

Projeto de Controladores Ótimos Robustos com Realimentação Estática de Saída

Lucas Favi Bocca* Igor Thiago Minari Ramos*
 Uiliam Nelson L. T. Alves** Douglas Buytendorp Bizarro***
 Jady Cardona Peres* Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira*

* UNESP - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia,
 Departamento de Engenharia Elétrica, Ilha Solteira, SP, (e-mail:
 {lucas.bocca, igor.minari, jady.cardona, marcelo.minhoto}@unesp.br).

** IFPR - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
 Paraná, Jacarezinho, PR, (e-mail: uiliam.alves@ifpr.edu.br)

*** IFMS - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
 Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, (e-mail:
 douglasbizarro@gmail.com)

Abstract: In this work, a robust controller design with static output feedback will be proposed. Minimizing the energy of the output will be considered, with the aim of reducing the setting time and oscillations of the system output. In the design of the controllers, the physical limit of the system output will also be considered. Thus, when the proposed conditions hold, the closed-loop system is asymptotically stable and for a given set of initial conditions, the output is within the appropriate limits. In the design of the controllers, two independent parameters are obtained through an evolutionary algorithm, maintaining the design based on linear matrix inequalities (LMIs). The controller was implemented in an active bench suspension.

Resumo: Neste trabalho será proposto um projeto de controlador robusto com realimentação estática da saída. Será considerada a minimização da energia da saída, com o objetivo de reduzir o tempo de estabelecimento e as oscilações da saída do sistema. No projeto dos controladores também será considerado o limite físico da saída do sistema. Desta forma, quando as condições propostas são satisfeitas, o sistema em malha fechada será assintoticamente estável e para um dado conjunto de condições iniciais, a saída ficará dentro dos limites especificados. No projeto dos controladores, foram considerados dois parâmetros independentes, que são obtidos por meio de um algoritmo evolutivo, mantendo o projeto baseado em desigualdades matriciais lineares (LMIs). O controlador foi implementado em uma suspensão ativa de bancada.

Keywords: Robust Control; Static Output Feedback; Differential Evolution; Linear Matrix Inequality; Guaranteed Cost.

Palavras-chaves: Controlador Robusto; Realimentação Estática de Saída; Evolução Diferencial; Desigualdades Matriciais Lineares; Custo Garantido.

1. INTRODUÇÃO

Para o projeto de controladores de muitos sistemas físicos não é possível obter todas as variáveis de estado para realimentação. Deste modo, a realimentação de saída, que considera apenas as variáveis de estado disponíveis, é um desafio na área de controle (Crusius and Trofino, 1999). Nesse sentido, a realimentação estática de saída representa uma malha de realimentação simples, não sendo necessário mensurar todas as variáveis de estado, o que facilita a sua implementação (Dong and Yang, 2007).

Atualmente várias pesquisas estão sendo realizadas nesta área, com o objetivo de encontrar condições suficientes que garantam a estabilidade do sistema com realimentação

estática de saída (Carniato et al., 2020; Sereni et al., 2020). No projeto de controladores, além da estabilidade, podem ser requeridos índices de desempenho como robustez, taxa de decaimento e performance H_∞ (Dong and Yang, 2007; Chang et al., 2015; Carniato et al., 2020).

Neste trabalho, serão estabelecidas condições suficientes para realimentação estática de saída com a inserção do custo garantido da energia do sinal de saída como um critério de desempenho. Em Deaecto et al. (2010) este índice representava a energia dissipada, na forma de calor, em conversores CC-CC. De certa forma, está sendo exigido que o transitório da saída deva ser rápido e sem muitas oscilações.

Deve-se ter em mente que muitos sistemas físicos possuem limitações, tanto no sinal de controle quanto nas variáveis de estado (de Oliveira et al., 2018). Deste modo, será considerado o limite da saída mensurável no projeto dos

* Este trabalho foi financiado em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior do Brasil (CAPES), Código Financeiro 0001. CNPq e FAPESP.

controladores de modo que, conhecendo as condições iniciais, o sistema não ultrapasse determinados limites físicos que podem danificá-lo.

Assim como em Carniato et al. (2020), são consideradas no projeto dos controladores variáveis de folga, cujos valores podem ser estipulados pelo projetista. O tratamento adequado desses parâmetros pode melhorar o custo garantido pretendido. No caso, para a determinação destes parâmetros, um algoritmo de evolução diferencial (ED) será utilizado para a otimização do custo garantido no processo de otimização (Storn and Price, 1997).

