

# Síntese de Controladores Lineares a Parâmetros Variantes sob Restrições Quadráticas Integrais <sup>\*</sup>

Vinicius M. G. B. Cavalcanti <sup>\*</sup> Alberto M. Simões <sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> *Seção de Engenharia de Defesa, Instituto Militar de Engenharia, RJ,  
(e-mail: vinicius.cavalcanti@gmail.com)*

<sup>\*\*</sup> *Seção de Engenharia Elétrica, Instituto Militar de Engenharia, RJ,  
(e-mail: simoes@ime.eb.br)*

**Abstract:** In this work a systematic procedure for linear parameter-varying (LPV) controller synthesis enabling the design of control systems satisfying prescribed structural constraints as well as stability and performance specifications given in terms of integral quadratic constraints (IQC) is presented. The proposed approach relies on a nonsmooth optimization technique to solve the IQC feasibility problem directly in the frequency domain and it is evaluated in a control problem involving the nonlinear model of a missile.

**Resumo:** Neste trabalho é apresentado um procedimento sistemático para a síntese de controladores lineares a parâmetros variantes (LPV), que permite o projeto de sistemas de controle que satisfaçam restrições estruturais prescritas, bem como especificações de estabilidade e desempenho dadas em termos de restrições quadráticas integrais (IQC). A abordagem proposta baseia-se em uma técnica de otimização não diferenciável para resolver o problema de viabilidade da IQC diretamente no domínio da frequência e é avaliada em um problema de controle do modelo não linear de um míssil.

*Keywords:* IQC-synthesis; structured control; nonsmooth optimization; LPV control.

*Palavras-chaves:* Síntese IQC; controle estruturado; otimização não diferenciável; controle LPV.

## 1. INTRODUÇÃO

A síntese de controladores lineares a parâmetros variantes (LPV) tem sido um campo de pesquisa muito ativo durante os últimos 30 anos (Hoffmann e Werner, 2015). Um dos principais atrativos é que uma grande classe de sistemas não lineares podem ser descritos como sistemas LPV ou *quasi*-LPV (Shamma, 2012). Apesar de os algoritmos desenvolvidos terem um grande impacto e terem sido utilizados em inúmeras aplicações, em casos mais gerais nenhuma solução convexa é conhecida para o problema de síntese de um controlador LPV sujeito a restrições estruturais e que seja robusto com relação às incertezas associadas ao modelo.

Uma alternativa para síntese LPV é a abordagem baseada em restrições quadráticas integrais (IQC), como em Veenman e Scherer (2010) ou Wang et al. (2016), o que permite a descrição de uma classe rica de operadores a ser incorporada ao projeto. Estes algoritmos apoiam-se num procedimento iterativo, que alterna entre síntese LPV e análise IQC, similar ao do algoritmo *D, G-K* (Young, 1996). Infelizmente, as principais limitações do algoritmo *D, G-K* também estão presentes nessas técnicas de síntese IQC. Primeiro, nenhum certificado de otimalidade pode ser fornecido. Além disso, os algoritmos são formulações do tipo desigualdades matriciais lineares (LMI), que enfrentam dificuldades no projeto de controladores estruturados

e, por sua vez, motivam o interesse recente nas técnicas de síntese baseada em otimização não diferenciável (Apkarian e Noll, 2006; Burke et al., 2006; Apkarian et al., 2015; Apkarian e Noll, 2018; dos Santos et al., 2018; Cavalcanti e Simões, 2020).

O objetivo deste trabalho é revisar a técnica de síntese IQC de Cavalcanti e Simões (2020) no contexto da síntese LPV e aplicá-la no problema de controle de um míssil. Este procedimento é capaz de superar as supracitadas limitações das técnicas disponíveis baseadas em LMI e permite que o problema de síntese IQC seja resolvido através de algoritmos de síntese  $\mathcal{L}_\infty$  não diferenciável, para os quais uma implementação profissional está atualmente disponível no MATLAB<sup>TM</sup>.

O artigo está organizado como segue. O problema a ser tratado é formulado na Seção 2. Nas Seções 3 e 4, baseado nos resultados de Cavalcanti e Simões (2020), são revisadas a análise e a síntese IQC não diferenciáveis. Na Seção 5, a técnica discutida na Seção 4 é ilustrada com um exemplo numérico. Por último, na Seção 6, o artigo é concluído com algumas considerações finais.

### 1.1 Notação

O espaço de matrizes de transferência próprias, racionais, reais e sem polos no eixo imaginário é denotado por  $\mathcal{RL}_\infty^{l \times m}$ , enquanto que  $\mathcal{RH}_\infty^{l \times m}$  denota o subconjunto de matrizes de transferência próprias, racionais, reais e estáveis. A notação  $\mathcal{L}_{2e}^l[0, \infty)$  designa o espaço de funções

<sup>\*</sup> Essa pesquisa foi financiada em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

$f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^l$  que são quadraticamente integráveis em intervalos finitos, enquanto que  $\mathcal{L}_2^l[0, \infty)$  representa o subespaço de sinais com energia finita. A transformada de Fourier de um sinal  $u \in \mathcal{L}_{2e}^l[0, \infty)$  é denotada por  $\hat{u}(j\omega)$ . Para funções diferenciáveis  $f$  de duas variáveis  $x$  e  $y$ , a notação  $\nabla_x f(x, y)$  designa o gradiente com respeito à primeira variável. Para uma dada matriz complexa  $M$ ,  $M^T$  denota sua transposta,  $M^H$  seu transposto conjugado,  $\bar{\sigma}(M)$  seu maior valor singular,  $\lambda_i(M)$  seu  $i$ -ésimo autovvalor,  $M_{ij}$  seu elemento  $(i, j)$  e  $\text{Herm}\{M\} \triangleq M + M^H$ . A notação  $M \succ 0$  significa que  $M$  é positivo definido. Para duas transferências  $X(s)$  e  $Y(s)$ , a notação  $X(s) * Y(s)$  representa uma LFT (Linear Fractional Transformation) clássica. Termos que podem ser inferidos por simetria são indicados por  $(\star)$ .

