

CONTROLE EXTREMAL MULTIVARIÁVEL VIA FUNÇÕES DE MONITORAÇÃO

NERITO OLIVEIRA AMINDE*, TIAGO ROUX OLIVEIRA†, LIU HSU*

*Programa de Eng. Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil

†Departamento de Eng. Eletrônica e Telecomunicações, DETEL/UERJ, Rio de Janeiro, Brasil

Emails: neritooliveira@yahoo.com.br, tiagoroux@uerj.br, liu@coep.ufrj.br

Abstract— This paper addresses the design of an extremum-seeking controller based on monitoring functions for a class of non-linear multivariable static systems. We demonstrated that it is possible to achieve an arbitrary small neighborhood of the desired optimal point (extremum) from all initial conditions, that is, the algorithm has global convergence properties. Simulation results with a two-input system and one output illustrate some advantages of the multivariable control strategy in terms of fast convergence and small residual errors.

Keywords— Adaptive Control, Extremum Seeking, Multivariable Nonlinear Systems, Monitoring Functions.

Resumo— Este artigo apresenta o projeto de um controlador por busca extremal baseado em funções de monitoração para uma classe de sistemas não-lineares estáticos multivariáveis. Demonstra-se que é possível alcançar uma vizinhança arbitrariamente pequena do extremo (ponto ótimo) partindo-se de quaisquer condições iniciais, isto é, o algoritmo tem propriedades globais de convergência. Resultados de simulação com um sistema de duas entradas e uma única saída ilustram as vantagens da estratégia de controle multivariável proposta, em termos de convergência rápida e erros residuais pequenos.

Palavras-chave— Controle Adaptativo, Controle Extremal, Sistemas Não-lineares Multivariáveis, Funções de Monitoração.

1 Introdução

Controle extremal (ESC, do inglês *Extremum Seeking Control*) é uma forma de controle adaptativo onde a função objetivo é otimizada, sem a necessidade explícita do conhecimento da planta, exceto a existência de um ponto de extremo máximo ou mínimo (Tan et al., 2010). Este método lida com o problema de otimização em tempo real, podendo o mapeamento não-linear ser escalar ou multivariável. Uma abordagem multivariável detalhada pode ser encontrada em (Rotea, 2000; Krstić and Wang, 2000; Ariyur and Krstić, 2003; Tan et al., 2010).

Em (Tan et al., 2010) e referências nele existentes, pode-se encontrar uma série de aplicações de ESC, entre elas, o projeto de sistemas de freios ABS, veículos autônomos e robôs móveis, motores a combustão interna, controle de processos e até aceleradores de partículas.

A maioria das publicações em ESC está concentrada em sistemas de uma entrada e uma saída (SISO). Entretanto, muitos problemas que requerem otimização são multivariáveis (Ariyur and Krstić, 2003). Por isso, nos últimos anos, várias técnicas de controle extremal multivariável foram propostas (Ariyur and Krstić, 2002; Ghaffari et al., 2012; Xiao et al., 2014; Toloue and Moallem, 2017). Essas técnicas de controle podem ser aplicadas a mapeamentos acoplados ou desacoplados. Uma desvantagem do controle de mapeamento desacoplado é a falta de interação entre os canais de entrada (Toloue and Moallem, 2016), por isso, nesse trabalho será considerado o caso em que há um mapeamento acoplado.

De modo geral, existem diferentes metodolo-

gias para realizar o controle extremal. O método mais conhecido baseia-se em sinais de excitação periódica ou *dithers* (Krstić and Wang, 2000). Outra abordagem explorada trata do controle extremal utilizando funções de chaveamento periódicas e modos deslizantes (Oliveira et al., 2011; Oliveira et al., 2012; Toloue and Moallem, 2016). Recentemente, uma nova estratégia de controle extremal (Aminde et al., 2013; Oliveira et al., 2014) foi proposta aplicando-se funções de monitoração (Yan et al., 2003; Yan et al., 2006; Oliveira et al., 2007; Oliveira et al., 2010). Embora os resultados para plantas de grau relativo um em (Aminde et al., 2013) tenham sido generalizados para grau relativo arbitrário (e desconhecido) em (Oliveira et al., 2014), ambas as publicações só levaram em conta o caso SISO.

No presente artigo, apresenta-se uma extensão dos resultados monovariáveis alcançados em (Aminde et al., 2013; Oliveira et al., 2014) para o caso multivariável, mais especificamente o caso de múltiplas entradas e única saída (MISO), considerando um acoplamento entre os canais de entrada e saída. Simulações numéricas que ilustram a aplicabilidade do método são apresentadas.

