

# Controle PID para Sistemas Lineares Incertos de Ordem Arbitrária Utilizando LMIs<sup>\*</sup>

Alejandro R. Ortiz,<sup>\*</sup> Ricardo C. L. F. Oliveira,<sup>\*</sup>  
Pedro L. D. Peres<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> *Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,  
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP  
Av. Albert Einstein, 400, 13083-852, Campinas, SP, Brasil  
(e-mail: {arodriz, ricfow, peres}@dt.fee.unicamp.br).*

---

**Abstract:** This paper addresses the problem of PID (Proportional-Integral-Derivative) control design for uncertain continuous-time linear systems by means of convex optimization. The linear model can have an arbitrary number of states, inputs and outputs, and all matrices of the system can be uncertain (polytopic uncertainty). Pole location in a cone with arbitrary angle is used as performance criterion. The main contribution of the paper is a new formulation for the problem of designing PID gains as a static output-feedback problem, which can be solved by the traditional techniques from the literature based on LMIs for state-feedback (when the output matrix is precisely known) or output-feedback. Four conditions from the literature are extended to deal with the proposed approach. Numerical examples illustrate the efficiency of the method for the stabilization of uncertain systems.

**Resumo:** Este artigo aborda o problema de projeto de controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo) para sistemas lineares incertos contínuos no tempo por meio de otimização convexa. O modelo linear pode ter um número arbitrário de estados, entradas e saídas, e todas as matrizes podem ser incertas (incerteza politópica). Como critério de desempenho é utilizada a alocação de polos em um cone de ângulo arbitrário. A principal contribuição do artigo é uma nova formulação do problema de síntese de ganhos PID como uma realimentação estática de saída, que então pode ser resolvido pelas técnicas tradicionais da literatura baseadas em LMIs para realimentação de estados (quando a matriz de saída é precisamente conhecida) ou realimentação de saída. Quatro condições da literatura são estendidas para lidar com a abordagem proposta. Exemplos numéricos ilustram a eficácia do método na estabilização de sistemas incertos.

**Keywords:** PID Control, Continuous-time Systems, Polytopic Uncertainties, Linear Matrix Inequalities.

**Palavras-chaves:** Controle PID, Sistemas Contínuos no Tempo, Incertezas Politópicas, Desigualdades Matriciais Lineares.

---

## 1. INTRODUÇÃO

A técnica de controle conhecida como Proporcional-Integral-Derivativa (PID) possui uma posição de destaque na teoria de controle, principalmente pelo sucesso que essa abordagem alcançou no meio industrial, dada sua simplicidade de implementação e desempenhos satisfatórios em dinâmicas presentes em diversas aplicações práticas, como controle de processos (mais de 95% das malhas de controle utilizam PIDs), controle de motores, indústria automotiva, controladores de voo, instrumentação, etc. (Åström and Hägglund, 2006). Embora para sistemas de uma entrada e uma saída (do inglês, *single-input single-output* — SISO) existam técnicas de sintonia dos ganhos que podem fornecer desempenhos satisfatórios para uma

ampla gama de dinâmicas, como Ziegler-Nichols, o caso de múltiplas entradas e múltiplas saídas (do inglês, *multiple-input multiple-output* — MIMO) impõe um cenário bem mais desafiador, sendo praticamente impossível utilizar as técnicas do caso SISO (Saeki et al., 2010; Boyd et al., 2016). Nesse contexto, no qual o número de ganhos a sintonizar é muito grande, as técnicas baseadas em otimização, com destaque maior para os métodos de programação semidefinida formulados em termos de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs), tornaram-se protagonistas, principalmente no tratamento de parâmetros incertos associados aos modelos.

Em meio às técnicas baseadas em LMIs, destacam-se a busca dos ganhos PID por meio de problemas de realimentação de estados (eventualmente com ganho estruturado) (Ge et al., 2002), realimentação estática de saída (Zheng et al., 2002; Lin et al., 2004; He and Wang, 2006) ou em termos de procedimentos que aproximam (de forma sufici-

---

<sup>\*</sup> O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e CNPq.

ente) desigualdades matriciais bilineares por LMIs (Saeki et al., 2010; Boyd et al., 2016). Na maior parte dos métodos considera-se apenas modelos sem incertezas (Parlakçi and Caferov, 2017; Carvalho and Rodrigues, 2019) ou sistemas de ordem menor que dois (Parada et al., 2017; de Oliveira, 2019). Ressalte-se que em algumas abordagens os ganhos dependem das matrizes do sistema, o que inviabiliza completamente o tratamento de incertezas, principalmente as estruturadas, como a incerteza politópica. Com relação às metodologias que empregam a formulação por realimentação estática de saída, é importante ressaltar as técnicas mais recentes que são capazes de tratar incertezas em todas as matrizes (inclusive na matriz de saída) como Agulhari et al. (2012); Hilhorst et al. (2015); Felipe et al. (2016); Rosa et al. (2018), o que torna atraente a derivação de extensões para tratar o problema PID.

Este trabalho investiga o problema de projeto de controladores PID para sistemas lineares incertos contínuos no tempo. Consideram-se sistemas lineares com ordem, número de entradas e número de saídas arbitrárias. Todas as matrizes do sistema podem ser incertas com estrutura politópica. Como contribuição principal é proposta uma representação de estados para o sistema realimentado, gerando uma nova formulação do problema em termos de um problema de realimentação estática de saída em que não há nenhuma restrição adicional de estrutura no ganho. Desse modo, condições de literatura para realimentação robusta de estados (caso a matriz de saída seja precisamente conhecida) ou realimentação de saída baseadas em LMIs podem ser adaptadas de forma imediata para projetar controladores PID. Quatro condições da literatura são estendidas para tratar a abordagem proposta, e como critério de desempenho adota-se a alocação robusta de polos dentro de um cone de ângulo arbitrário. A principal vantagem de viabilizar a síntese PID por meio dessas condições da literatura é que as mesmas são a base de muitas outras condições que tratam diversas classes de sistemas, como sistemas com retardo, nebulosos de Takagi-Sugeno, a parâmetros variantes, a saltos Markovianos, etc. Consequentemente, novas técnicas de projeto PID podem ser derivadas a partir dos resultados. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficácia do método de síntese proposto.