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

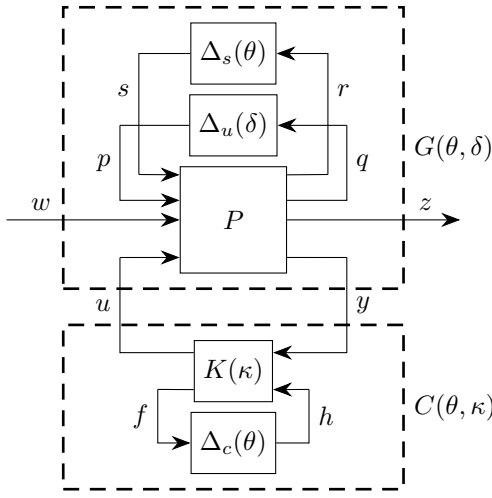


Figura 1. Estrutura para síntese LPV

Considere o sistema LPV na Figura 1, onde  $P$  representa uma planta nominal incerta de ordem  $n$ , bem posta para todo  $\Delta_s(\theta)$  e  $\Delta_u(\delta)$ , potencialmente instável, e que admite a seguinte realização mínima:

$$P : \begin{cases} \begin{bmatrix} r \\ q \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_s & B_p & B_w & B_u \\ C_r & D_{rs} & D_{rp} & D_{rw} & D_{ru} \\ C_q & D_{qs} & D_{qp} & D_{qw} & D_{qu} \\ C_z & D_{zs} & D_{zp} & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{ys} & D_{yp} & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ p \\ w \\ u \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1)$$

Em (1),  $\text{col}(s, p, w, u) \in \mathcal{L}_2^{n_s+n_p+n_w+n_u}$  agrupa, na ordem, os canais de saída dos operadores de interpolação e de incertezas, e as entradas exógena e do controlador, enquanto  $\text{col}(r, q, z, y) \in \mathcal{L}_2^{n_r+n_q+n_z+n_y}$  agrupa, na ordem, os canais de entrada dos operadores de interpolação e de incertezas, e as saídas exógena e mensurada. Assume-se que os operadores, conhecidos como funções de interpolação,

$$\Delta_s(\theta) \triangleq \text{diag}\{\theta_1 I_{M_1}, \dots, \theta_i I_{M_i}\} \quad (2)$$

e

$$\Delta_c(\theta) \triangleq \text{diag}\{\theta_1 I_{N_1}, \dots, \theta_i I_{N_i}\} \quad (3)$$

são funções mensuráveis em tempo real do vetor de parâmetros variantes no tempo  $\theta \triangleq [\theta_1 \dots \theta_i]^T$ . Assume-se, também, que a planta LPV está sujeita a incertezas paramétricas, que afetam no sistema através do bloco

$$\Delta_u(\delta) \triangleq \text{diag}\{\delta_1 I_{R_1}, \dots, \delta_j I_{R_j}\}, \quad (4)$$

com  $\delta \triangleq [\delta_1 \dots \delta_j]^T$  representando o vetor de incertezas paramétricas.

Por fim, assume-se que o controlador nominal  $K(\kappa)$ , de ordem  $n_k$ , admite a representação em espaço de estados

$$K(\kappa) : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k(\kappa) & B_y(\kappa) & B_h(\kappa) \\ C_u(\kappa) & D_{uy}(\kappa) & D_{uh}(\kappa) \\ C_f(\kappa) & D_{fy}(\kappa) & D_{fh}(\kappa) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \\ h \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (5)$$

onde  $\kappa \in \mathbb{R}^{n_\kappa}$  representa o vetor de parâmetros sintonizáveis, com  $(A_k, B_k, C_k, D_k)$  dependendo suavemente em  $\kappa$ . Como discutido em Apkarian e Noll (2014), a representação (5) permite que restrições estruturais no controlador sejam facilmente impostas, como por exemplo: controlador proporcional integral derivativo (PID), de ordem reduzida, ou controle baseado em observador.

O problema de projeto considerado no presente trabalho pode ser resumido como segue.

**Problema 1.** Sintetizar um controlador LPV  $C(\theta, \kappa) \triangleq K(\kappa) * \Delta_c(\theta)$ , possivelmente estruturado, que estabilize o sistema interconectado da Figura 1 e garanta que o ganho  $\mathcal{L}_2$  do canal de desempenho  $w \mapsto z$  seja menor do que um valor  $\gamma$  prescrito, para toda incerteza admissível  $\delta$ .

Neste trabalho, foi investigada uma técnica de programação matemática não diferenciável, baseada na teoria IQC, que permite a solução do Problema 1.

## 3. ANÁLISE IQC NÃO DIFERENCIÁVEL

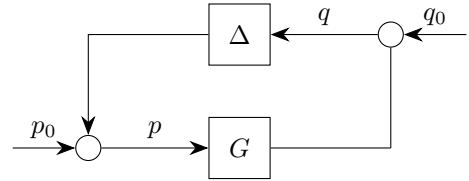


Figura 2. Estrutura para análise IQC

Considere que um dado sistema sob análise possa ser representado pela interconexão retratada na Figura 2 e descrita por

$$\begin{cases} q = Gp + q_0 \\ p = \Delta(q) + p_0 \end{cases}, \quad (6)$$

onde  $G$  é um operador LTI causal com função de transferência  $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{n_q \times n_p}$ , e  $\Delta$  é um operador causal limitado em  $\mathcal{L}_{2e}^{n_q}[0, \infty)$ , pertencente a uma dada classe  $\mathbf{\Delta}$  que identifica a estrutura e a natureza dos operadores que agem sobre o sistema.

Diz-se que o operador  $\Delta : q \mapsto p$  satisfaz a IQC definida por  $\Pi : j\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^{(n_q+n_p) \times (n_q+n_p)}$  se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{q}(j\omega) \\ \hat{p}(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{q}(j\omega) \\ \hat{p}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0. \quad (7)$$

O principal resultado da teoria IQC é recapitulado abaixo. Teorema 1. (Megretski e Rantzer (1997)). Considere a interconexão (6), onde  $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{n_q \times n_p}$  e  $\Delta$  é um operador causal limitado. Assuma que:

- (1) para todo  $\rho \in [0, 1]$ , a interconexão de  $G$  com  $\rho\Delta$  é bem posta;

- (2) para todo  $\rho \in [0, 1]$ , a IQC (7) definida por  $\Pi$  é satisfeita por  $\rho\Delta$ ;  
(3) existe um  $\epsilon > 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \preceq -\epsilon I, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Então, a interconexão de  $G$  com  $\Delta$  é estável.

Em geral, os algoritmos para análise IQC baseiam-se no Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (Rantzer, 1996). Para uma revisão detalhada desse tópico veja, por exemplo, Veenman et al. (2016). Ao invés de recorrer àquele lema, a ideia neste trabalho é atacar o problema de viabilidade do multiplicador acima diretamente no domínio da frequência. Para tanto, será utilizado uma nova desigualdade no domínio da frequência (FDI), que posteriormente se revelará mais adequada para a síntese de controladores.