Nesse artigo, a notação adotada considera que o símbolo (*) representa um termo que é obtido por simetria na matriz, $He(A) = A + A^T$, $\mathcal{M}_{m \times n}^l$ indica a l -ésima linha da matriz $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $I_{m \times n}$ denota a matriz identidade e $0_{m \times n}$ significa a matriz nula. Além disso, o conjunto composto pelos primeiros N inteiros positivos $\{1, \dots, N\}$ é representado por \mathbb{K}_N . Considera-se, ainda, que $X \succ 0$ ($X \succeq 0$) implica que X é simétrica e (semi)definida positiva, $x = x(t)$, $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $u = u(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ e $\alpha = \alpha(t)$.

2. CONTROLE PARA A MINIMIZAÇÃO DO CUSTO GARANTIDO

Considere o sistema linear incerto com incertezas politópicas descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\alpha)x + B(\alpha)u, \\ y &= C_1(\alpha)x, \\ z &= C_2(\alpha)x, \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ a variável de saída controlada e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída medida. As matrizes $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ e $C_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ são matrizes constantes pertencentes ao politopo incerto Ω :

$$\Omega = \left\{ \begin{aligned} &[A(\alpha), B(\alpha), C_1(\alpha), C_2(\alpha)] = \\ &\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i [A_i, B_i, C_{1i}, C_{2i}], \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Para o sistema linear com incertezas politópicas (1), define-se a seguinte lei de controle com realimentação estática de saída

$$u = -Ky = -KC_1(\alpha)x, \quad (3)$$

sendo $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ a matriz de ganhos do controlador. De (1) e (3), o sistema em malha fechada é dado por:

$$\dot{x} = A(\alpha)x - B(\alpha)KC_1(\alpha)x. \quad (4)$$

Busca-se, para o sistema (1) com a lei de controle (3), a minimização da energia do sinal de saída (custo garantido) definido pela equação (5):

$$J = \int_0^\infty z^T R z dt = \int_0^\infty x^T C_2^T(\alpha) R C_2(\alpha) x dt, \quad (5)$$

sendo a matriz definida positiva $R = R^T \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ a ponderação do custo em relação à saída controlada do sistema.

A minimização do custo garantido definido em (5) exige que o transitório da saída controlada z seja rápido e

sem muitas oscilações. Este índice de desempenho será garantido para condições iniciais $x(0)$ pertencentes ao conjunto convexo descrito por:

$$x(0) = \sum_{m=1}^{n_{x0}} \lambda_m x_m(0), \quad \sum_{m=1}^{n_{x0}} \lambda_m = 1, \quad (6)$$

tal que $\lambda_m \geq 0$ para todo $m \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$, com os vetores de condições iniciais $x_m(0) \in \mathbb{R}^{n_x}$ dados. De forma a complementar, estabelece-se o conjunto de restrições de saída dado por:

$$\|y^l(t)\|_2 = \|C_1^l(\alpha)x\|_2 \leq \gamma^l, \quad (7)$$

com $l \in \mathbb{K}_{n_y}$, sendo $\gamma \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de valores máximos para as saídas $\|y^l(t)\|_2$. Considere o Lema 1 a seguir que será empregado para encontrar o resultado principal deste trabalho.

Lema 1. (Chang et al., 2015) Para matrizes \mathcal{T} , \mathcal{P} , \mathcal{U} e \mathcal{A} com as dimensões apropriadas e um escalar η , as seguintes afirmações são equivalentes:

$$(i) \begin{bmatrix} \mathcal{T} & * \\ \eta \mathcal{P}^T + \mathcal{U} \mathcal{A} & -\eta \mathcal{U} - \eta \mathcal{U}^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (8)$$

$$(ii) \mathcal{T} \prec 0, \quad \mathcal{T} + \mathcal{A}^T \mathcal{P}^T + \mathcal{P} \mathcal{A} \prec 0. \quad (9)$$

Prova. A prova pode ser obtida em Chang et al. (2015).