Notação e Terminologia - Ao longo do artigo, a norma Euclidiana de um vetor x e a norma induzida da matriz A correspondente são denotadas como $\|x\|$ and $\|A\|$, respectivamente. Do ponto de vista técnico, os resultados teóricos obtidos neste artigo são baseados na definição de solução de Phillipov para equações diferenciais com lado direito descontínuo (Filippov, 1964).

2 Formulação do Problema

Considere-se um mapeamento não-linear $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$y = h(x), \quad (1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$. Deseja-se encontrar o vetor x^* que maximiza y . Supõe-se que tal ponto de máximo é único. Esse problema pode ser formulado no contexto de busca extremal de um sistema de controle em que y é a saída e as variáveis x são vistas como as saídas de integradores cujas entradas são dadas por um vetor v de sinais de controle a serem projetados. Assim, considera-se o seguinte sistema

$$\dot{x} = v \quad (2)$$

$$y = h(x) \quad (3)$$

onde $v \in \mathbb{R}^n$ é vetor de entrada e $x = [x_1 \cdots x_n]^T$. De modo a garantir existência e unicidade de soluções, a função não-linear h é localmente Lipschitz contínua em x e suficientemente suave (todas as derivadas são contínuas). Para cada solução de (2)–(3), existe intervalo de tempo máximo de definição dado por $[0, t_M)$, onde t_M pode ser finito ou infinito.

O controle extremal pode ser reformulado como um problema de rastreamento em que a direção de controle é desconhecida (Oliveira et al., 2012). Portanto, deseja-se encontrar uma lei de controle v por realimentação de saída tal que, a partir de quaisquer condições iniciais, o sistema é conduzido para alcançar o ponto extremo y^* e permanecer o mais próximo possível do mesmo. Sem perda de generalização, neste artigo procura-se o extremo máximo.

Cabe notar que sistemas mais gerais podem ser considerados (Aminde et al., 2013; Oliveira et al., 2014), nos quais x seria a saída de um sistema de controle com dinâmica mais complexa do que a de simples integradores. O objetivo de nos atermos ao sistema (2)–(3) é de focar no método aqui proposto para busca extremal em sistemas dinâmicos em que a função objetivo a ser otimizada depende de várias saídas (variáveis medidas) do sistema.

Com relação à planta controlada, assumem-se as seguintes hipóteses:

(H1) (*Sobre as incertezas*): Todos os parâmetros incertos da planta pertencem a um conjunto compacto Ω .

(H2) (*Função Objetivo*): Existe um único vetor $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $y^* = h(x^*)$ é um extremo máximo de $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e, para dado $\Delta_i > 0$, suficientemente pequeno, existe uma constante $L_h(\Delta_i) > 0$, para todo x e para todo i , tal que

$$L_h(\Delta_i) \leq \left| \frac{\partial h}{\partial x_i} \right|, \quad \forall x_i \notin \mathcal{D}_{\Delta_i},$$

onde $\mathcal{D}_{\Delta_i} := \{x_i : |x_i - x_i^*| < \Delta_i/2\}$ é chamada região \mathcal{D}_{Δ_i} de x_i^* e Δ_i pode ser feito arbitrariamente pequeno, bastando escolher L_h suficientemente pequeno.

De (2) e (3), a derivada da saída y em relação ao tempo é dada por

$$\dot{y} = \frac{\partial h^T}{\partial x} v \quad (4)$$

onde o ganho (vetorial) de alta frequência (HFG - *High Frequency Gain*) é dado pelo vetor gradiente, i.e.,

$$k_p(x) := \frac{\partial h^T}{\partial x} = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right]. \quad (5)$$

Do mesmo modo que em (Oliveira et al., 2012), os sinais dos elementos $k_{pi} := \frac{\partial h}{\partial x_i}$ de k_p , podem ser vistos como as *direções de controle*. A hipótese **(H2)** permite considerar um sistema de controle não-linear com HFG dependente do estado, que muda de sinal em torno do ponto ótimo de modo contínuo.

De (5) e **(H2)**, k_p satisfaz ($\forall x_i \notin \mathcal{D}_{\Delta_i}, i = 1, \dots, n$):

$$0 < \underline{k}_p \leq |k_{pi}| \quad (6)$$

onde o limitante inferior $\underline{k}_p \leq L_h$ é uma constante.