**Notação:** O conjunto de matrizes reais com dimensão  $n \times m$  é indicado por  $\mathbb{R}^{n \times m}$ . A transposição de uma matriz  $M$  é indicada por  $M'$ .  $M > 0$  ( $M < 0$ ) simboliza que a matriz  $M$  é definida positiva (negativa) e o símbolo  $\star$  representa um bloco induzido por simetria em uma matriz. A notação  $\text{He}(X)$  é utilizada para denotar  $X + X'$  e  $\text{diag}(A, B)$  representa uma matriz bloco-diagonal com blocos  $A$  e  $B$ . O símbolo  $\otimes$  representa o produto de Kronecker.

## 2. PRELIMINARES

Seja o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\alpha)x + B(\alpha)u, \\ y &= C(\alpha)x \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  e  $y \in \mathbb{R}^p$  são respectivamente os vetores de estados, entradas de controle e saídas medidas. As matrizes  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  são incertas e dependem do vetor de parâmetros incertos  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  na forma

$$(A, B, C)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i, B_i, C_i), \quad \alpha \in \Lambda_N$$

sendo  $\Lambda_N$  o simplex unitário dado por

$$\Lambda_N \triangleq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0 \right\}$$

Particularmente na literatura de análise e controle de sistemas incertos, as matrizes do sistema são chamadas de *matrizes politópicas*, sendo capazes de representar uma ampla gama de incertezas.

O objetivo deste trabalho é fornecer condições de projeto para a síntese da lei de controle  $U(s) = K(s)Y(s)$  (com  $U(s)$  e  $Y(s)$  sendo as transformadas de Laplace de  $u(t)$  e  $y(t)$ , respectivamente) em que  $K(s)$  é uma matriz de transferência dada por

$$K(s) = \left( K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + T_f s} \right)$$

com  $K_p \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $K_d \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$ . Essa lei de controle é conhecida como PID, em que o polo  $-1/T_f$  foi adicionado ao termo derivativo para tornar  $K(s)$  própria. Uma representação de estados possível para a matriz de transferência  $K(s)$  é dada por (Apkarian et al., 2007)

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y, \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{aligned} \quad (2)$$

com

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m \\ 0_m & -\frac{1}{T_f} I_m \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} R_i \\ R_d \end{bmatrix}, \quad C_c = [I_m \quad I_m],$$

$D_c = R_p$ , em que

$$R_p = K_p + \frac{1}{T_f} K_d, \quad \tau = 1/T_f, \quad R_i = K_i, \quad R_d = -\frac{1}{T_f^2} K_d$$

Como tradicionalmente modelada na literatura, a dinâmica de malha fechada pode ser representada na forma

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A(\alpha) + B(\alpha)D_c C(\alpha) & B(\alpha)C_c \\ B_c C(\alpha) & A_c \end{bmatrix} z$$

com  $z = [x', x_c']'$ . Particularmente no contexto de um controlador de ordem diferente da ordem da planta, como o caso sob investigação, uma representação alternativa é dada na forma

$$\dot{z} = (\hat{A}(\alpha) + \hat{B}(\alpha)L\hat{C}(\alpha))z \quad (3)$$

com

$$\begin{aligned} \hat{A}(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0_{2m} \end{bmatrix}, & \hat{B}(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & B(\alpha) \\ I_{2m} & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{C}(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & I_{2m} \\ C(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, & L &= \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que possui a mesma estrutura de um sistema com uma realimentação estática de saída. Nesse caso, as condições da literatura que tratam o problema de realimentação estática para sistemas incertos em princípio poderiam ser aplicadas (Crusius and Trofino, 1999; Peaucelle and Arzelier, 2001; Arzelier et al., 2003; Yaesh and Shaked, 2009; Agulhari et al., 2012). Caso a matriz de saída  $C(\alpha)$  seja precisamente conhecida, os métodos de realimentação de estados para sistemas incertos também podem ser adaptados para tratar o problema, basicamente aplicando uma transformação de similaridade no sistema (Geromel et al., 1996). Todavia, embora o problema de realimentação estática de saída seja um grande desafio por si só, uma dificuldade

adicional nesta modelagem é o fato das matrizes  $A_c$  e  $C_c$  serem conhecidas, exigindo uma restrição de estrutura no ganho de controle  $L$ , o que em geral torna os métodos muito conservadores.

Na próxima seção são propostas duas modificações na representação de estados do sistema em malha fechada, que tornam possível a adaptação de diversas condições da literatura para tratar o problema de projeto do ganho  $L$  com conservadorismo reduzido.

### 3. NOVA REPRESENTAÇÃO DE ESTADOS

Como as matrizes  $A_c$  e  $C_c$  são conhecidas em (2), é proposta uma representação diferente, dada na forma

$$\dot{z} = (\bar{A}(\alpha) + \bar{B}(\alpha)L\bar{C}(\alpha))z \quad (4)$$

com

$$\bar{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha)C_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} B(\alpha) & 0 \\ 0 & I_{2m} \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}(\alpha) = [C(\alpha) \ 0_{p \times 2m}] \quad L = \begin{bmatrix} D_c \\ B_c \end{bmatrix}$$

A vantagem aparente da representação (4) é que o ganho  $L$  não possui restrição de estrutura, tornando o problema de síntese menos complicado do que no caso de  $L$  dado em (3), considerando as manipulações (em geral, fontes de conservadorismo) que são necessárias para adaptar as condições da literatura para tratar ganhos estruturados em termos de procedimentos convexos de otimização.