Teorema 1. Considere o sistema incerto descrito por (1) com a lei de controle (3), o índice de desempenho J definido em (5) e o conjunto de condições iniciais (6). Considere a restrição da saída medida $\|y^l(t)\|_2 \leq \gamma^l$, $l \in \mathbb{K}_{n_y}$. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes auxiliares $U \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $V \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ e escalares $\omega > 0$, $\eta > 0$ e $\rho > 0$ tais que:

$$\begin{aligned} &\max_{X, U, V} \omega \\ &\text{sujeito a} \\ &\begin{bmatrix} \omega & \omega x_m^T(0) \\ \omega x_m(0) & X \end{bmatrix} \succeq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} X & * \\ C_{1i}^T X & (\gamma^l)^2 \omega \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} He(A_i X - B_i V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) \\ C_{2i} X - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B_i^T \\ -\eta V^T B_i^T + C_{1i} X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} * & * \\ -R^{-1} & * \\ -\rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix} \prec 0,$$

sejam satisfeitas para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$, $m \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$, $l \in \mathbb{K}_{n_y}$ e $\mathcal{F}_{n_y \times n_z}$ e $\mathcal{F}_{n_y \times n_x}$ definida por:

$$\mathcal{F}_{n_y \times n_z} = \begin{cases} I_{n_y \times n_y}, & \text{se } n_y = n_z, \\ [I_{n_y \times n_y} \ 0_{n_y \times (n_z - n_y)}], & \text{se } n_y < n_z, \\ \begin{bmatrix} I_{n_z \times n_z} \\ 0_{(n_y - n_z) \times n_z} \end{bmatrix}, & \text{se } n_y > n_z, \end{cases} \quad (13)$$

$$\mathcal{F}_{n_y \times n_x} = \begin{cases} I_{n_y \times n_y}, & \text{se } n_y = n_x, \\ [I_{n_y \times n_y} \ 0_{n_y \times (n_x - n_y)}], & \text{se } n_y < n_x. \end{cases} \quad (14)$$

Então a lei de controle (3), sendo $K = VU^{-1}$, torna o sistema linear incerto definido em (1) assintoticamente estável garantindo o índice de desempenho $J < \omega^{-1} = \beta$

com as restrições $\|y^l(t)\|_2 \leq \gamma^l$, $l \in \mathbb{K}_{n_y}$, asseguradas para todo $x(0)$ descrito por (6).

Prova. A partir de (2) e multiplicando (12) por α_i e somando de 1 até n_r , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)V\mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ C_2(\alpha)X - \rho\mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & * \\ -\eta V^T B^T(\alpha) + C_1(\alpha)X - U\mathcal{F}_{n_y \times n_z} & * \\ -R^{-1} & * \\ -\rho U\mathcal{F}_{n_y \times n_z} - \eta U - \eta U^T & * \end{bmatrix} \prec 0. \quad (15)$$

Note que se a inequação (12) é satisfeita, U é não singular e possui inversa. Aplicando o Lema 1 e considerando que

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)V\mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ C_2(\alpha)X - \rho\mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & -R^{-1} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{P} &= \begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathcal{A} = U^{-1} [C_1(\alpha)X - U\mathcal{F}_{n_y \times n_x} - \rho U\mathcal{F}_{n_y \times n_z}],$$

a inequação (15) leva a

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)V\mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ C_2(\alpha)X - \rho\mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & -R^{-1} \end{bmatrix} \\ &+ He \left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \end{bmatrix} U^{-1} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\left([C_1(\alpha)X - U\mathcal{F}_{n_y \times n_x} - \rho U\mathcal{F}_{n_y \times n_z}] \right) \prec 0.$$

Deve-se observar que a inequação (17) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X) & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} He(-B(\alpha)V\mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ -\rho\mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \\ &+ He \left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \end{bmatrix} U^{-1} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\left([C_1(\alpha)X - U\mathcal{F}_{n_y \times n_x} - \rho U\mathcal{F}_{n_y \times n_z}] \right) \prec 0,$$

porém, note que a inequação (18) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X) & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} \end{bmatrix} \\ &+ He \left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \end{bmatrix} U^{-1} [C_1(\alpha)X \ 0] \right) \prec 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Substituindo $K = VU^{-1}$ em (19), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)KC_1(\alpha)X) & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (20)$$

Como $R \succ 0$, temos que $R^{-1} \succ 0$ e, por consequente, $-R^{-1} \prec 0$. Dessa forma, é possível aplicar o Complemento de Schur em (20), obtendo-se:

$$\begin{aligned} &A(\alpha)X + XA^T(\alpha) - B(\alpha)KC_1(\alpha)X \\ &- XC_1^T(\alpha)K^T B^T(\alpha) + XC_2^T(\alpha)RC_2(\alpha)X \prec 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Pré e pós multiplicando (21) por $P = X^{-1}$, tem-se:

$$PA(\alpha) + A^T(\alpha)P - PB(\alpha)KC_1(\alpha)$$

$$- C_1^T(\alpha)K^T B^T(\alpha)P + C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha) \prec 0. \quad (22)$$