3 Controlador extremal multivariável via função de monitoração

O esquema de controle extremal multivariável proposto via funções de monitoração e realimentação de saída está representado na Figura 1. A lei de controle para plantas com HFG desconhecido é definida de forma similar a (Oliveira et al., 2007):

$$v_j = \begin{cases} v_j^+ & = -\rho_i(t) \operatorname{sgn}(e_i(t)), & t \in T_i^+, \\ v_j^- & = \rho_i(t) \operatorname{sgn}(e_i(t)), & t \in T_i^-, \end{cases} \quad (7)$$

sendo $j = 1, \dots, n$, $\rho_i(t)$ i -ésima função de modulação para cada sinal de controle, os conjuntos T_i^+ e T_i^- satisfazem $T_i^+ \cap T_i^- = \emptyset$ e $T_i^+ \cup T_i^- = [0, t_M)$.

Cada sinal de erro $e_i(t)$ é definido como

$$e_i(t) = y(t) - r_i(t), \quad (8)$$

onde cada $r_i > 0$ é uma rampa crescente em função do tempo, gerada através da seguinte trajetória de referência

$$\dot{r}_i = p_i, \quad r_i(0) = r_{i0}, \quad (9)$$

onde $p_i > 0$, r_{i0} são constantes de projeto. Para evitar sinal de referência ilimitado $r_i(t)$ no controlador, pode-se saturá-lo por um limitante superior de y^* sem afetar o desempenho do controlador extremal.

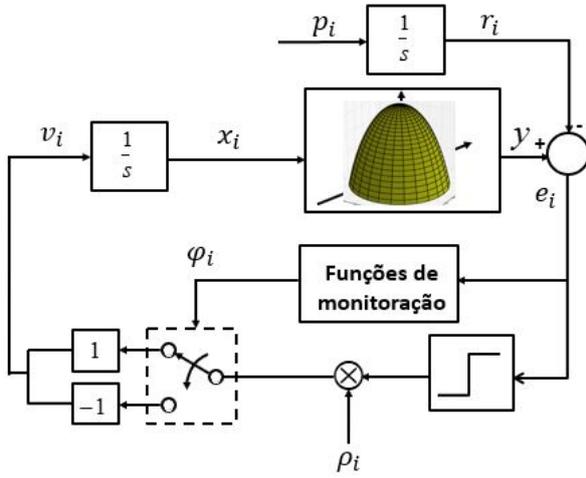


Figura 1: Esquema de controle proposto baseado na i -ésima função de monitoração para sistemas multivariáveis.

As funções de modulação $\rho_i(t)$ serão projetada de forma que $y(t)$ possa rastrear alguma das rampas $r_i(t)$, $\forall t$, até que o ponto extremo seja alcançado. Deste modo, y é forçado a alcançar a vizinhança do máximo $y^* = h(x^*)$ e permanecer próximo do valor ótimo, isto é, na vizinhança do vetor maximizador x^* . Em outras palavras, cada elemento de x_i é forçado a alcançar a vizinhança do maximizador x_i^* ($i = 1, \dots, n$). A partir de um certo tempo finito, obviamente as rampas de referência deixam de ser rastreadas pois h fica limitado superiormente pelo seu valor extremo. Consequentemente, o rastreamento será interrompido. Mas, a vizinhança do máximo já terá sido alcançada conforme desejado. A estratégia de controle proposta garante que y permanecerá próximo a y^* $\forall t > t^*$, conforme será mostrado mais adiante, no Teorema 1. A taxa de convergência de x_i para a região $\mathcal{D}_{\Delta i}$ definida em **(H2)** é função de ρ_i .

3.1 Dinâmica do Erro

De (3), (8) e (9), somando e subtraindo λe_i à derivada de cada elemento do vetor de erros e tem-se

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j} v_j - p_i + \lambda e_i - \lambda e_i, \quad (10)$$

$$\dot{e}_i = -\lambda e_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j} v_j + d_{e_i}, \quad (11)$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante apropriada e

$$d_{e_i} := [-p_i + \lambda e_i]. \quad (12)$$

Por outro lado, a dinâmica do erro pode ser reescrita de forma elementar, para $x_i \notin \mathcal{D}_{\Delta i}$,

$$\dot{e}_i = k_{p_i} [v_i + D_{e_i}], \quad k_{p_i} = \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (13)$$

onde

$$D_{e_i} = \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^{-1} \left[\sum_{j \neq i} \frac{\partial h}{\partial x_j} v_j - p_i + \lambda e_i \right] \quad (14)$$