Embora a representação (4) elimine o problema de restrições estruturais no ganho  $L$ , as técnicas de projeto baseadas em LMIs não são adequadas para tratar essa representação. Por exemplo, considere o caso mais simples em que  $\bar{C}(\alpha) = [I \ 0]$ , viabilizando a aplicação das condições LMIs para realimentação de estados com o ganho na forma  $K = LC = [L \ 0]$ . Aplicando a condição de estabilidade de Lyapunov na matriz de malha fechada  $\bar{A}(\alpha) + \bar{B}(\alpha)K$ , isto é<sup>1</sup>,

$$(\bar{A}(\alpha) + \bar{B}(\alpha)K)P + P(\bar{A}(\alpha) + \bar{B}(\alpha)K)' < 0, \quad P > 0$$

tem-se

$$\text{He} \left( \left( \begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha)C_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\alpha) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ K_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2' & P_3 \end{bmatrix} \right) < 0$$

Impondo  $P_2 = 0$  e adotado a mudança de variável

$$\begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ K_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix}$$

tem-se a LMI

$$\text{He} \left( \begin{bmatrix} A(\alpha)P_1 + B(\alpha)Z_1 & B(\alpha)C_cP_3 \\ Z_2 & A_cP_3 \end{bmatrix} \right) < 0$$

que é garantidamente ineficaz pelo fato de  $\text{He}(A_cP_3)$  aparecer na diagonal e  $A_c$  não ter posto completo. O mesmo fenômeno acontece em condições que utilizam variáveis de folga. Embora possa ser argumentado que outras representações de estado para o controlador PID, em que  $A_c$  tivesse posto completo (ou até mesmo fosse uma variável de otimização), poderiam ser utilizadas para contornar o problema identificado, neste trabalho é proposta uma solução baseada em uma transformação de similaridade

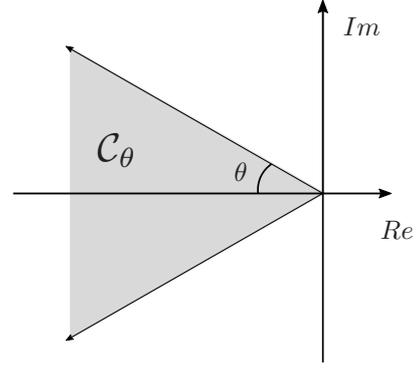


Figura 1. Região de alocação de polos.

aplicada na representação de estados do sistema em malha fechada, isto é,

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ T & -I_{2m} \end{bmatrix} z, \quad T = \begin{cases} [I_{2m} & 0_{2m \times (n-2m)}] & n \geq 2m \\ [I_n & 0_{n \times (2m-n)}]' & n < 2m \end{cases} \quad (5)$$

que leva à representação de estados

$$\dot{\tilde{z}} = (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)L\tilde{C}(\alpha))\tilde{z} \quad (6)$$

com

$$\tilde{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) + B(\alpha)C_cT & -B(\alpha)C_c \\ T(A(\alpha) + B(\alpha)C_cT) - A_cT & A_c - TB(\alpha)C_c \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} B(\alpha) & 0 \\ TB(\alpha) & -I \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}(\alpha) = [C(\alpha) \ 0], \quad L = \begin{bmatrix} D_c \\ B_c \end{bmatrix}$$

Note que a presença do termo  $-TB(\alpha)C_c$  no bloco (2,2) da matriz  $\tilde{A}(\alpha)$  pode prevenir problemas de deficiência de posto da matriz  $A_c$ .

### 4. CONTROLE PID COM ALOCAÇÃO DE POLOS

Nesta seção são fornecidas condições de projeto baseadas em LMIs para o controlador PID (2) explorando a representação de estados (6). Como critério de desempenho, as condições de síntese garantem a alocação dos polos de malha fechada (isto é, os autovalores da matriz  $\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)L\tilde{C}(\alpha)$ ) dentro de um cone de ângulo  $2\theta$ , denotado por  $\mathcal{C}_\theta$ , como ilustra a Figura 1. São basicamente extensões de condições da literatura de realimentação de estados e realimentação estática de saída para tratar a alocação de polos no cone, que pode ser garantida pelo seguinte lema (Chilali and Gahinet, 1996).

Lema 1. Se existir uma matriz de Lyapunov  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$  tal que

$$(\Theta \otimes A(\alpha))X(\alpha) + X(\alpha)(\Theta \otimes A(\alpha))' < 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (7)$$

com

$$X(\alpha) = \begin{bmatrix} P(\alpha) & 0 \\ 0 & P(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

então  $A(\alpha)$  é estável e com autovalores dentro do cone  $\mathcal{C}_\theta$ .

A técnica de projeto apresentada a seguir é baseada na estabilidade quadrática e pode ser aplicada apenas se a matriz de saída  $C(\alpha)$  for precisamente conhecida, isto é,  $C(\alpha) = C$  (Geromel et al., 1996). Uma transformação de similaridade coloca a matriz de saída na forma  $C = [I \ 0]$ , e condições de realimentação de estados sujeitas a restrições de estruturas nas variáveis de otimização podem ser utilizadas para sintetizar o ganho  $L$ .

<sup>1</sup> Por comodidade foi utilizada a estabilidade do sistema dual.