Considerando o sistema de malha fechada definido em (4) e a candidata à função de Lyapunov $V(x) = x^T P x > 0$, para todo $x \neq 0$, sendo $P = X^{-1}$, tem-se a derivada em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \prec 0 \\ &= x^T (A(\alpha)^T P + PA(\alpha) - PB(\alpha)KC_1(\alpha) \\ &\quad - C_1^T(\alpha)K^T B^T(\alpha)^T P)x. \end{aligned} \quad (23)$$

Porém, pré e pós multiplicando a equação (22) por x^T e x respectivamente, tem-se para $x \neq 0$ que

$$\begin{aligned} x^T (PA(\alpha) + A(\alpha)^T P - PB(\alpha)KC_1(\alpha) \\ - C_1^T(\alpha)K^T B^T(\alpha)^T P)x &\prec -x^T (C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha))x, \end{aligned} \quad (24)$$

e, sabendo que $-R \prec 0$ nota-se que $-C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha) \preceq 0$. Deste modo, de (23) e (24) tem-se que $\dot{V}(x) \prec -x^T (C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha))x \leq 0$ para todo $x \neq 0$, provando a estabilidade assintótica do sistema. Além disso, integrando ambos os lados da inequação (24) de 0 a ∞ , obtém-se de (5):

$$\int_0^\infty \dot{V}(x) dt \leq \int_0^\infty -x^T (C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha))x dt = -J, \quad (25)$$

e, portanto, de (25):

$$V(x(t \rightarrow \infty)) - V(x(0)) \prec -J. \quad (26)$$

Sabendo-se que o sistema de malha fechada é assintoticamente estável ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0_{n_x \times 1}$ e, por consequente, $V(x(t \rightarrow \infty)) = 0$), de (26) obtém-se que:

$$J \prec V(x(0)) = x^T(0)Px(0). \quad (27)$$

Aplicando o complemento de Schur na inequação (10), tem-se que:

$$\omega - \omega^2 x_m(0)^T X^{-1} x_m(0) \geq 0. \quad (28)$$

Substituindo $P = X^{-1}$, $\omega = \beta^{-1}$ e multiplicando ambos os lados por β^2 obtém-se:

$$\beta \geq x_m(0)^T P x_m(0). \quad (29)$$

Multiplicando (29) por λ_m e somando de 1 até n_{x0} considerando (6), obtém-se que

$$\beta \geq x(0)^T P x(0). \quad (30)$$

Por consequente, de (27) e (30) tem-se $\beta \geq x(0)^T P x(0) > J$, garantindo que $\beta > J$ para toda condição inicial descrita por (6).

Multiplicando a inequação (11) por α_i e somando de 1 até n_r , realizando o Complemento de Schur e pré e pós multiplicando por P , obtém-se:

$$\frac{\beta}{(\gamma^l)^2} (C_1^l)^T(\alpha) C_1^l(\alpha) - P \preceq 0. \quad (31)$$

Pré e pós multiplicando por x^T e x respectivamente, obtém-se:

$$x^T \left(\frac{\beta}{(\gamma^l)^2} (C_1^l)^T(\alpha) C_1^l(\alpha) - P \right) x \leq 0. \quad (32)$$

Portanto, considerando que γ^l representa o valor máximo do pico de cada saída medida l do sistema, sendo $l \in \mathbb{K}_{n_y}$, observe que

$$\frac{x^T (C_1^l)^T (\alpha) C_1^l (\alpha) x}{(\gamma^l)^2} = \frac{(y^l)^T y^l}{(\gamma^l)^2} \leq \frac{x^T P x}{\beta}. \quad (33)$$

De (30), tem-se que

$$\beta \geq x^T(0) P x(0) \geq x^T P x.$$

Portanto:

$$1 \geq \frac{x^T(0) P x(0)}{\beta} \geq \frac{x^T P x}{\beta}. \quad (34)$$

De (33) e (34),

$$\frac{(y^l)^T y^l}{(\gamma^l)^2} \leq 1. \quad (35)$$

Portanto, $\|y^l(t)\|_2 \leq \gamma^l$ e a prova de Teorema 1 está concluída.