Inspirado no método da função de monitoração introduzido em (Yan et al., 2003), pode-se propor para o sistema (2)–(3) a lei de controle $v_i = -\text{sgn}(k_{p_i}) \rho_i \text{sgn}(e_i)$, com i -ésima função de modulação ρ_i satisfazendo

$$\rho_i \geq |D_{e_i}| + \delta, \quad i = 1, \dots, n, \quad (15)$$

modulo termos exponencialmente decrescentes. Então, usando o Lema de Comparação (Filippov, 1964), tem-se que $\forall t_i \in [0, t_M)$:

$$|e_i(t)| \leq \zeta_i(t), \quad \zeta_i(t) := |e_i(t_i)| e^{-\lambda(t-t_i)}, \quad (16)$$

Entretanto, $\text{sgn}(k_{p_i})$ é desconhecido, assim, isto não se pode implementar. Portanto, uma função de monitoração é projetada para suprir a falta de conhecimento da direção de controle, fora de cada região $\mathcal{D}_{\Delta i}$.

3.2 Projeto das Funções de Monitoração

A função de monitoração foi introduzida e desenvolvida em (Yan et al., 2003; Oliveira et al., 2007; Oliveira et al., 2010). Partindo-se do princípio de que a desigualdade (16) é garantida quando a direção de controle é correta, é natural usar ζ_i como referência para se decidir quando o chaveamento de v_j em (7) ocorre de v_j^+ para v_j^- (ou v_j^- para v_j^+), isto é, o chaveamento ocorre apenas quando (16) é violada.

Portanto, considere a seguinte função

$$\varphi_{ki}(t) = |e_i(t_{ki})| e^{-\lambda(t-t_{ki})} + r, \quad (17)$$

onde t_{ki} é o tempo de chaveamento, r é qualquer constante arbitrariamente pequena. A i -ésima função de monitoração φ_{mi} pode ser definida como

$$\varphi_{mi}(t) := \varphi_{ki}(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \subset [0, t_M). \quad (18)$$

Note que de (17) e (18), tem-se $|e_i(t)| < |\varphi_{ki}(t)|$ em $t = t_{ki}$. Assim, t_{ki} é definido como o instante em que a função de monitoração $\varphi_{mi}(t)$ encontra $|e_i(t)|$, isto é,

$$t_{k+1} := \begin{cases} \min\{t > t_{ki} : |e_i(t)| = \varphi_{ki}(t)\}, & \text{se existir,} \\ t_M, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (19)$$

onde $k \in \{0, 1, \dots\}$ e $t_0 := 0$ (ver Fig. 2).

A seguinte desigualdade vem de (18)

$$|e_i(t)| \leq \varphi_{mi}(t), \quad \forall t \in [0, t_M). \quad (20)$$

A Figura 2 ilustra o princípio de funcionamento da função de monitoração $\varphi_{mi}(t)$ e a norma do erro de rastreamento $|e_i(t)|$. A cada chaveamento ocorre um salto de dimensão r , parâmetro que determina a ordem das oscilações em torno do extremo procurado, conforme será demonstrado mais adiante.

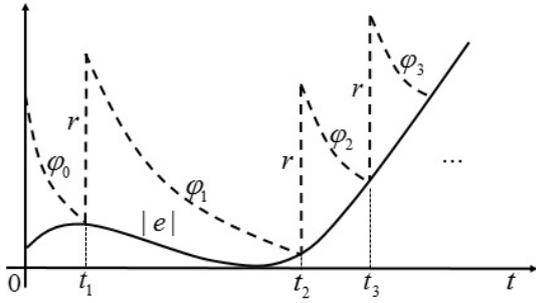


Figura 2: As trajetórias de $\varphi_{mi}(t)$ e $|e_i(t)|$.

3.3 Projeto de Funções de Modulação

A função de modulação é difícil de ser diretamente definida a partir de 14 e 15 pois existem os termos de controle v_j , $j \neq i$ intervindo em cada equação dos erros e_i . Assim sendo, propomos calcular as modulações ρ_i apenas baseados nos termos que independem de v_j , $j \neq i$.

A proposição a seguir utiliza essa estratégia e define uma possível função de modulação.

Proposição 1 *Considere o sistema (2)–(3), trajetória de referência (9) com $p_i = p$, $p > 0$, constante, e com condições iniciais $r_i(0)$ distintas e lei de controle (7). Fora da região $\mathcal{D}_{\Delta i}$, se ρ_i em (7) for definido*

$$\rho_i = \frac{1}{L_h} |(p_i + \lambda e_i)| + \delta, \quad (21)$$

com δ sendo uma constante arbitrariamente pequena, então, enquanto $x_i \notin \mathcal{D}_{\Delta i}$, tem-se: **(a)** a função de monitoração para de chavear em tempo finito, **(b)** não há escape em tempo finito ($t_M \rightarrow +\infty$), e **(c)** y tende para y^* em tempo finito.

