1187 m/s	0,1142 m
$ \phi _{max}$	44,8730°	44,6387°
Espaço lateral	0,3537 m	0,2446 m



(a) Trajetórias.



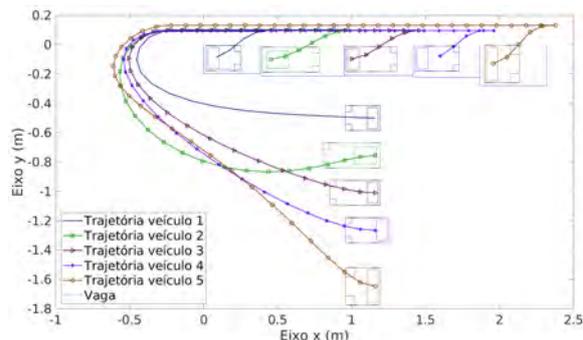
(b) Poses ao longo do tempo.

**Figura 7:** Estacionamento paralelo de ré com reversão.

Nota-se que a realização do estacionamento direto de frente implica em menor tempo para alcançar a pose final e deve, portanto, ser opção preferencial, porém a trajetória desempenhada requer espaço lateral substancialmente maior do que a segunda opção. Desse modo, caso tal espaço não esteja disponível, pode-se optar pelo posicionamento do veículo para estacionamento de marcha à ré.

### Aplicação

O planejamento de trajetórias para estacionamento de veículos é de grande valia para a otimização de alocação de vagas em ambientes conhecidos, como garagens de shoppings ou supermercados. Como exemplo, considera-se cinco veículos e vagas de tamanhos diferentes, sendo que os maiores não cabem nas vagas menores, portanto, caso algum veículo menor estacione em uma vaga maior do que o necessário, pelo menos um CMLR não terá vaga disponível. Portanto, o algoritmo de alocação de vagas deve ser iniciado com as dimensões tanto das vagas disponíveis, quanto dos veículos na fila, para que determine qual carro deve ser posicionado em cada vaga. Em uma aplicação de tempo real, o mapa do estacionamento deve estar disponível e as dimensões dos veículos podem ser obtidas por sensores posicionados na entrada do estacionamento. A Figura 8 apresenta o resultado da emulação da condição descrita, contendo cinco trajetórias distintas, para que cada veículo seja direcionado à vaga adequada. Nota-se que todos os veículos são estacionados corretamente, desempenhando trajetórias contínuas e suaves a destinos específicos e sem manobras desnecessárias que levariam a espera de outros carros na fila.



**Figura 8:** Simulação de garagem.

O exemplo apresentado na Figura 8 tem por objetivo destacar a utilidade da realização do planejamento de trajetórias para estacionamento de veículos do tipo carro em aplicações do dia a dia das cidades. Para um maior refinamento, e objetivando otimizar o tempo gasto em manobras e busca de vagas em estacionamento, outros parâmetros podem ser considerados. A movimentação de mais de um veículo pode ser realizada ao mesmo tempo, por exemplo, desde que os mesmos não colidam ou tenham que esperar mais no meio do trajeto do que o fariam na pose inicial, o que reduziria o tempo total gasto para estacionar os cinco veículos. Ademais, considerações sobre o consumo de combustível, o incômodo sonoro gerado, o tráfego de pessoas e a sua segurança, etc. podem ser consideradas na formulação de um problema de otimização para a entrada, o estaciona-

mento e a saída de veículos de um estacionamento.

## 6 Conclusões

No contexto da geração de trajetórias para veículos do tipo carro, esse trabalho apresenta a modelagem cinemática de um automóvel e propõe um algoritmo para o planejamento de trajetórias suaves para movimentação de uma pose a outra, evitando-se obstáculos pelo caminho. A modelagem é baseada no modelo geométrico de Ackermann para evitar derrapagem e o planejamento de trajetórias em um algoritmo do tipo força bruta, que avalia trajetórias factíveis com base em uma parametrização temporal com polinômios. Como exemplo de aplicação são emulados movimentos de estacionamento paralelo de frente e de ré, bem como um exemplo simples de preenchimento de vagas de garagem por diferentes veículos.

## Referências

- de Oliveira Andrade, K. (2011). Sistema neural reativo para o estacionamento paralelo com uma única manobra em veículos de passeio, *Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo* .
- Demirli, K. and Khoshnejad, M. (2009). Autonomous parallel parking of a car-like mobile robot by a neuro-fuzzy sensor-based controller, *Fuzzy Sets and Systems* **160**(19): 2876–2891.
- Hartani, K., Bourahla, M., Miloud, Y. and Sekour, M. (2009). Electronic differential with direct torque fuzzy control for vehicle propulsion system, *Turk J Elec Eng end Comp Sci* **17**(1).
- Li, B. and Shao, Z. (2015). Simultaneous dynamic optimization: A trajectory planning method for nonholonomic car-like robots, *Advances in Engineering Software* .
- Lim, H. S. M. and Taeihagh, A. (2018). Autonomous vehicles for smart and sustainable cities: An in-depth exploration of privacy and cybersecurity implications, *Energies* **11**(5): 1–23.
- Mitchell, W. C., Staniforth, A. and Scott, I. (2006). Analysis of ackermann steering geometry, *SAE Technical Paper Series*, SAE International.
- Moon, J., Bae, I. and Kim, S. (2019). Automatic parking controller with a twin artificial neural network architecture, *Mathematical Problems in Engineering* **2019**: 1–18.
- Pinheiro, B. C. (2009). Sistema de controle tempo real embarcado para automação de manobra de estacionamento, *Dissertação de Mestrado em Automação e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina* .
- Rashid, M. M., Rahman, M. M., Islam, M. R., Alwahedy, O. N. and Abdullahi, A. (2019). Autonomous 4wd smart car parallel self-parking system by using fuzzy logic controller, *American International Journal of Sciences and Engineering Research* **2**(2): 1–31.
- Thrun, S. (2003). Robotic mapping: a survey, *Exploring Artificial Intelligence in the New-Millennium, San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc.* pp. 1–35.
- United Nations, D. o. E. and Affairs, S. (2018). World urbanization, *Population Division (2018)* .
- United Nations, D. o. E. and Affairs, S. (2019). World urbanization prospects 2018: Highlights (st/esa/ser.a/421), *Population Division (2019)* .
- Vorobieva, H., Glaser, S. and Minoiu-Enache, N. (2015). Automatic parallel parking in tiny spots: Path planning and control, *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on* **16**: 396–410.
- Weiss, M. C., Bernardes, R. C. and Consoni, F. L. (2015). Cidades inteligentes como nova prática para o gerenciamento dos serviços e infraestruturas urbanas: a experiência da cidade de porto alegre, *Revista Brasileira de Gestão Urbana* **7**(3): 310–324.
- Ye, M., Ji, X. and Zhao, Y. (2019). A trajectory planning method based on b-spline algorithm for automatic parking systems, *Proceedings of the 3rd International Conference on Computer Engineering, Information Science & Application Technology (IC-CIA 2019)*, Atlantis Press.
- Zhang, J., Shi, Z., Yang, X. and Zhao, J. (2020). Trajectory planning and tracking control for autonomous parallel parking of a non-holonomic vehicle, *Measurement and Control* p. 002029402094496.
- Zhu, C. and Rajamani, R. (2006). Global positioning system-based vehicle control for automated parking, *I MECH E Part D Journal of Automobile Engineering* **220**(1): 37–52.
- Ziviani, N. (2010). Projeto de algoritmos com implementações em pascal e c, *São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 3ª Edição* .