3. ALGORITMO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

Os parâmetros η e ρ , definidos no Teorema 1, devem ser escolhidos de forma a minimizar o custo garantido definido em (5), que pode estar contido em uma região não convexa de soluções. Esses parâmetros não são determinados pelos *solvers*, sendo assim possível a aplicação do algoritmo de evolução diferencial (ED).

A ED é um método de busca paralela direta que utiliza N_i vetores de parâmetros $x_{i,G}$, $i \in \mathbb{K}_{N_i}$, como população para cada geração G (N_i não se altera durante o processo de minimização). O vetor populacional inicial deve ser escolhido aleatoriamente e deve abranger todo o espaço paramétrico. Nesse trabalho, será considerada a distribuição de probabilidade uniforme. Dessa forma, o princípio de funcionamento da ED é separado em mutação, *crossover* e seleção, conforme descrito por Storn and Price (1997). Na etapa de mutação, para cada vetor alvo $x_{i,G}$, um vetor mutante é gerado por:

$$v_{i,G+1} = x_{r_1,G} + F \times (x_{r_2,G} - x_{r_3,G}), \quad (36)$$

sendo $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{K}_{N_i}$ índices diferentes entre si escolhidos aleatoriamente e $F \in [0, 2]$ o fator de mutação (escalar). Após isso, na etapa de *crossover*, a partir dos vetores mutantes $v_{i,G+1}$ são obtidos os vetores de teste $u_{ji,G+1}$:

$$u_{ji,G+1} = \begin{cases} v_{ji,G+1}, & \text{se } \Theta(j) \leq O \text{ ou } j = rn(i), \\ x_{ji,G}, & \text{se } \Theta(j) > O \text{ e } j \neq rn(i), \end{cases} \quad (37)$$

sendo $\Theta(j)$ o valor do j -ésimo termo de uma distribuição aleatória uniforme com saídas $\in [0, 1]$, $O \in [0, 1]$ é a constante de *crossover* determinada pelo usuário, $rn(i) \in \mathbb{K}_D$ é um índice escolhido aleatoriamente com D sendo o número de parâmetros e $j \in \mathbb{K}_D$. Dessa forma, para cada vetor $v_{i,G+1}$, é feito o processo para cada parâmetro $v_{ji,G+1}$.

Por fim, na etapa de seleção, decide-se se o vetor de teste $u_{i,G+1}$ deve ou não fazer parte da geração $G + 1$. Para isso, compara-se o valor do custo definido obtido pelos parâmetros do vetor $x_{i,G}$ com o obtido pelo vetor $u_{i,G+1}$. Se o vetor $u_{i,G+1}$ leva a um menor valor do custo, então $x_{i,G+1} = u_{i,G+1}$, caso contrário, $x_{i,G+1} = x_{i,G}$.

4. IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA

Foi considerado o sistema de suspensão ativa de bancada da Quanser, que simula a suspensão ativa de 1/4 de um

veículo cujo esquema pode ser visto na Figura 1. O sistema é composto por duas massas, sendo M_s a massa do corpo do veículo (sustentada pela mola k_s e o amortecedor B_s) e M_{us} a massa do conjunto do pneu (sustentada pela mola k_{us} e o amortecedor B_{us}). De forma a minimizar as oscilações provenientes de irregularidades na pista, utiliza-se um sistema de suspensão ativa, composto pelas massas M_s e M_{us} , e por um motor (atuador) conectado entre elas, sendo o sistema controlado por uma força F_c .

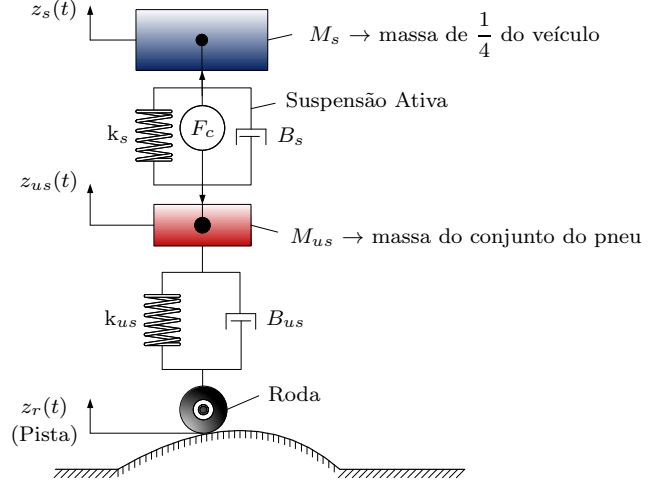


Figura 1. Esquema da Suspensão Ativa (de Oliveira et al., 2018)

Dessa forma, a dinâmica do sistema é dada por (Sereni et al., 2020):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -k_s & -B_s & 0 & B_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_s & B_s & -k_{us} & -(B_s + B_{us}) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (38)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \quad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x,$$

sendo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{x}_1 \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u = F_c. \quad (39)$$

Os valores dos parâmetros são apresentados na Tabela 1 (Quanser, 2009).