3.4 Convergência Global

Neste resultado, é mostrado que o controlador multivariável por realimentação de saída baseado em funções de monitoração conduz x para a região $\mathcal{D}_{\Delta i}$ onde se encontra o maximizador desconhecido x^* definido em **(H2)**. Isto não implica que $x(t)$ permanece em torno de $\mathcal{D}_{\Delta i}$, $\forall t$. Entretanto, as oscilações em torno de y^* podem ser feitas da ordem $\mathcal{O}(r)$.

Teorema 1 *Considere o sistema (2)–(3), lei de controle (7), trajetória de referência (9) com $p_i = p$, $p > 0$, constante, e com condições iniciais $r_i(0)$ distintas, funções de monitoração do tipo (17)–(18) e função de modulação (21). Assuma que **(H1)** – **(H2)** sejam satisfeitas, então: **(i)** cada região $\mathcal{D}_{\Delta i}$ em **(H2)** é globalmente atrativa, sendo alcançada em tempo finito e **(ii)** para L_h suficientemente pequeno, as oscilações em torno do valor máximo y^* de y podem ser feitas da ordem $\mathcal{O}(r)$,*

com r definido em (17). Já que o sinal y_m pode ser saturado em (9), todos os sinais em malha fechada permanecem uniformemente limitados.

A prova do Teorema 1 está em desenvolvimento.

Observação: Nesse teorema supõe-se que as trajetórias de referência sejam rampas de mesma taxa de crescimento, paralelas e distintas. Tal hipótese é feita por facilitar a demonstração. Entretanto, trajetórias de referência partindo de zero no instante zero, porém com inclinações distintas entre si, também resultaram na convergência a uma vizinhança pequena do ponto extremo, conforme ilustrado no exemplo a seguir.

4 Exemplo Ilustrativo

Considere neste exemplo uma planta cuja função objetivo seja desconhecida, e que seja descrita por

$$\dot{x} = v \quad (22)$$

$$y = 3 - [(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 2\epsilon(x_1 - 1)(x_2 - 2)] \quad (23)$$

A função estática (23) consiste da representação genérica de funções do tipo

$$y = h(x) = y^* + \frac{1}{2}(x - x^*)^T H(x - x^*) \quad (24)$$

onde

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 2\epsilon \\ 2\epsilon & 2 \end{bmatrix} < 0$$

é a matriz Hessiana negativa definida.

Analisando a função objetivo (23), conclui-se que os parâmetros ótimos desejados são $x^* = [1 \ 2]$ e $y^* = 3$, para $0 < \epsilon < 1$, condição para que $h(x)$ tenha ponto de máximo. A Figura 3 ilustra a função objetivo, com destaque os parâmetros ótimos a serem identificados pelo algoritmo proposto.

As simulações foram realizadas considerando os seguintes parâmetros do esquema de controle, $K_m = [1 \ 2]$, $k_{pmin} = 1.5$, $\lambda = 2$, $\epsilon = 0.1$, $\delta = 0.1$, $r = 0.3$, $\rho_i = 3$.

A Figura 4 ilustra o resultado do objetivo de controle, a identificação e permanência do vetor otimizador $x^* = [1 \ 2]$ e respectiva saída $y^* = 3$ da função objetivo, parcial ou totalmente desconhecida. Note também que as oscilações em torno de y^* são limitadas à ordem $\mathcal{O}(r)$. A função objetivo (ver Figura 3), pode representar um mapeamento de otimização de potência de uma turbina eólica, onde o vetor x representariam torque e o ângulo da turbina (Creaby et al., 2009).

Por sua vez a Figura 5 ilustra o comportamento das funções de monitoração $\varphi_{m1} = fm_1$ e $\varphi_{m2} = fm_2$ ante suas respectivas normas de erros $|e_1|$ e $|e_2|$. Como pode-se observar no zoom

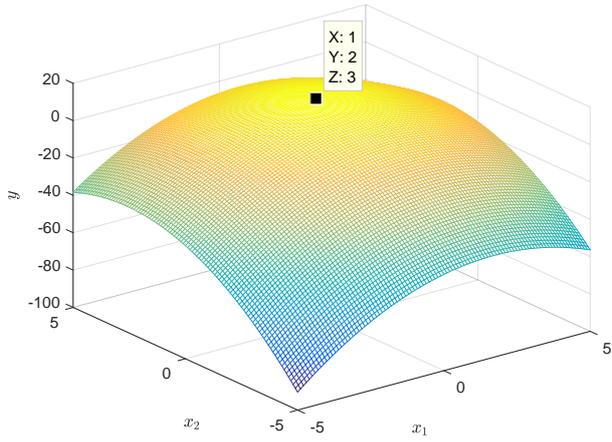


Figura 3: Função objetivo $h(x)$, onde $X := x_1^*$, $Y := x_2^*$ e $Z := y^*$.