Teorema 1. Seja o sistema (6) com  $C(\alpha) = C$  e  $R$  tal que  $CR = [I \ 0]$ . Se existirem matrizes  $P_{11} = P'_{11}$ ,  $P_{22} = P'_{22}$ , e  $Z_1$  de dimensões apropriadas tais que

$$\text{He} \left( \Theta \otimes \left( R^{-1} \tilde{A}(\alpha) R P + R^{-1} \tilde{B}(\alpha) Z \right) \right) < 0, \forall \alpha \in \Lambda_N$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad Z = [Z_1 \ 0]$$

então  $L = Z_1 P_{11}^{-1}$  é um ganho de realimentação estática de saída tal que o sistema (6) em malha fechada é robustamente estável e os polos estão dentro do cone  $\mathcal{C}_\theta$ .

A próxima condição de projeto é uma melhoria em relação à condição do Teorema 1, permitindo que a matriz de Lyapunov seja dependente de parâmetros e que as restrições de estrutura sejam aplicadas sobre a variável de folga.

Teorema 2. Seja o sistema (6) com  $C(\alpha) = C$ , uma matriz  $R$  tal que  $CR = [I \ 0]$  e  $\xi$  um escalar dado. Se existirem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ ,  $G_{11}$ ,  $G_{21}(\alpha)$ ,  $G_{22}(\alpha)$  e  $Z_1$  de dimensões apropriadas tais que

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}) < 0, \forall \alpha \in \Lambda_N$$

com

$$\mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} \Theta \otimes \left( R^{-1} \left( \tilde{A}(\alpha) R G(\alpha) + \tilde{B}(\alpha) Z \right) \right) \\ I_2 \otimes -G(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \star \\ I_2 \otimes P(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = [I \ \xi I],$$

$$G(\alpha) = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21}(\alpha) & G_{22}(\alpha) \end{bmatrix}, \quad Z = [Z_1 \ 0]$$

então  $L = Z_1 G_{11}^{-1}$  é um ganho de realimentação estática de saída tal que o sistema (6) em malha fechada é robustamente estável e os polos estão dentro do cone  $\mathcal{C}_\theta$ .

As condições dos Teoremas 1 e 2 são adaptações de condições originalmente propostas para o problema de realimentação de estados, e pode ser mostrado que a condição do Teorema 2 contém a condição do Teorema 1 como caso particular para uma escolha adequada de  $\xi$ . A utilidade da condição do Teorema 1 é a possibilidade de tratar parâmetros arbitrariamente variantes no tempo, como por exemplo, em sistemas chaveados.

A próxima técnica de projeto é conhecida na literatura como método dos dois estágios (Peaucelle and Arzelier, 2001; Arzelier et al., 2003; Moreira et al., 2011; Agulhari et al., 2012). Inicialmente projeta-se um controlador por realimentação de estados para o sistema (6) (note que não é necessário aplicar a transformação de similaridade na matriz  $C(\alpha)$ ).

Teorema 3. Seja  $\xi$  um escalar dado. Se existirem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ ,  $G$  e  $Z(\alpha)$  de dimensões apropriadas tais que

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}) < 0, \forall \alpha \in \Lambda_N$$

com

$$\mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} \Theta \otimes \left( \tilde{A}(\alpha) G + \tilde{B}(\alpha) Z(\alpha) \right) \\ I_2 \otimes -G(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \star \\ I_2 \otimes P(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = [I \ \xi I]$$

então  $K(\alpha) = Z(\alpha)G^{-1}$  é um ganho de realimentação de estados tal que o sistema (6) em malha fechada é robustamente estável e os polos estão dentro do cone  $\mathcal{C}_\theta$ .

O ganho  $K(\alpha)$  fornecido pelo Teorema 3 não projeta o ganho  $L$  e também não tem interesse prático, pois depende do parâmetro incerto  $\alpha$ . Contudo,  $K(\alpha)$  pode ser utilizado como um parâmetro de entrada para a condição de síntese apresentada a seguir.

Teorema 4. Seja  $K(\alpha)$  um ganho de realimentação de estados que estabiliza e aloca os polos do sistema (6) em malha fechada dentro do cone  $\mathcal{C}_\theta$ . Se existirem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ ,  $G(\alpha)$ ,  $F(\alpha)$ ,  $H$  e  $R$  de dimensões apropriadas tais que

$$\begin{bmatrix} T_{11}(\alpha) & T_{12}(\alpha) & T_{13}(\alpha) \\ \star & I_2 \otimes (-G(\alpha) - G(\alpha)') & \Theta \otimes (G(\alpha)\tilde{B}(\alpha)) \\ \star & \star & I_2 \otimes (-H - H') \end{bmatrix} < 0$$

com

$$T_{11} = \text{He}(\Theta \otimes ((\tilde{A}(\alpha)' + K(\alpha)'\tilde{B}(\alpha))F(\alpha)'))$$

$$T_{12} = I_2 \otimes (P(\alpha) - F(\alpha)')$$

$$+ \Theta \otimes ((\tilde{A}(\alpha)' + K(\alpha)'\tilde{B}(\alpha)')G(\alpha)')$$

$$T_{13} = \Theta \otimes (F(\alpha)\tilde{B}(\alpha)) + I_2 \otimes (\tilde{C}(\alpha)'R' - K(\alpha)'H')$$

então  $L = H^{-1}R$  é um ganho de realimentação estática de saída tal que o sistema (6) em malha fechada é robustamente estável e os polos estão dentro do cone  $\mathcal{C}_\theta$ .

A condição do Teorema 4 é uma extensão de Agulhari et al. (2012) e pode ser vista como uma contribuição em relação à condição proposta em Bosche et al. (2004) para alocação de polos em cones via realimentação estática de saída no sentido de introduzir duas variáveis de folga extras,  $F(\alpha)$  e  $G(\alpha)$ , que podem reduzir o conservadorismo.