Tabela 1. Parâmetros da suspensão ativa.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Massa de 1/4 do corpo do veículo (kg)	M_s	1,455 a 2,45
Massa do conjunto do pneu (kg)	M_{us}	1
Constante de amortecimento (N.s/m)	B_s	7,5
Constante de amortecimento (N.s/m)	B_{us}	5
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_s	900
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_{us}	2500

A massa de 1/4 do corpo do veículo pode ser alterada a partir de duas cargas de 0,4975 kg cada. Ainda, será considerada a falha no atuador, ou seja, uma perda de

potência de 50% no motor, representado pela constante k_{falha} (de Oliveira et al., 2018):

$$u = F_c \Rightarrow u_{falha} = k_{falha} F_c. \quad (40)$$

Ainda, para o projeto do controlador foi considerado o vetor de condições iniciais $x(0)$ conforme descrito em (6) com 16 vértices, tendo que $-0,02 \text{ m} < x_1 < 0,02 \text{ m}$, $-0,15 \text{ m/s} < x_2 < 0,15 \text{ m/s}$, $-0,02 \text{ m} < x_3 < 0,02 \text{ m}$ e $-0,15 \text{ m/s} < x_4 < 0,15 \text{ m/s}$. Dessa forma, obtêm-se as matrizes dos vértices do politopo:

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -524,8 & -4,373 & 0 & 4,373 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -282,6 & -2,355 & 0 & 2,355 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$[B_1|B_2|B_3|B_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,583 & 0,314 & 0,292 & 0,157 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -0,5 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$C_1(\alpha) = C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2(\alpha) = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, para realimentação do sistema, foi considerada apenas as medidas das variáveis de estado x_1 e x_2 , que representam respectivamente a diferença das posições e a diferença das velocidades das massas M_s e M_{us} . Dessa forma, não é possível a utilização de controladores com realimentação de estado de forma direta. Ainda, com o intuito de reduzir o tempo de estabelecimento das posições $z_s(t)$ e $z_{us}(t)$, a matriz $C_2(\alpha)$ seleciona as variáveis de estado x_1 e x_3 para serem otimizadas, sendo x_3 a diferença entre a posição da massa do conjunto do pneu M_{us} e a pista.

Além disso, foi considerada a restrição de saída com:

$$y^1(t) = C_1^1 x = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x, \quad \gamma^1 = 0,035 \text{ m}, \quad (42)$$

limitando, assim, a deflexão da suspensão. Para a solução das LMIs e o desenvolvimento da ED, foi utilizado o *software* MATLAB com a interface “YALMIP” (Lofberg, 2004) e o *solver* “LMILab” (Gahinet et al., 1994), considerando $R = I_{n_z \times n_z}$. Na ED, a população inicial para os parâmetros ρ e η foi definida a partir de uma distribuição uniforme com função densidade de probabilidade $f(x)$ dada por:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{0,01}, & \text{se } 0 \leq x \leq 0,01, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (43)$$

Além disso, o número de gerações máximo foi definido como $G_T = 1000$, com $N_i = 10$ indivíduos. Assim, a cada nova geração G resolvem-se as LMIs para cada indivíduo e obtêm-se o limitante superior para a equação de custo garantido. Após os ajustes na população, conforme seção 3, resolvem-se novamente as LMIs e obtêm-se os parâmetros mais adequados. Na Figura 2 pode ser visto o custo garantido mínimo para a população obtido para cada geração.