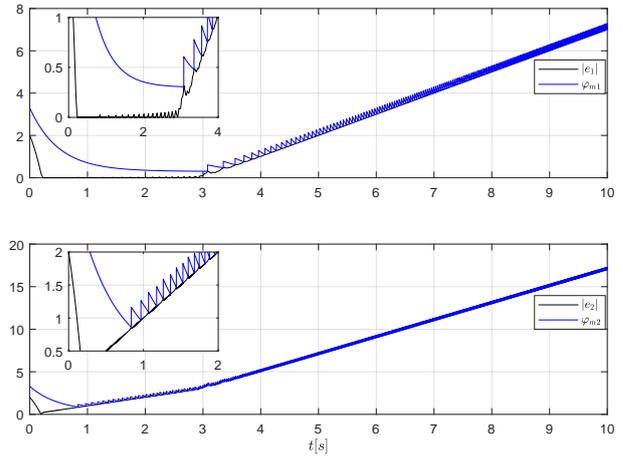


Figura 5: Funções de monitoração φ_{m1} e φ_{m2} e os valores absolutos dos erros $|e_1|$ e $|e_2|$.

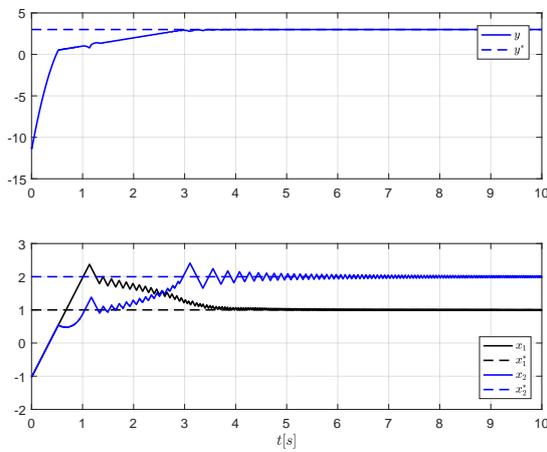


Figura 4: Parâmetros do vetor x convergem para $[1 \ 2]$ partindo da condição inicial $x(0) = [-1 \ -1]$ e saída da planta converge para $y^* = 3$.

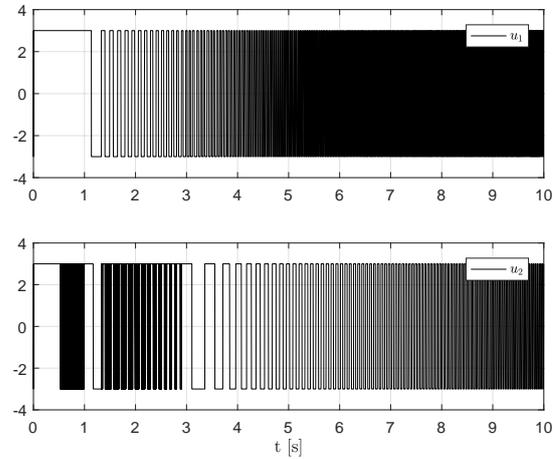


Figura 6: Sinais de controle u_1 e u_2 .

desta figura, a cada instante de mudança da direção de controle ocorre um salto $r = 0.3$ conforme a definição apresentada na Seção 3.2. Outro detalhe importante é o crescimento de $|e|$ erro à proporção do modelo de referência, por isso pode ser saturado em algum ponto.

O chaveamento dos sinais de controle u_1 e u_2 está ilustrado na Figura 6. Nela observa-se que a amplitude de chaveamento é definida pela função de modulação ρ_i . Por simplicidade, usou-se ρ_i constante, que satisfaz (21 Além disso, é notório o chaveamento em alta frequência que poderiam causar o fenômeno indesejado denominado “chattering”. Contudo, o sistema 3 recebe os sinais de controle filtrados (x).

A Figura 7 ilustra o plano de fase dos estados x_1 e x_2 para condição inicial $x(0) = [-1 \ -1]$. Nela é possível notar a convergência para o otimizador $x^* = [1 \ 2]$.