A última condição de projeto a ser apresentada é uma extensão de Felipe (2017) para tratar o problema de alocação de polos em um cone. A condição proposta diferencia-se das três anteriores pelo fato do ganho de controle  $L$  aparecer diretamente como variável de otimização do problema, sem a necessidade de mudança de variável.

Teorema 5. Seja  $\mathcal{B}(\alpha) = [B_1(\alpha), B_2(\alpha), B_3(\alpha)]$  uma matriz incerta com coeficientes conhecidos dada. Se existirem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ ,  $X_1(\alpha)$ ,  $X_2(\alpha)$ ,  $X_3(\alpha)$  e  $L$  de dimensões apropriadas tais que

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) < 0 \quad (8)$$

com

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ I_2 \otimes P(\alpha) & 0 & \star \\ \Theta \otimes \tilde{A}_{cl} & -I & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{cl} = \tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)L\tilde{C}(\alpha)$$

então  $L$  é um ganho de realimentação estática de saída tal que o sistema (6) em malha fechada é robustamente estável e os polos estão dentro do cone  $\mathcal{C}_\theta$ .

**Prova:** Se a condição (8) é verificada, então

$$\text{He}(X_3(\alpha)B_3(\alpha)) < 0,$$

e portanto,  $X_3(\alpha)$  tem posto completo. Multiplicando (8) à esquerda por  $\mathcal{X}(\alpha)^\perp$  e à esquerda pelo transposto, com

$$\mathcal{X}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & -X_1(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \\ 0 & I & -X_2(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \end{bmatrix}$$

tem-se  $\mathcal{X}(\alpha)^\perp \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{X}(\alpha)^\perp < 0$  que pode ser reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \star \\ I_2 \otimes P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \text{He} \left( \begin{bmatrix} -X_1(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \\ -X_2(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} [\Theta \otimes \tilde{A}_{cl}(\alpha) - I] \right) < 0$$

Multiplicando essa última desigualdade por  $[I \ \Theta \otimes \tilde{A}_{cl}(\alpha)']$  à esquerda e pelo transposto à direita, tem-se

$$\text{He}(\Theta \otimes \tilde{A}_{cl}(\alpha)' I_2 \otimes P(\alpha)) < 0$$

que é equivalente a (7) considerando o sistema dual.  $\square$

As condições de projeto do Teorema 5 não são úteis como apresentadas, pois não existe uma regra geral para inicializar a matriz  $\mathcal{B}(\alpha)$  de forma a obter soluções factíveis. Para o problema de estabilização (sem alocação na região  $\mathcal{C}_\theta$ ), em Felipe (2017) foi proposta a matriz de inicialização na forma

$$\mathcal{B}(\alpha) = [I \ I \ -I] \quad (9)$$

e a seguinte modificação na matriz de malha fechada

$$\tilde{A}_{cl}(\alpha) = \tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)L\tilde{C}(\alpha) - \rho I,$$

sendo possível garantir a existência de solução factível com um valor finito para  $\rho$ , que pode ser minimizado como função objetivo. Isso assegura que os polos de malha fechada têm parte real menor do que  $\rho$ . Se  $\rho \leq 0$  então o problema foi resolvido. Caso contrário é possível utilizar a solução  $\mathcal{X}(\alpha)$  como uma nova inicialização para  $\mathcal{B}(\alpha)$ , com a garantia de que as condições fornecem um novo valor para  $\rho$  que é no mínimo igual ao valor anterior. Contudo, a inicialização dada (9) não garante uma solução factível para o problema de alocação. Neste trabalho é proposta uma estratégia de relaxação diferente. Ao invés de relaxar o posicionamento dos polos da matriz de malha fechada, propõe-se relaxar a desigualdade (8) na forma

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) < \rho I \quad (10)$$

Essa relaxação permite testar as condições do Teorema 5 minimizando o valor de  $\rho$ , e ter como garantia a existência de uma solução factível com um valor finito para  $\rho$ . Se  $\rho \leq 0$  então os polos de malha fechada estão dentro do cone  $\mathcal{C}_\theta$ . Caso contrário nada pode ser afirmado. Contudo, assim como em Felipe (2017), é possível usar a solução  $\mathcal{X}(\alpha)$  como uma nova inicialização para  $\mathcal{B}(\alpha)$  e buscar por um novo valor de  $\rho$ . Essa recorrência pode ser sistematizada por meio de um procedimento iterativo, Algoritmo 1, que converge para um valor finito de  $\rho$ . A vantagem desse algoritmo é que o ganho de controle  $L$  é uma variável do problema, o que pode ser muito útil em determinados tipos de problemas práticos. Por exemplo, para um sistema de duas entradas e duas saídas, é possível calcular um controlador PID descentralizado, em que a primeira (segunda) saída é afetada apenas pela primeira (segunda) entrada. Para mais detalhes sobre o algoritmo iterativo, como provas de convergência local, experimentos numéricos e factibilidade da condição inicial, recomenda-se a dissertação de Felipe (2017).

Como comentário final sobre as condições de projeto, é importante mencionar que a transformação de similaridade proposta em (5) é absolutamente essencial para que os Teoremas 1 e 2 forneçam soluções factíveis. Por outro lado, as condições dos Teoremas 4 e 5 podem ser testadas sem a transformação, não sendo possível, em princípio, saber se a transformação sempre melhora os resultados.