Para começar, seja a classe de multiplicadores IQC dinâmicos considerada neste trabalho definida da seguinte maneira:

$$\mathbf{\Pi} \triangleq \{ \Pi(s) = \mathcal{S}(s)^H \Phi(s) \mathcal{S}(s), \Phi(s) \in \mathbf{\Phi}, \mathcal{S}(s) \in \mathbf{S} \}, \quad (9)$$

onde

$$\mathbf{\Phi} \triangleq \left\{ \Phi(s) = \begin{bmatrix} \Sigma(s)^H \Sigma(s) & \phi_o(s)^H \\ \phi_o(s) & \text{Herm} \{ \psi(s) \} \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \Phi(s) \in \mathcal{RL}_{\infty}^{(n_q+n_p) \times (n_q+n_p)} \right\}, \quad (10)$$

$$\mathbf{S} \triangleq \left\{ \mathcal{S}(s) = \begin{bmatrix} S_{11}(s) & S_{12}(s) \\ S_{21}(s) & S_{22}(s) \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \mathcal{S}(s) \in \mathcal{RL}_{\infty}^{(n_q+n_p) \times (n_q+n_p)}, S_{22}^{-1}(s) \in \mathcal{RL}_{\infty}^{n_p \times n_p} \right\}. \quad (11)$$

Para um dado  $\mathcal{S}(s) \in \mathbf{S}$ , seja

$$\hat{\mathcal{S}}(s) \triangleq \begin{bmatrix} S_{12}(s)S_{22}(s)^{-1} & S_{11}(s) - S_{12}(s)S_{22}(s)^{-1}S_{21}(s) \\ S_{22}(s)^{-1} & -S_{22}(s)^{-1}S_{21}(s) \end{bmatrix} \quad (12)$$

e considere a planta transformada associada

$$\mathcal{G}(s) \triangleq \hat{\mathcal{S}}(s) * G(s) \\ = (S_{11}(s)G(s) + S_{12}(s))(S_{21}(s)G(s) + S_{22}(s))^{-1}, \quad (13)$$

com a suposição de que  $(S_{21}G + S_{22})^{-1} \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n_p \times n_p}$ .

A motivação da estrutura de  $\Phi(s)$  e a transformação definida por  $\mathcal{S}(s)$  é traduzir o problema de viabilidade original do Teorema 1 num problema de síntese  $\mathcal{L}_{\infty}$ . Isso posto, o principal resultado desta seção é finalmente apresentado no seguinte corolário. Ele apresenta um teste de estabilidade para a interconexão (6), quando o operador  $\Delta$  pode ser caracterizado pelo multiplicador pertencente à classe  $\mathbf{\Pi}$  em (9).

**Corolário 2.** (Cavalcanti e Simões (2020)). Considere a interconexão (6), com  $G(s) \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n_q \times n_p}$  e  $\Delta$  um operador causal limitado. Assuma que

- (1) para todo  $\rho \in [0, 1]$ , a interconexão de  $G$  e  $\rho\Delta$  é bem posta;
- (2) para todo  $\rho \in [0, 1]$ , a IQC (7) definida por  $\Pi \in \mathbf{\Pi}$  é satisfeita por  $\rho\Delta$ ;
- (3) a condição

$$\bar{\sigma} \left( \text{sect} \left( - \begin{bmatrix} \phi_o(j\omega)\mathcal{G}(j\omega) + \psi(j\omega) & 0 \\ \Sigma(j\omega)\mathcal{G}(j\omega) & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix} \right) \right) < 1, \quad (14)$$

$\forall \omega \in \mathbb{R}$

é satisfeita.

Então, a interconexão de  $G$  e  $\Delta$  é estável.

Apesar de a parametrização (9) abranger uma grande classe de multiplicadores IQC, neste trabalho será suficiente considerar aquela que diz respeito a operadores variantes no tempo com taxa de variação limitada, discutida a seguir.

Considere  $\Lambda \triangleq \{ \delta \in \mathbb{R} : |\delta| \leq \gamma, |\dot{\delta}| \leq d \}$ , e suponha que  $\delta(t)$  represente um parâmetro variante no tempo com trajetórias em  $\delta \triangleq \{ \delta(\cdot) \in C^1([0, \infty), \mathbb{R}) : (\delta(t), \dot{\delta}(t)) \in \Lambda, \forall t \}$ . Ou seja,  $\delta$  é um operador paramétrico real, LTV com taxa de variação limitada, repetido diagonalmente, de modo que  $\Delta$  pertence ao conjunto

$$\Delta_{\text{ltv,rb,dr}} \triangleq \{ \delta I_l : \delta \in \delta \}. \quad (15)$$

Em seguida, considere duas funções de transferências  $D(s)$ ,  $W(s) \in \mathcal{RL}_{\infty}^{l \times l}$ , dadas por

$$D(s) \triangleq C_D(sI - A_D)^{-1}B_D + D_D, \quad (16)$$

$$W(s) \triangleq C_W(sI - A_W)^{-1}B_W + D_W, \quad (17)$$

onde  $A_D, A_W \in \mathbb{R}^{n_D \times n_D}$ . Com base nas realizações em espaço de estados (16)-(17), considere também

$$D_C(s) \triangleq C_D(sI - A_D)^{-1}, \quad (18)$$

$$D_B(s) \triangleq (sI - A_D)^{-1}B_D, \quad (19)$$

$$W_C(s) \triangleq C_W(sI - A_W)^{-1}, \quad (20)$$

$$W_B(s) \triangleq (sI - A_W)^{-1}B_W. \quad (21)$$

Finalmente, sejam  $\Gamma(s)$  e  $\Upsilon(s)$  construídas da seguinte forma

$$\Gamma(s) = [D_B(s)^H \ W_B(s)^H \ W_C(s)]^H, \quad (22)$$

$$\Upsilon(s) = D_C(s)^H D(s). \quad (23)$$

Seguindo Jönsson e Rantzer (1996), para todo  $\Delta \in \Delta_{\text{ltv,rb,dr}}$ , a IQC (7) é válida com

$$\mathbf{\Pi} \triangleq \left[ \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \gamma D \\ \gamma \sqrt{d} \Gamma \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \gamma D \\ \gamma \sqrt{d} \Gamma \end{bmatrix} & \gamma (W - W^H) \\ \gamma (W^H - W) & \text{Herm} \left\{ -\frac{1}{2} D^H D + \frac{1}{2} d \Upsilon^H \Upsilon \right\} \end{array} \right], \quad (24)$$

com  $D, W \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n_q \times n_q}$ .

Os termos  $\Gamma$  e  $\Upsilon$  em (24) podem ser vistos como ponderações que penalizam a variação temporal dos parâmetros incertos. Tal penalidade é proporcional ao limite sobre a taxa de variação  $d$ .