Dessa forma, a partir do Teorema 1 e da ED, obteve-se o mínimo do limitante superior do custo $\beta = 2,3241 \times 10^{-4}$

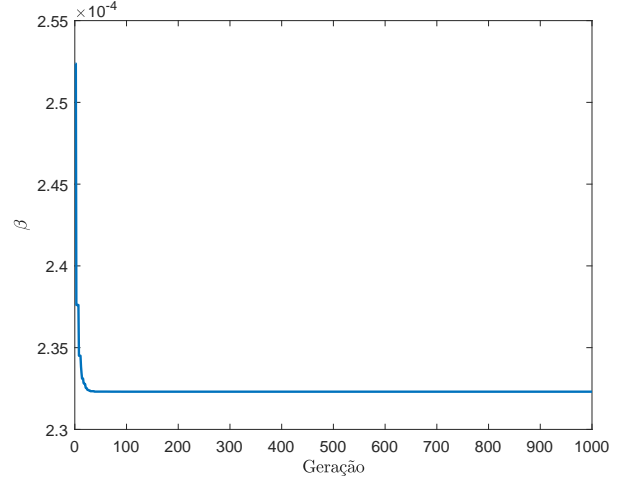


Figura 2. Limitante superior β mínimo para a população por geração durante a evolução.

para os parâmetros $\rho = 9 \times 10^{-4}$, $\eta = 3,6 \times 10^{-3}$, com o controlador robusto dado por:

$$K = [2500,8 \quad 87,57], \quad (44)$$

sendo a matriz de ganhos K dada conforme a lei de controle (3).

Para a implementação prática, foi utilizado um sinal com forma de onda quadrada como referência para a pista ($z_r(t)$). Este sinal possui amplitude de 0,02 m, frequência de 1/3 Hz e largura de pulso de 50%. Além disso, o tempo de amostragem foi de 1 ms. Para todas as implementações foi considerado um intervalo de tempo de 15 s, sendo que com $(0 < t < 5)$ s o sistema se encontra em malha aberta, $(5 < t < 10)$ s o sistema está em malha fechada conforme a lei de controle (3) e $(10 < t < 15)$ s o sistema está em malha fechada, porém, com falha de 50% no atuador.

Foram feitas duas implementações, sendo uma com a massa $M_s = 1,455 \text{ kg}$ e a segunda com $M_s = 2,45 \text{ kg}$. O resultado das implementações pode ser visto, respectivamente, nas Figuras 3 e 4, onde mostram-se a posição da pista ($z_r(t)$), a posição do passageiro ($z_s(t)$) e do conjunto do pneu ($z_{us}(t)$), juntamente com os estados x_1 e x_3 e o sinal de controle.

Pode ser observado que o comportamento com as diferentes massas para o corpo do veículo é semelhante e que, apesar do sistema não controlado ser estável, o nível de oscilação da posição do passageiro pode causar desconfortos e é minimizado ao se utilizar o controlador robusto projetado fundamentado no Teorema 1. Além disso, mesmo com a falha de 50% no atuador e com a incerteza da massa do veículo, as oscilações foram reduzidas satisfatoriamente. Nota-se que o sinal de controle não ultrapassa 10 N mesmo com a presença de falha no atuador.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, novas condições suficientes foram propostas em termos de LMIs para sistemas lineares incertos considerando a realimentação estática de saída. Foi considerada a minimização da energia da saída com o objetivo de melhorar o desempenho do sistema em malha fechada, utilizando um algoritmo de evolução diferencial a fim de ajustar os parâmetros ρ e η e otimizar o limi-

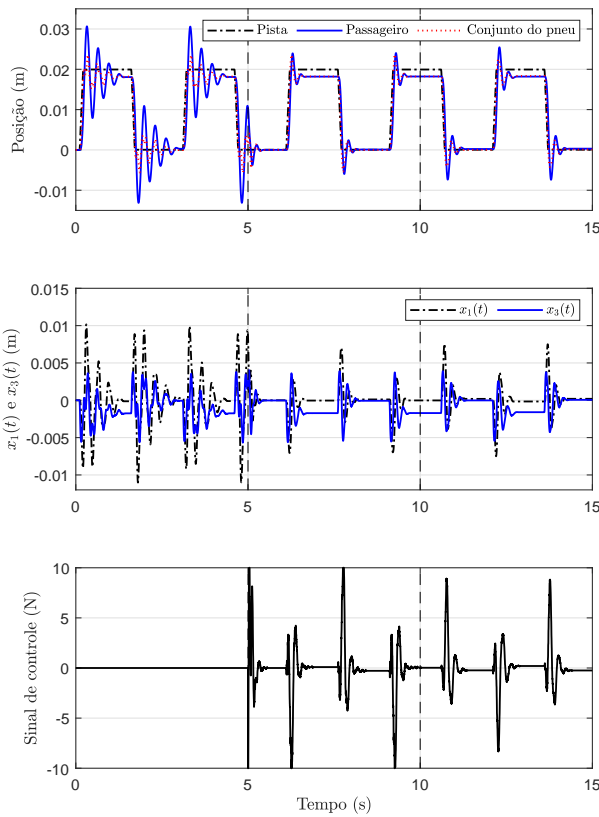


Figura 3. Comportamento do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (44) e $M_s = 1,455$ kg.