---

### Algoritmo 1 Alocação no cone $\mathcal{C}_\theta$

---

- 1: **Inicialização:**  $it_{max}, \mathcal{B}(\alpha) \leftarrow [I \ I \ -I]$
  - 2: **Enquanto**  $k < it_{max}$  **Resolva**
  - 3:      $k \leftarrow k + 1;$
  - 4:     **Resolva** min  $r$  s. a  $P(\alpha) > 0$  e (10)
  - 5:     **Se**  $\rho \leq 0$  **Então**
  - 6:         **Retorna**  $(L, \rho_k)$
  - 7:     **Fim Se**
  - 8:      $\mathcal{B}(\alpha) \leftarrow \mathcal{X}(\alpha)'$
  - 9: **Fim Enquanto**
- 

## 5. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Todas as condições de projeto apresentadas foram dadas em termos de LMIs dependentes de parâmetros, isto é, de desigualdades que dependem de  $\alpha$ . Para obter testes finitos baseados em LMIs impõem-se estruturas polinomiais de grau 1 (por simplicidade) para as variáveis de otimização de todos os teoremas. Na sequência as LMIs finitas são extraídas por meio da aplicação de relaxações de Pólya para testar as desigualdades polinomiais resultantes (Oliveira and Peres, 2007). Esses procedimentos podem ser realizados de forma automática pelo *parser* ROLMIP (Agulhari et al., 2019), que foi especialmente construído para esse fim. As condições foram programadas em Matlab (R2018b) 64 bits e o resolvidor de LMIs Mosek (?) foi empregado. O computador utilizado possui as seguintes especificações: Windows 10, Intel Core i7-8750H (3.90 GHz), 16 GB RAM.

Sobre os Teoremas 2 e 3, que requerem um parâmetro escalar  $\xi$  como dado de entrada, o seguinte conjunto de valores foi utilizado (como sugerido em Oliveira et al. (2011))

$$\{10^{-6}, 10^{-5}, \dots, 10^{-1}, 1, 10^1, \dots, 10^5, 10^6\}$$

consistindo em 13 valores igualmente espaçados em uma escala logarítmica. Com relação ao Algoritmo 1, foi estabelecido  $it_{max} = 15$ .

## 6. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Para avaliar os resultados da modelagem proposta, inicialmente são realizadas comparações estatísticas entre os teoremas apresentados. Assim, foi criada uma base de dados<sup>2</sup> de sistemas incertos instáveis na forma (1) que são garantidamente estabilizáveis pelo controlador PID (2). Além disso, também é garantido que os polos dos sistemas podem ser alocados no cone  $\mathcal{C}_\theta$ . Na geração de matrizes randômicas, foi utilizada a distribuição normal de média nula e desvio padrão unitário.

Para matrizes fixas  $A_c$  ( $T_f$  é especificado) e  $C_c$ , a base de dados foi gerada de acordo com a sequência de passos:

- 1) A matriz  $C(\alpha)$  é criada randomicamente e os coeficientes das matrizes  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$  e  $B_c$  são definidos como variáveis de otimização. Define-se a matriz (linear nas variáveis de otimização)

$$A_{cl}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha)C_c \\ B_c C(\alpha) & A_c \end{bmatrix}$$

---

<sup>2</sup> <http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/programs/CBA2020/PIDdatabase.zip>

Tabela 1. Resultados para  $N = 2$  vértices.

$N = 2$						
$(n,m,p)$	T1	T2	T4	T4*	A1	A1*
(2,1,1)	40	40	98	99	87	100
(2,1,2)	34	34	100	100	74	100
(2,2,2)	100	100	100	100	100	100
(3,1,1)	47	47	99	99	92	100
(3,1,2)	33	34	100	100	87	100
(3,2,2)	100	100	99	100	100	100
(4,1,1)	47	47	99	99	94	100
(4,1,2)	48	49	100	100	91	100
(4,2,2)	100	100	96	96	100	99
média	61%	61,2%	99%	99,2%	91,7%	99,9%

- 2) Duas matrizes quadradas  $X_1(\alpha)$  e  $X_2(\alpha)$  são criadas com coeficientes randômicos de modo que  $\text{He}(X_1(\alpha)) > 0$  e  $\text{He}(X_2(\alpha)) > 0$ .
- 3) Cria-se uma variável de otimização  $P(\alpha)$  e resolve-se a condição

$$\left[ \begin{array}{cc} \text{He}(\bar{X}_1(\alpha) \otimes (A_{cl}(\alpha))) & \star \\ T_{12}(\alpha) & -\text{He}(\bar{X}_2(\alpha)) \end{array} \right] < 0, \forall \alpha \in \Lambda_N$$

com

$$\begin{aligned} T_{21}(\alpha) &= \bar{P}(\alpha) - \bar{X}_1(\alpha)' + \Theta \otimes \bar{X}_2(\alpha) A_{cl}(\alpha) \\ \bar{P}(\alpha) &= \text{diag}(P(\alpha), P(\alpha)), \\ \bar{X}_1(\alpha) &= \text{diag}(X_1(\alpha), X_1(\alpha)), \\ \bar{X}_2(\alpha) &= \text{diag}(X_2(\alpha), X_2(\alpha)), \end{aligned}$$

Em caso de solução factível, os autovalores de  $A_{cl}(\alpha)$  estão dentro do cone  $\mathcal{C}_\theta$  (definido por meio de  $W$ ). Caso contrário retorna-se ao passo 2).

- 4) Procura-se por um ganho randômico  $D_c$  de modo que a matriz  $A_{cl}(\alpha) - \text{diag}(B(\alpha)D_cC(\alpha), 0)$  fique instável.
- 5) Insere-se a tripla  $(A(\alpha) - B(\alpha)D_cC(\alpha), B(\alpha), C(\alpha))$  no banco de dados.