Note que os multiplicadores IQC para uma série de outros operadores podem ser obtidos diretamente do multiplicador (24) pela seleção apropriada de  $D, W$  e considerando  $d = 0$ , que corresponde a negligenciar os termos envolvendo  $\Gamma$  e  $\Upsilon$ . A Tabela 1 indica como obter, a partir de (24), os multiplicadores para as seguintes classes de operadores:

- (1) dinâmica LTI incerta, estável, diagonalmente repetida:

$$\Delta_{\text{lti,dyn,dr}} \triangleq \{\delta I_{n_q} : \delta \in \mathcal{H}_\infty, \|\delta\|_\infty \leq \gamma\}.$$

(2) dinâmica LTI incerta, estável, de bloco cheio:

$$\Delta_{\text{lti,dyn,fb}} \triangleq \{\Delta \in \mathcal{H}_\infty^{n_q \times n_q} : \|\Delta\|_\infty \leq \gamma\}.$$

(3) parâmetro incerto constante repetido:

$$\Delta_{\text{lti,re,dr}} \triangleq \{\delta I_{n_q} : \delta \in \mathbb{R}, |\delta| \leq \gamma\}.$$

(4) parâmetro repetido variante no tempo com taxa de variação arbitrária: para

$$\Lambda \triangleq \{\delta \in \mathbb{R} : |\delta| \leq \gamma\},$$

seja  $\delta : [0, \infty) \mapsto \Lambda$  um parâmetro real contínuo por partes e variante no tempo com taxa de variação arbitrária. Então,  $\Delta$  pertence ao conjunto

$$\Delta_{\text{ltv,re,dr}} \triangleq \{\delta I_{n_q} : \delta : [0, \infty) \mapsto \Lambda \text{ é contínuo por partes}\}.$$

Tabela 1. Multiplicadores que são casos particulares de (24)

classe	$d$	$W$	$D$
$\Delta_{\text{lti,re,dr}}$	0	$\mathcal{RL}_\infty^{n_q \times n_q}$	$\mathcal{RL}_\infty^{n_q \times n_q}$
$\Delta_{\text{ltv,re,dr}}$	0	$\mathbb{R}^{n_q \times n_q}$	$\mathbb{R}^{n_q \times n_q}$
$\Delta_{\text{lti,dyn,dr}}$	0	0	$\mathcal{RL}_\infty^{n_q \times n_q}$
$\Delta_{\text{lti,dyn,fb}}$	0	0	$d(j\omega)I_{n_q} \in \mathcal{RL}_\infty^{n_q \times n_q}$

#### 4. SÍNTESE IQC NÃO DIFERENCIÁVEL

Uma formulação conveniente para o problema de síntese IQC de controladores estruturados pode ser obtida a partir do teste de estabilidade (14). Para esse fim, considere que o critério de desempenho possa ser imposto a partir da seguinte IQC

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{z}(j\omega) \\ \hat{w}(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi_p(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{z}(j\omega) \\ \hat{w}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \leq -\epsilon \|w\|^2. \quad (25)$$

Então, segundo Veenman et al. (2016), diz-se que desempenho robusto é atingido se a interconexão (6) é estável se existir  $\Pi_p \in \mathbf{\Pi}$  tal que a IQC (25) seja satisfeita para todas as trajetórias de  $w \in \mathcal{L}_2^{n_w}$ . De outra forma, desempenho robusto pode ser visto como um caso particular do problema de estabilidade robusta para um operador aumentado  $\hat{\Delta} \triangleq \text{diag}\{\Delta, \Delta_p\}$ , onde

$$\Delta_p \triangleq \{\Delta_p : \mathcal{L}_{2e}^{n_z} \mapsto \mathcal{L}_{2e}^{n_w}, \|\Delta_p\| \leq \gamma\}. \quad (26)$$

Neste trabalho, o critério de desempenho adotado está relacionado ao ganho  $\mathcal{L}_2$  induzido  $\sup_{\Delta \in \Delta} \|\Delta * G\| < \gamma$ , com  $\gamma > 0$ . Portanto,

$$\Pi_p \triangleq \begin{bmatrix} D^H D & 0 \\ 0 & \text{Herm} \left\{ -\frac{\gamma^2}{2} D^H D \right\} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Ainda, utilizando a propriedade de que o quadro de trabalho IQC pode, facilmente, acomodar operadores diagonalmente repetidos, de forma análoga a Veenman e Scherer (2010) a estrutura da Figura 1 pode ser reorganizada como na Figura 3, onde  $M \triangleq P * K(\kappa)$ . Sabe-se que desempenho robusto é atingido se a FDI (8) for satis-

feita para o multiplicador IQC  $\Pi_a$  caracterizando  $\Delta_a \triangleq \text{diag}\{\Delta_s, \Delta_u, \Delta_p, \Delta_c\}$ , isto é

$$\begin{bmatrix} M(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \Pi_a(j\omega) \begin{bmatrix} M(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \preceq 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \quad (28)$$

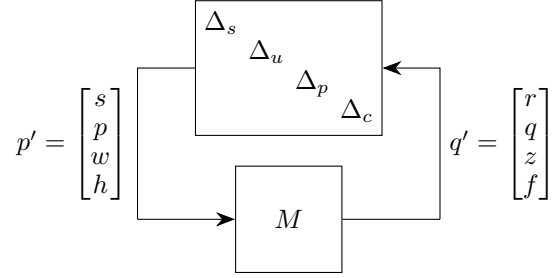


Figura 3. Estrutura transformada para síntese LPV

Seja o multiplicador  $\Pi_a(s, \chi) \in \mathbf{\Pi}_a \subset \mathbf{\Pi}$  escrito como

$$\Pi_a = (\star)^H \begin{bmatrix} \Sigma(s, \chi)^H \Sigma(s, \chi) & \phi_o(s, \chi)^H \\ \phi_o(s, \chi) & \text{Herm} \{\psi(s, \chi)\} \end{bmatrix} \mathcal{S}(s, \chi), \quad (29)$$

onde  $\chi \in \mathbb{R}^{n_\chi}$  representa o vetor de parâmetros sintonizáveis do multiplicador. Assume-se que  $\Pi_a(s, \chi)$  admite uma representação em espaço de estado cujas matrizes são funções suaves em  $\chi$ . Finalmente, assumamos que o sistema nominal em malha fechada admite a realização em espaço de estados

$$G(s, \kappa) = P(s) * K(s, \kappa) \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\kappa) & \mathcal{B}(\kappa) \\ \mathcal{C}(\kappa) & \mathcal{D}(\kappa) \end{bmatrix} \quad (30)$$

e portanto, a planta transformada é descrita por

$$\mathcal{G}(s, \kappa, \chi) = \hat{\mathcal{S}}(s, \chi) * (P(s) * K(s, \kappa)). \quad (31)$$

Com as definições acima, o Problema 1 pode ser reformulado como segue: determine os vetores  $\chi$  e  $\kappa$  de parâmetros sintonizáveis que definem o multiplicador IQC e o controlador procurado, respectivamente, tais que a planta nominal em malha fechada (30) seja estável e a restrição no domínio da frequência

$$\bar{\sigma} \left( \text{sect} \left( - \begin{bmatrix} \phi_o(s, \chi) \mathcal{G}(s, \kappa, \chi) + \psi(s, \chi) & 0 \\ \Sigma(s, \chi) \mathcal{G}(s, \kappa, \chi) & -\frac{1}{2} I \end{bmatrix} \right) \right) < 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (32)$$

é cumprida.