As Figuras a seguir foram geradas para o caso

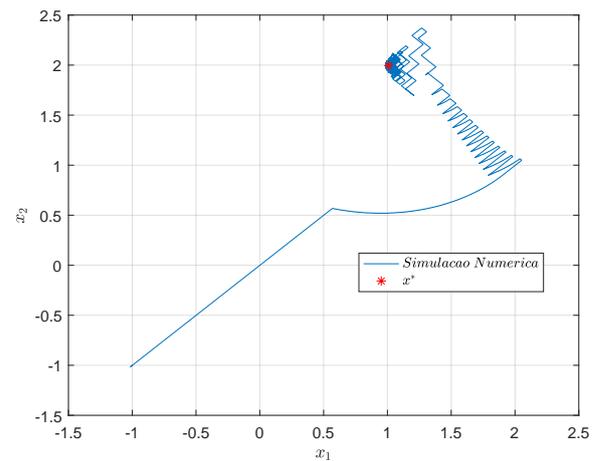


Figura 7: Simulação numérica ilustrando a identificação das coordenadas do vetor otimizador x^* .

de rampas iguais e paralelas, ou seja $p_1 = p_2 = 1$, $r(0) = [0 \ 0.5]$. Além disso, foram consideradas

duas condições iniciais, $x(0) = [-2 \ -2]$ e $x(0) = [2 \ 2]$. Os demais parâmetros são iguais aos usados no exemplo anterior.

A Figura 8 apresenta o rastreamento dos pontos ótimos x^* e y^* , partindo-se de duas condições iniciais. Observa-se que o tempo de convergência praticamente não é afetado pelas condições iniciais.

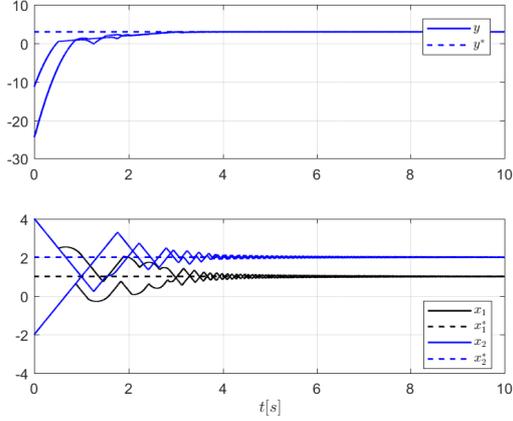


Figura 8: Parâmetros do vetor x convergem para $[1 \ 2]$ partindo de diferentes condições iniciais

Observando a Figura 9, em particular nos detalhes, nota-se que quando um dos erros tende a zero, o outro tende a uma constante, correspondente à diferença entre as rampas de referência. Isto se explica devido a relação existente entre os erros, $e_1 - e_2 = (p_2 - p_1)t$, no caso desse exemplo, $e_1 - e_2 = 0.5$, conforme se pode ver no detalhe do gráfico superior.

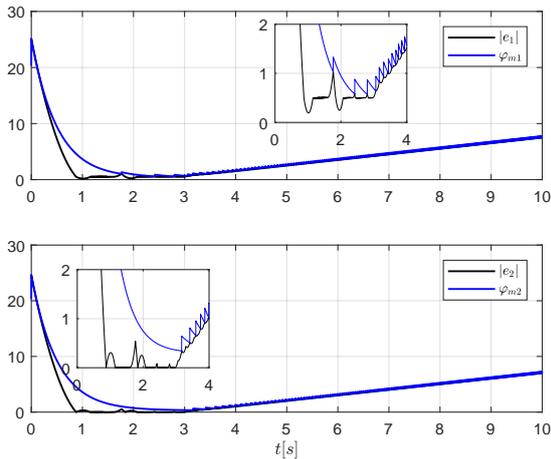


Figura 9: Funções de monitoração φ_{m1} e φ_{m2} e os valores absolutos dos erros $|e_1|$ e $|e_2|$ para condição inicial $x(0) = [-2 \ -2]$.

Por fim, a Figura 10 ilustra o rastreamento das rampas pela saída, a partir de diferentes condições iniciais. Através dela, nota-se que dependendo das condições iniciais, pode ocorrer alter-

nância no rastreamento das rampas.