Para viabilizar o uso dos Teoremas 1 (T1) e 2 (T2), as matrizes de saída foram geradas como precisamente conhecidas, isto é,  $C(\alpha) = C$ . Foram fixados os valores  $\theta = 45^\circ$  e  $T_f = 7$  (escolha arbitrária) para todos os sistemas gerados, e foi considerado o seguinte conjunto de dimensões

$$n \in \{2,3,4\}, m \in \{1,2\}, p \in \{1,2\}, m \leq p, N \in \{2,3,4\}$$

perfazendo um total de 900 sistemas para cada  $N$ . As condições do Teorema 4 (T4) e Algoritmo 1 (A1) foram aplicadas com e sem (denotadas por T4\* e A1\*) a transformação proposta em (5).

As porcentagens de sistemas estabilizados são apresentadas nas Tabelas 1, 2 e 3. Nota-se que a condição A1 forneceu os melhores resultados na ausência da transformação proposta em (5), embora a perda de eficácia seja significativa (principalmente em  $N = 4$ ) na presença da transformação. Nesse sentido T4, que também forneceu resultados expressivos, sofre uma leve variação em função da transformação. Os resultados de T1 e T2, embora menos eficazes, são interessantes pois nenhuma solução seria obtida caso a transformação (5) não fosse aplicada.

Para validar as técnicas propostas em um problema prático, o controle PID de um sistema massa-mola-amortecedor é investigado. O modelo é baseado na ilustração fornecida na Figura 2 e tem representação de estados dada por

Tabela 2. Resultados para  $N = 3$  vértices.

$N = 3$						
$(n,m,p)$	T1	T2	T4	T4*	A1	A1*
(2,1,1)	44	44	94	99	84	100
(2,1,2)	30	30	100	100	79	100
(2,2,2)	100	100	100	100	100	100
(3,1,1)	40	40	98	100	92	100
(3,1,2)	32	35	98	99	88	100
(3,2,2)	100	100	98	98	100	100
(4,1,1)	36	39	100	100	93	100
(4,1,2)	35	37	100	100	86	100
(4,2,2)	100	100	95	96	100	100
média	57,4%	58,3%	98,1%	99,1%	91,3%	100%

Tabela 3. Resultados para  $N = 4$  vértices.

$N = 4$						
$(n,m,p)$	T1	T2	T4	T4*	A1	A1*
(2,1,1)	35	37	97	100	83	100
(2,1,2)	35	36	98	100	71	100
(2,2,2)	100	100	99	100	100	100
(3,1,1)	48	49	99	99	88	100
(3,1,2)	34	37	100	100	84	100
(3,2,2)	100	100	99	99	100	100
(4,1,1)	43	43	97	97	86	100
(4,1,2)	31	36	100	100	84	100
(4,2,2)	100	100	99	99	100	100
média	58,4%	59,8%	98,7%	99,3%	88,4%	100%

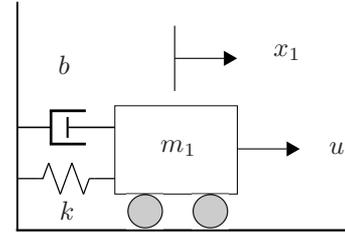


Figura 2. Sistema massa-mola.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0] x$$

com  $m = 10 \text{ Kg}$ ,  $k \in [2, 5] \text{ N/m}$ ,  $b \in [3, 7] \text{ Ns/m}$ , resultando em um polítopo de quatro vértices. Adotando uma taxa de decaimento mínima de  $-0,1$  (isto é considerando  $A(\alpha) = A(\alpha) - 0,1I$ ) e fixando  $\tau = 2$ , as condições foram testadas de modo a encontrar o menor valor de  $\theta$  possível e os seguintes valores foram obtidos para os Teoremas 2, 4 e 5:  $71,0^\circ$ ,  $88,0^\circ$  e  $83,0^\circ$ , respectivamente, com ganhos dados  $K = [r_i, r_p, r_d]$  por

$$\begin{aligned} K_{T_2} &= [-20,7670 \ -0,6445 \ 38,5218], \\ K_{T_4} &= [-6,7093 \ -0,1713 \ -1,6800], \\ K_{T_5} &= [0,0583 \ -0,0108 \ 1,5937] \end{aligned}$$

A resposta à condição inicial  $[x, x_c]' = [1 \ 0 \ 0 \ 0]'$  é ilustrada na Figura 3 e os valores de máximo sobressinal e tempo de acomodação são mostrados na Tabela 4. Nota-se o comportamento menos oscilatório com os ganhos fornecidos pelo Teorema 5, pois os polos de malha fechada associados ao controlador projetado estão dentro de um cone com ângulo  $\theta = 35,85^\circ$ .

Tabela 4. Valores de máximo sobressinal e tempo de acomodação (2% do valor final) associados aos ganhos  $K_{T_2}$ ,  $K_{T_4}$  e  $K_{T_5}$  no sistema massa-mola.

	sobressinal (%)	t. acomodação (s)
$K_{T_2}$	11	17.90
$K_{T_4}$	48	17.73
$K_{T_5}$	3	19.80

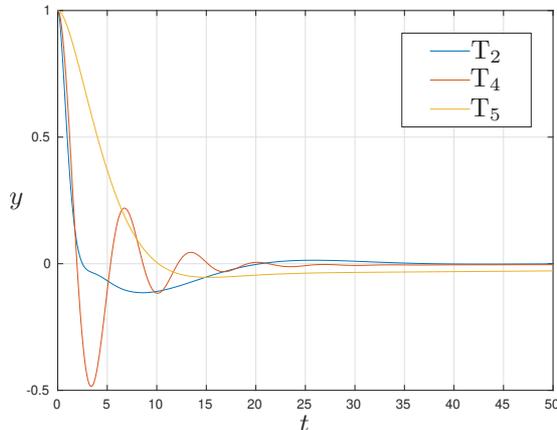


Figura 3. Resposta à condição inicial  $[x, x_c]' = [1 \ 0 \ 0 \ 0]'$  para o sistema massa-mola.