O problema de síntese acima é reconhecidamente difícil de se resolver. De fato, a presença simultânea de multiplicador e controlador, ambos sujeitos a restrições estruturais, complica a obtenção de uma formulação LMI adequada para o problema de síntese. Para superar essa dificuldade, uma abordagem de otimização não diferenciável, semelhante à proposta em Apkarian e Noll (2006), é adotada aqui, conforme explicado a seguir.

Considere a classe de mapeamentos

$$\mathbf{H} \triangleq \left\{ \eta(v) = \max_{y \in Y} \vartheta(v, y) \right\}, \quad (33)$$

onde  $\vartheta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é contínuo,  $\nabla_v \vartheta(\cdot, \cdot)$  existe e é contínuo, e  $Y \in \mathbb{R}^m$  é compacto. A ideia central neste trabalho é resolver o Problema 1 por meio do seguinte programa de otimização:

$$\begin{aligned}
& \underset{\kappa, \chi}{\text{minimizar}} && f(\kappa, \chi) \triangleq \max_{\omega} F(s, \kappa, \chi) \\
& \text{sujeito a} && g(\kappa) \triangleq \max_j \text{Re} \{ \lambda_j(\mathcal{A}(\kappa)) \} + \epsilon \leq 0, \quad \epsilon > 0, \\
& && h_i(\chi) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_{\Pi}, \\
& && l_j(\kappa) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n_K,
\end{aligned} \tag{34}$$

com

$$F \triangleq \bar{\sigma} \left( \text{sect} \left( - \begin{bmatrix} \phi_o(s, \chi) \mathcal{G}(s, \kappa, \chi) + \psi(s, \chi) & 0 \\ \Sigma(s, \chi) \mathcal{G}(s, \kappa, \chi) & -\frac{1}{2} I \end{bmatrix} \right) \right),$$

e com  $h_i(\cdot), l_j(\cdot) \in \mathbf{H}$ , para todo  $i, j$ . A motivação por trás do programa (34) é que, se for possível achar uma solução viável  $(\kappa^*, \chi^*)$  tal que  $f(\kappa^*, \chi^*) < 1$ , então isto implica que o controlador associado  $K(s, \kappa^*)$  soluciona o Problema 1. No programa (34), a função de restrição  $g(\cdot)$  visa garantir a estabilidade do sistema nominal em malha fechada  $G$ , enquanto as funções de restrição  $h_i(\cdot)$  e  $l_j(\cdot)$  servem para traduzir eventuais restrições no multiplicador e no controlador, respectivamente.

Uma dificuldade decorre do fato do programa (34) ser não convexo, não diferenciável e semi-infinito e, portanto, consiste em um problema desafiador de programação matemática. Por outro lado, um aspecto atraente do programa (34) é que a função objetivo  $f(\cdot)$  também pertence à classe  $\mathbf{H}$  em (33), cujos elementos consistem em funções Clarke regulares (Clarke, 1990). Tais mapeamentos são interessantes porque uma descrição exhaustiva de seus subdiferenciais de Clarke está disponível, o que permite o desenvolvimento de técnicas especializadas e eficientes de otimização. A abscissa espectral que aparece na função de restrição  $g(\cdot)$  é, a princípio, nem mesmo Lipschitz contínua. Contudo, uma vez que  $g(\cdot)$  geralmente não é minimizada para otimalidade local, os autovalores ativos de  $\mathcal{A}(\kappa)$  tendem a permanecer todos semissimples (Apkarian e Noll, 2006), nesse caso a abscissa espectral também admite um subdiferencial de Clarke.

O algoritmo de otimização não diferenciável introduzido em Apkarian et al. (2008) é adotado para resolver o programa (34) e, conseqüentemente, o problema de síntese IQC. Uma característica chave dessa técnica de otimização é o seu certificado de otimalidade, que garante a convergência em direção a um ponto crítico, que na maior parte das vezes é um mínimo local, a partir de um ponto de partida arbitrário. Uma implementação prática desse algoritmo está atualmente disponível na rotina SYSTUNE do MATLAB<sup>TM</sup>. Para maiores detalhes sobre o algoritmo de otimização não diferenciável, o leitor é direcionado para Apkarian et al. (2014) e suas referências.

Vale ressaltar que a análise IQC representa uma instância mais simples do problema de síntese IQC discutido acima, no qual a estabilidade nominal em malha fechada é assumida por hipótese e os únicos parâmetros sintonizáveis são os dos multiplicadores em  $\chi$ . Neste caso, o programa (34) é simplificado para

$$\begin{aligned}
& \underset{\chi}{\text{minimizar}} && f(\chi) \triangleq \max_{\omega} F(s, \chi) \\
& && h_i(\chi) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_{\Pi},
\end{aligned} \tag{35}$$

com

$$F \triangleq \bar{\sigma} \left( \text{sect} \left( - \begin{bmatrix} \phi_o(s, \chi) \mathcal{G}(s, \chi) + \psi(s, \chi) & 0 \\ \Sigma(s, \chi) \mathcal{G}(s, \chi) & -\frac{1}{2} I \end{bmatrix} \right) \right).$$

Como antes, se uma solução viável  $\chi^*$  puder ser encontrada de tal forma que  $f(\chi^*) < 1$  em (35), então pode-se inferir que a interconexão (6) de  $G(s)$  e  $\Delta$  é estável.

A análise IQC baseada no programa de otimização não diferenciável (35) também oferece benefícios potenciais quando comparada a abordagens de análise IQC baseadas em LMI. Se, por um lado, apenas um certificado de otimalidade local pode ser fornecido para o programa (35), por outro lado, ele não envolve variáveis de Lyapunov. Conseqüentemente, a abordagem não diferenciável pode consistir em uma alternativa interessante no caso de plantas de ordem elevada. Além disso, ao contrário das formulações LMI existentes, os polos dos multiplicadores IQC não são obrigados a permanecerem fixos, mas também são sintonizados durante a otimização. Conseqüentemente, resultados menos conservadores podem ser obtidos com a análise IQC não diferenciável.

## 5. APLICAÇÃO NUMÉRICA

### 5.1 Problema de Controle de um Míssil

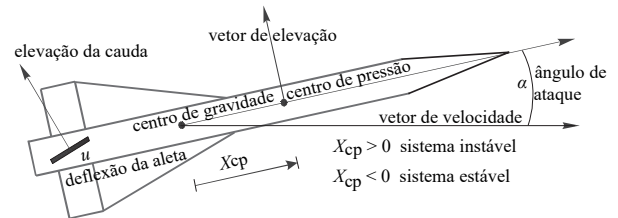


Figura 4. Diagrama físico do míssil

A técnica descrita na seção anterior foi aplicada no problema de piloto automático para o modelo longitudinal não linear de um míssil ar-ar, introduzido em Reichert (1992), cujo modelo dinâmico é dado por