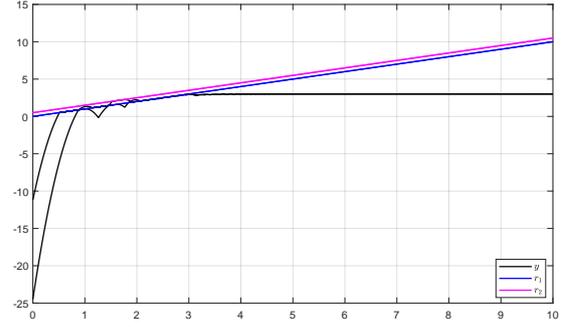


Figura 10: A saída y rastreia as rampas de referência até sua estagnação no ponto máximo, $y^* = 3$.

5 Conclusões

Um controlador extremal multivariável baseado em função de monitoração foi desenvolvido para uma classe de plantas estáticas multivariáveis não lineares. Supõe-se que tal função multivariável tem um único extremo máximo e que a matriz Hessiana correspondente é desconhecida. A abordagem resultante garante convergência global da saída do sistema para uma pequena vizinhança do extremo usando-se apenas realimentação da saída, i.e., o valor da função objetivo. Resultados numéricos consistentes de otimização multivariável para o sinal de saída foram apresentados, ilustrando o desempenho do controlador proposto.

A extensão para plantas com dinâmicas dinâmicas não-lineares em série com o mapeamento estático multivariável está sendo pesquisada.

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES, CNPq, FAPERJ, ISDB-Maputo e a CINOP Global pelo apoio financeiro.

Referências

- Aminde, N. O., Oliveira, T. R. and Hsu, L. (2013). Global output-feedback extremum seeking control via monitoring functions, 52nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC).
- Ariyur, K. B. and Krstić, M. (2002). Analysis and design of multivariable extremum seeking, American Control Conference, pp. 2903 – 2908.
- Ariyur, K. B. and Krstić, M. (2003). *Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control*, John Wiley & Sons.

- Creaby, J., Li, Y. and Seem, J. E. (2009). Maximizing wind turbine energy capture using multi-variable extremum seeking control, *Wind Engineering*.
- Filippov, A. F. (1964). *Differential equations with discontinuous right-hand side*, Vol. 42, pp. 199–231.
- Ghaffari, A., Krstic, M. and Netic, D. (2012). Multivariable newton-based extremum seeking, *Automatica*, pp. 1759–1767.
- Krstić, M. and Wang, H. H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems, *Automatica*, pp. 595–601.
- Oliveira, T. R., Aminde, N. O., and Hsu, L. (2014). Monitoring function based extremum seeking control for uncertain relative degrees with light source seeking experiments, 53rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC).
- Oliveira, T. R., Hsu, L. and Peixoto, A. J. (2011). Output-feedback global tracking for unknown control direction plants with application to extremum-seeking control, Vol. 47, *Automatica*, pp. 2029–2038.
- Oliveira, T. R., Peixoto, A. J. and Hsu, L. (2010). Sliding mode control of uncertain multivariable nonlinear systems with unknown control direction via switching and monitoring function, Vol. 55, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, pp. 1028–1034.
- Oliveira, T. R., Peixoto, A. J. and Hsu, L. (2012). Global real-time optimization by output-feedback extremum-seeking control with sliding modes., *Journal of Franklin Institute*, Vol. 349, pp. 1397–1415.
- Oliveira, T. R., Peixoto, A. J., Nunes, E. V. L. and Hsu, L. (2007). Control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree and unknown control direction using sliding modes, Vol. 21, *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, pp. 692–707.
- Rotea, M. A. (2000). Analysis of multivariable extremum seeking algorithms, *American Control Conference*.
- Tan, Y., Moase, W., Manzie, C., Netic, D. and Mareels, I. (2010). Extremum seeking from 1922 to 2010, *29th Control Conference Chinese (CCC)*, pp. 14–26.
- Toloue, S. F. and Moallem, M. (2016). Multi-variable sliding-mode extremum seeking control with application to alternator maximum power point tracking.
- Toloue, S. F. and Moallem, M. (2017). Multi-variable sliding-mode extremum seeking control with application to alternator maximum power point tracking, *TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS*.
- Xiao, Y., Li, Y. and Seem, J. E. (2014). Multi-variable extremum seeking control for mini-split air-conditioning system, *International Refrigeration and Air Conditioning Conference*.
- Yan, L., Hsu, L., Costa, R. R. and Lizarralde, F. (2003). Variable structure model reference adaptive control for systems with unknown high frequency gain, *Conference on Decision and Control*.
- Yan, L., Hsu, L. and Xiuxia, S. (2006). A variable structure mrac with expected transient and steady-state performance, *Automatica*.