## 7. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposta uma representação de estados que permite reformular o problema de projeto de controladores PID em termos de realimentação estática de saída, viabilizando soluções por meio de condições clássicas da literatura originalmente propostas para tratar realimentação de estados. As abordagens baseadas em dois estágios e em um método iterativo foram propostas como extensões de condições anteriores da literatura para tratar o problema de alocação de polos. Experimentos numéricos ilustraram o mérito das contribuições.

## REFERÊNCIAS

- C. M. Agulhari, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. LMI relaxations for reduced-order robust  $\mathcal{H}_\infty$  control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 57(6):1532–1537, June 2012.
- C. M. Agulhari, A. Felipe, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 45(3):36:1–36:25, August 2019. <http://rolmip.github.io>.
- P. Apkarian, V. Bompard, and D. Noll. Non-smooth structured control design with application to PID loop-shaping of a process. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 17(14):1320–1342, 2007.
- D. Arzelier, D. Peaucelle, and S. Salhi. Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems: Improving the guaranteed performance bound. In *Proc. 4th IFAC Symp. Robust Control Design*, pages 425–430, Milan, Italy, June 2003.
- K. J. Åström and T. Hägglund. *Advanced PID control*. ISA – The Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, USA, 2006.
- J. Bosche, O. Bachelier, and D. Mehdi. Robust pole placement by static output feedback. In *Proc. 43rd IEEE Conf. Decision Control*, volume 1, pages 869–874, Paradise Island, Bahamas, 2004.
- S. Boyd, M. Haddad, and K. J. Åström. MIMO PID tuning via iterated LMI restriction. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 26(8):1718–1731, 2016.
- B. Carvalho and L. Rodrigues. Multivariable PID synthesis via a static output feedback LMI. In *Proc. 58th IEEE Conf. Decision Control*, pages 8398–8403, Nice, France, December 2019.
- M. Chilali and P. Gahinet.  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 41(3):358–367, March 1996.
- C. A. R. Crusius and A. Trofino. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 44(5):1053–1057, May 1999.
- G. A. de Oliveira. Projeto de controladores PID robustos para sistemas politópicos sujeitos à atraso incerto: Uma abordagem LMI. Diss. Mestrado, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília (UnB), Brasília, DF, Julho 2019.
- A. Felipe. Um algoritmo de busca local baseado em LMIs para computar ganhos de realimentação estabilizantes diretamente como variáveis de otimização. Diss. Mestrado, FEEC – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brazil, 2017.
- A. Felipe, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. An iterative LMI based procedure for robust stabilization of continuous-time polytopic systems. In *Proc. 2016 Amer. Control Conf.*, pages 3826–3831, Boston, MA, USA, July 2016.
- M. Ge, M. Chiu, and Q. Wang. Robust PID controller design via LMI approach. *J. Process Control*, 21:3–13, 2002.
- J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. Convex analysis of output feedback control problems: Robust stability and performance. *IEEE Trans. Autom. Control*, 41(7):997–1003, July 1996.
- Y. He and Q.-G. Wang. An improved ILMI method for static output feedback control with application to multivariable PID control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 51(10):1678–1683, October 2006.
- G. Hilhorst, G. Pipeleers, W. Michiels, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, and J. Swevers. An iterative convex approach for fixed-order robust  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control of discrete-time linear systems with parametric uncertainty. In *Proc. 54th IEEE Conf. Decision Control*, pages 6880–6885, Osaka, Japan, December 2015.
- C. Lin, Q.-G. Wang, and T. H. Lee. An improvement on multivariable PID controller design via iterative LMI approach. *Automatica*, 40(3):519–525, 2004.
- H. R. Moreira, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Robust  $\mathcal{H}_2$  static output feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems. *Optim. Control Appl. Meth.*, 32(1):1–13, January/February 2011.
- R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(7):1334–1340, July 2007.

- R. C. L. F. Oliveira, M. C. de Oliveira, and P. L. D. Peres. Robust state feedback LMI methods for continuous-time linear systems: Discussions, extensions and numerical comparisons. In *Proc. 2011 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, pages 1038–1043, Denver, CO, USA, September 2011.
- M. Parada, D. Sbarbaro, R. A. Borges, and P. L. D. Peres. Robust PI and PID design for first-and second-order processes with zeros, time-delay and structured uncertainties. *Int. J. Syst. Sci.*, 48(1):95–106, 2017.
- M. N. A. Parlakçi and E. Caferov. New static output feedback stabilization and multivariable PID-controller design methods for unstable linear systems via an ILMI optimization approach. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, 25(2):1563–1573, 2017.
- D. Peaucelle and D. Arzelier. An efficient numerical solution for  $\mathcal{H}_2$  static output feedback synthesis. In *Proc. 2001 Eur. Control Conf.*, pages 3800–3805, Porto, Portugal, September 2001.
- T. E. Rosa, C. F. Morais, and R. C. L. F. Oliveira. New robust LMI synthesis conditions for mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  gain-scheduled reduced-order DOF control of discrete-time LPV systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 28(18): 6122–6145, October 2018.
- M. Saeki, M. Ogawa, and N. Wada. Low-order  $\mathcal{H}_\infty$  controller design on the frequency domain by partial optimization. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 20(3): 323–333, 2010.
- I. Yaesh and U. Shaked. Robust reduced-order output-feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control. In *Proc. 6th IFAC Symp. Robust Control Design*, pages 155–160, Haifa, Israel, June 2009.
- F. Zheng, Q. Wang, and T. H. Lee. On the design of multivariable PID controllers via LMI approach. *Automatica*, 38:517–526, 2002.