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = K_{\alpha} \cos(\alpha(t)) M(t) C_n[\alpha(t), u(t), M(t)] + q(t) \\ \dot{q}(t) = K_q M^2(t) C_m[\alpha(t), u(t), M(t)] \\ \dot{\eta}(t) = K_{\eta} M^2(t) C_n[\alpha(t), u(t), M(t)] \end{cases}, \tag{36}$$

com

$$\begin{aligned}
C_n &= a_n \alpha^3 + b_n |\alpha| \alpha + c_n (2 - M/3) \alpha + d_n u, \\
C_m &= a_m \alpha^3 + b_m |\alpha| \alpha + c_m (-7 + 8M/3) \alpha + d_m u,
\end{aligned}$$

e

$$u = G_u(s) u_c, \quad G_u(s) = \frac{\omega_a^2}{s^2 + 2\zeta \omega_a s + \omega_a^2}.$$

O modelo, retirado de Nichols et al. (1993), cujos valores numéricos e unidades dos coeficientes estão relacionados na Tabela 2, envolve o ângulo de ataque  $\alpha(t)$ , velocidade angular de arfagem  $q(t)$ , o ângulo de deflexão da aleta  $u(t)$  e sua derivada  $\dot{u}(t)$ . A aceleração normal  $\eta(t)$  e a velocidade angular de arfagem  $q(t)$  são saídas mensuráveis.

A descrição não linear acima representa um míssil voando a 20000 pés de altura, operando com  $\alpha \in [-20^\circ, 20^\circ]$  e  $M \in [2, 4]$ . A dinâmica da planta pode ser parametrizada por  $\alpha(t)$  (ângulo de ataque) e  $M(t)$  (número de Mach). Neste trabalho, considera-se que a única variável disponível para a interpolação do controlador é  $\alpha(t)$  e que  $M(t)$  é uma incerteza paramétrica. Devido à simetria do míssil com relação a  $\alpha = 0$ , o controlador é projetado apenas para

Tabela 2. Detalhes do modelo longitudinal do míssil

$K_\alpha$	$0,7P_0S/(mv_s)$	
$K_q$	$0,7P_0Sd/I_y$	
$K_\eta$	$0,7P_0S/m$	
$A_x$	$0,7P_0SC_a/m$	
$P_0$	973,3 lbs/ft <sup>2</sup>	pressão estática a 20000 pés
$S$	0,44 ft <sup>2</sup>	superfície de referência
$m$	13,98 slugs	massa
$v_s$	1036,4 ft/s	velocidade do som a 20000 pés
$d$	0,75 ft	diâmetro
$I_y$	182,5 slug.ft <sup>2</sup>	momento de inércia em arfagem
$C_a$	-0,3	coeficiente de arrasto
$\zeta$	0,7	fator de amortecimento do atuador
$\omega_a$	150 rad/s	frequência natural não amortecida do atuador
$g$	32,2 ft/s <sup>2</sup>	constante de gravidade
$a_n$	0,000103 deg <sup>-3</sup>	
$b_n$	-0,00945 deg <sup>-2</sup>	
$c_n$	-0,1696 deg <sup>-1</sup>	
$d_n$	-0,034 deg <sup>-1</sup>	
$a_m$	0,000215 deg <sup>-3</sup>	
$b_m$	-0,0195 deg <sup>-2</sup>	
$c_m$	0,051 deg <sup>-1</sup>	
$d_m$	-0,206 deg <sup>-1</sup>	

valores positivos de  $\alpha(t)$  (Balas e Packard, 1992; Pellanda et al., 2004). Além disso, para simulações não lineares, um perfil realista para o número de *Mach* é gerado por

$$\dot{M}(t) = \frac{1}{v_s} [-|\eta(t)|\text{sen}(|\alpha(t)|) + A_x M^2(t) \cos(\alpha(t))], \quad (37)$$

com  $M(0) = 4$ , similar ao utilizado em Nichols et al. (1993) e Pellanda et al. (2004).

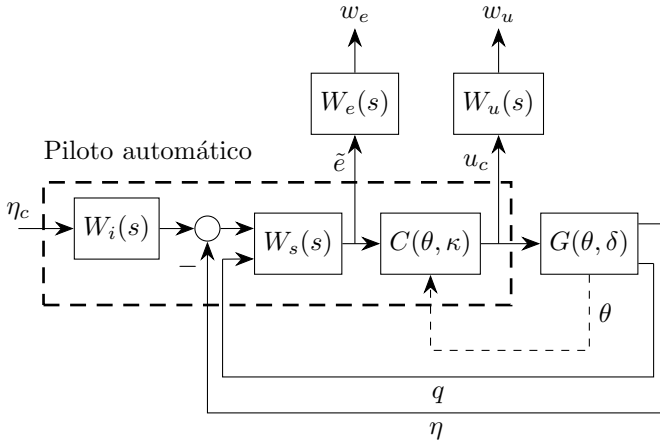


Figura 5. Estrutura para síntese do piloto automático

O objetivo de projeto é a síntese de um controlador que mantenha estabilidade robusta sob toda faixa de operação de  $\alpha(t)$  e  $M(t)$ , além de rastrear comandos em degrau na aceleração normal  $\eta_c(t)$  com constante de tempo menor que 0,35s, erro em regime permanente menor que 1% e sobressinal menor que 10%. Para evitar a saturação do atuador, a taxa de variação da aleta para 1g deve ser menor que 25°/s.

## 5.2 Estratégia de Controle

Este problema de projeto é abordado por meio de uma formulação de sensibilidade mista, na qual o canal de desempenho é definido como a transferência em malha fechada da entrada exógena  $w \triangleq \eta_c$  para a saída exógena  $z \triangleq \text{col}(w_e, w_u)$ . O pré-compensador  $W_i(s)$  é usado para moldar o sinal de referência,  $W_s(s) \triangleq \text{diag}(1/s, -1)$  e

$W_e(s) \triangleq \text{diag}(W'_e(s), 0,01)$  penalizam o erro de referência, enquanto  $W_u(s)$  incorpora limites na norma das dinâmicas não modeladas e também reflete restrições no sinal de controle.