tante superior desta função. Além disso, consideraram-se restrições no valor de pico de saída, de modo a manter o sistema dentro da região de operação física. O controlador foi implementado no sistema físico da suspensão ativa de bancada, sendo que o sistema em malha fechada minimizou as oscilações da pista para o passageiro, mesmo com a massa do passageiro e o sinal de controle sendo incertos. Em trabalhos futuros, com o objetivo de flexibilizar as restrições no projeto dos controladores, será realizado o projeto do controlador chaveado como em Carniato et al. (2020); de Oliveira et al. (2018) considerando os mesmos índices de desempenho deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Carniato, L.A., Carniato, A.A., Teixeira, M.C.M., Cardim, R., Junior, E.I.M., and Assunção, E. (2020). Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback. *International Journal of Control*, 93(5), 1127–1146.
- Chang, X.H., Park, J.H., and Zhou, J. (2015). Robust static output feedback H_∞ control design for linear systems with polytopic uncertainties. *Systems & Control Letters*, 85, 23–32.
- Crusius, C.A. and Trofino, A. (1999). Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5), 1053–1057.
- de Oliveira, D.R., Teixeira, M.C.M., Alves, U.N.L.T., de Souza, W.A., Assunção, E., and Cardim, R. (2018). On local H_∞ switched controller design for uncertain TS

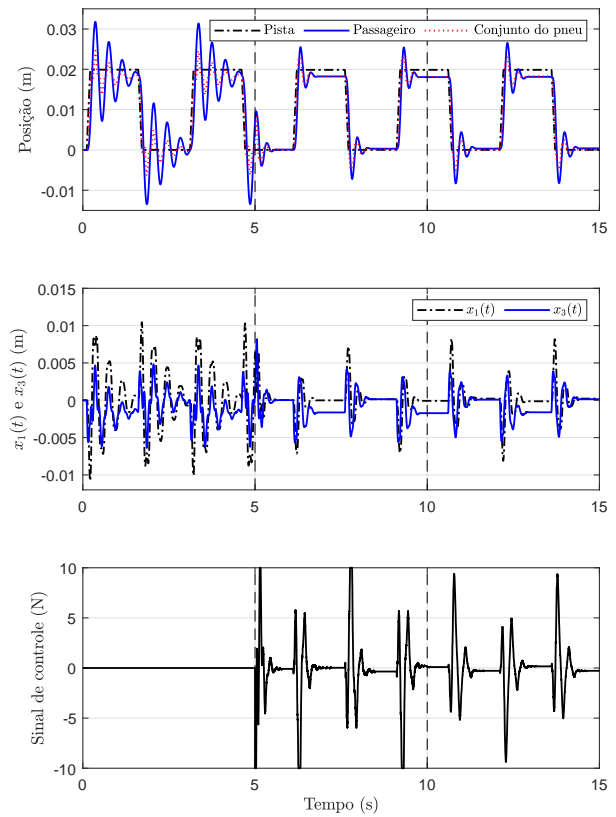


Figura 4. Comportamento do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (44) e $M_s = 2,45$ kg.

fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 344, 1–26.

- Deaecto, G.S., Geromel, J.C., Garcia, F.S., and Pomilio, J.A. (2010). Switched affine systems control design with application to DC–DC converters. *IET control theory & applications*, 4(7), 1201–1210.
- Dong, J. and Yang, G.H. (2007). Static output feedback control synthesis for linear systems with time-invariant parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(10), 1930–1936.
- Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A.J., and Chilali, M. (1994). The lmi control toolbox. In *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*, volume 3, 2038–2041. IEEE.
- Lofberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *IEEE International symposium on computer aided control systems design, 2004, Taipei. Proceedings...*, 284–289. IEEE, Taipei.
- Quanser (2009). *Active Suspension - User's Manual*. Quanser Consulting Inc., Ontario, Canada.
- Sereni, B., Assunção, E., and Teixeira, M.C.M. (2020). New gain-scheduled static output feedback controller design strategy for stability and transient performance of LPV systems. *IET Control Theory & Applications*, 14(5), 717–725.
- Storn, R. and Price, K. (1997). Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of global optimization*, 11(4), 341–359.