As funções de ponderação foram selecionadas como em Pellanda et al. (2002):

$$W_i(s) = \frac{14}{s + 14}, \quad (38)$$

$$W'_e(s) = \frac{0,106s^2 + 288,8s + 396534}{s^2 + 138,4s + 9669}, \quad (39)$$

$$W_u(s) = \frac{917570s^2 + 8,127 \times 10^7s - 1,406 \times 10^{12}}{s^2 + 291320s + 4,033 \times 10^{10}}. \quad (40)$$

É conveniente normalizar os parâmetros, relacionados à variável de interpolação  $\theta$  e à incerteza  $\delta$

$$\alpha = 10 + 10\theta, \theta \in [-1, 1], \quad (41)$$

$$M = 3 + \delta, \delta \in [-1, 1]. \quad (42)$$

Neste exemplo, considera-se a aproximação  $\cos(\alpha(t)) \approx 1$ , como em Scherer et al. (1997), para se chegar a uma formulação LFT/LPV do modelo (36)

$$G(\theta, \delta) \triangleq \begin{bmatrix} \theta I_2 & 0_{2 \times 5} \\ 0_{5 \times 2} & \delta I_5 \end{bmatrix} * P. \quad (43)$$

A estrutura do controlador é selecionada como

$$C(\theta, \kappa) \triangleq K(\kappa) * \theta I_1. \quad (44)$$

Note que,  $K(\kappa)$  representa o bloco do controlador a ser sintetizado de fato. Assim, a interconexão da Figura 5 é reorganizada na forma padrão da Figura 1 com

$$\Delta_s \triangleq \theta I_2 \in \Delta_{\text{ltv, re, dr}}, \quad (45)$$

$$\Delta_u \triangleq \delta I_5 \in \Delta_{\text{ltv, re, dr}}, \quad (46)$$

$$\Delta_c \triangleq \theta I_1 \in \Delta_{\text{ltv, re, dr}}. \quad (47)$$

Neste caso, introduz-se certo conservadorismo devido à hipótese implícita de a taxa de variação do parâmetro ser ilimitada.

Para designar a especificação de desempenho, fornecida pela restrição de sensibilidade mista, o multiplicador de desempenho (27) é selecionado, onde  $\gamma$  representa um limite superior para o ganho  $\mathcal{L}_2$  induzido. Consequentemente, a síntese do controlador envolve um busca do tipo bisseção pelo menor  $\gamma$  para o qual o programa (34) é viável, isto é, tal que  $f(\kappa^*, \chi^*) < 1$ . A solução viável de  $\kappa^*$  associada ao menor limite superior de  $\gamma$  determina o controlador robusto procurado. Para este determinado controlador projetado, o ganho  $\mathcal{L}_2$  induzido do sistema em malha fechada pode também ser avaliado pela abordagem não diferenciável através da análise IQC baseada no programa (35). Nesse caso, da mesma forma que na síntese do controlador, o cálculo do ganho do pior caso de desempenho envolve a determinação, através de um algoritmo de bisseção, do menor  $\gamma$ , denotado  $\gamma^*$ , para o qual o programa (35) é viável para um determinado controlador em malha fechada.

Para ilustrar a flexibilidade da técnica de síntese IQC proposta ao tratar restrições estruturais no controle, um controlador de ordem reduzida foi projetado, utilizando a técnica de síntese IQC proposta. A possibilidade de selecionar a ordem do controlador *a priori* oferece grande flexibilidade ao projetista. Neste exemplo, a planta de

síntese é de  $10^a$  ordem, portanto, é possível selecionar um controlador de qualquer ordem  $n_k \leq 10$ . Selecionado  $n_k = 1$ , a técnica de síntese IQC não diferenciável teve como solução

$$K(\kappa^*) = \begin{bmatrix} -0,8561 & -0,03297 & -1,166 & 0,001414 \\ 6,218 & 1,025 & -0,5096 & 2,362 \times 10^{-7} \\ -74,55 & 0,1008 & 0,1041 & 0,23324 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

com  $\gamma^* = 11,67$ . Porém, a técnica não foi capaz de projetar um controlador estático.

### 5.3 Simulação Numérica

Na Figura 6 é mostrada a simulação realizada com o modelo não linear do míssil (36) em malha fechada com o controlador LPV de 1ª ordem, considerando-se  $M(t)$  variante no tempo com a dinâmica (37), ilustrada na Figura 7, para se verificar o acompanhamento da aceleração normal a uma referência  $\eta_c(t)$ . Para a mesma simulação, a evolução temporal do ângulo de ataque é mostrada na Figura 8, e a evolução temporal do ângulo de deflexão da aleta e de sua derivada são mostradas, respectivamente, nas Figuras 9 e 10.

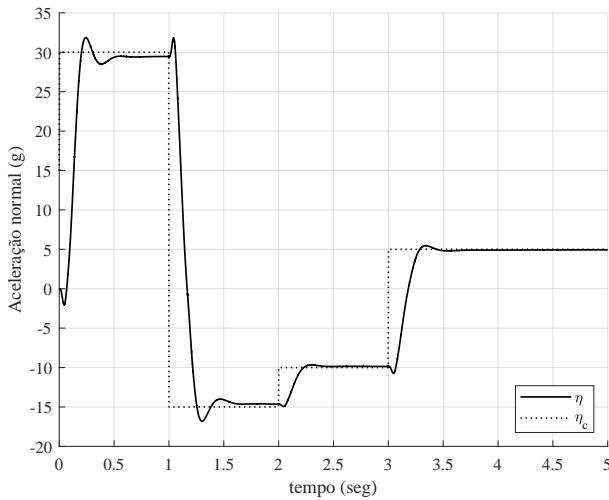


Figura 6. Simulação não linear do míssil – Aceleração normal  $\eta(t)$

## 6. CONCLUSÃO

Um procedimento sistemático para a síntese LPV baseada em IQC e otimização não diferenciável foi discutido. Embora a atenção tenha sido restringida à classe de parâmetros variantes no tempo, a técnica pode ser generalizada para outras classes de operadores, envolvendo não linearidades com restrição de inclinação e atrasos variantes no tempo, por exemplo. Além disso, a técnica tem grande potencial para sínteses mais realistas, considerando limites sob a taxa de variação dos parâmetros. Por fim, a capacidade do algoritmo sugerido para síntese IQC foi demonstrada satisfatoriamente, conforme simulações não lineares, no desafiador problema de piloto automático de um modelo não linear de míssil.

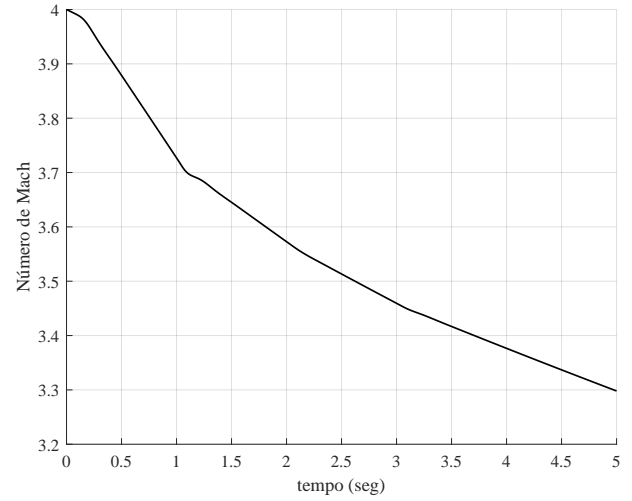


Figura 7. Simulação não linear do míssil – Número de Mach  $M(t)$

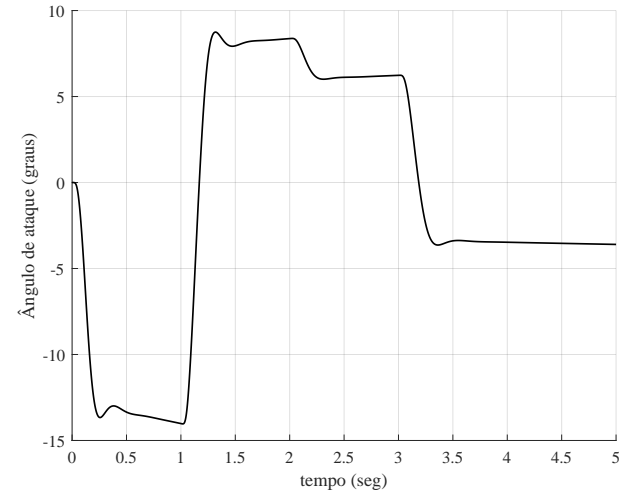


Figura 8. Simulação não linear do míssil – Ângulo de ataque  $\alpha(t)$

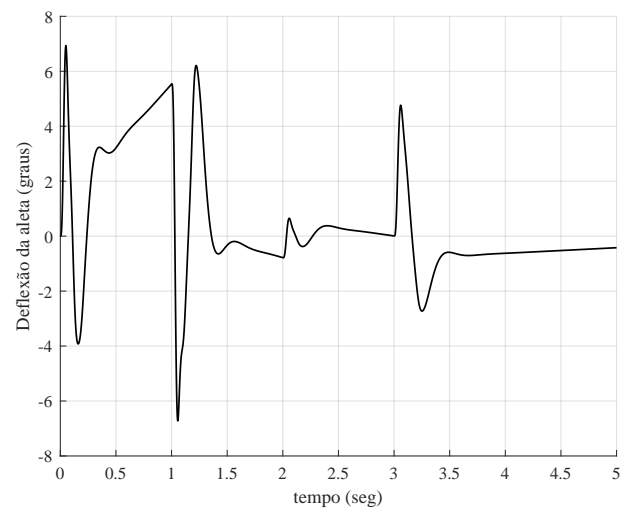


Figura 9. Simulação não linear do míssil – Deflexão da aleta  $u(t)$

## REFERÊNCIAS

Apkarian, P., Dao, M.N., e Noll, D. (2015). Parametric robust structured control design. *IEEE Transactions*

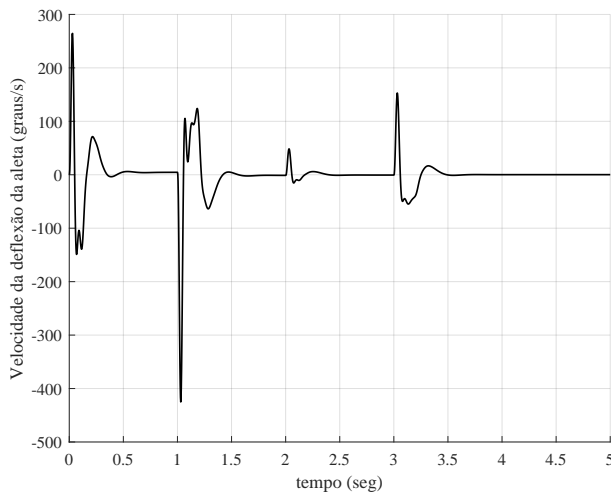


Figura 10. Simulação não linear do míssil – Velocidade da deflexão da aleta  $\dot{u}(t)$

- on *Automatic Control*, 60(7), 1857–1869.
- Apkarian, P., Gahinet, P., e Buhr, C. (2014). Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers. In *2014 European Control Conference (ECC)*, 856–861. doi:10.1109/ECC.2014.6862200.
- Apkarian, P. e Noll, D. (2006). Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1), 71–86. doi:10.1109/TAC.2005.860290.
- Apkarian, P. e Noll, D. (2018). Structured  $H_\infty$ -control of infinite-dimensional systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(9), 3212–3238. doi:10.1002/rnc.4073.
- Apkarian, P., Noll, D., e Rondepierre, A. (2008). Mixed  $H_2/H_\infty$  control via nonsmooth optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(3), 1516–1546. doi:10.1137/070685026.
- Apkarian, P. e Noll, D. (2014). Optimization-based control design techniques and tools. In J. Baillieul e T. Samad (eds.), *Encyclopedia of Systems and Control*, 1–12. Springer. doi:10.1007/978-1-4471-5102-9.
- Balas, G.J. e Packard, A.K. (1992). Design of robust, time-varying controllers for missile autopilots. In *The First IEEE Conference on Control Applications*, volume 1, 104–110. doi:10.1109/CCA.1992.269891.
- Burke, J.V., Henrion, D., Lewis, A.S., e Overton, M.L. (2006). HIFOO – a MATLAB package for fixed-order controller design and  $H_\infty$  optimization. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(9), 339–344. doi:10.3182/20060705-3-FR-2907.00059.
- Cavalcanti, V.M.G.B. e Simões, A.M. (2020). IQC-synthesis under structural constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(13), 4880–4905. doi:10.1002/rnc.5022.
- Clarke, F.H. (1990). *Optimization and nonsmooth analysis*, volume 5 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics. doi:10.1137/1.9781611971309.
- dos Santos, J.F.S., Pellanda, P.C., e Simões, A.M. (2018). Robust pole placement under structural constraints. *Systems & Control Letters*, 116, 8–14. doi:10.1016/j.sysconle.2018.03.008.
- Hoffmann, C. e Werner, H. (2015). A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(2), 416–433. doi:10.1109/TCST.2014.2327584.
- Jönsson, U. e Rantzer, A. (1996). Systems with uncertain parameters – time-variations with bounded derivatives. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9-10), 969–982. doi:10.1002/(SICI)1099-1239(199611)6:9/10<969::AID-RNC262>3.0.CO;2-#.
- Megretski, A. e Rantzer, A. (1997). System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6), 819–830. doi:10.1109/9.587335.
- Nichols, R.A., Reichert, R.T., e Rugh, W.J. (1993). Gain scheduling for H-infinity controllers: A flight control example. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1(2), 69–79. doi:10.1109/87.238400.
- Pellanda, P.C., Simões, A.M., Apkarian, P., e Alazard, D. (2004). Synthesis of missile gain-scheduled autopilots using an  $H_\infty$ -LPV technique with piecewise continuously differentiable parameter-dependent Lyapunov functions. *Nonlinear Studies*, 11(2), 243–276.
- Pellanda, P.C., Apkarian, P., e Tuan, H.D. (2002). Missile autopilot design via a multi-channel lft/lpv control method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(1), 1–20. doi:10.1002/rnc.612.
- Rantzer, A. (1996). On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Systems & Control Letters*, 28(1), 7–10. doi:10.1016/0167-6911(95)00063-1.
- Reichert, R.T. (1992). Dynamic scheduling of modern-robust-control autopilot designs for missiles. *IEEE Control Systems Magazine*, 12(5), 35–42. doi:10.1109/37.158896.
- Scherer, C.W., Njio, R.G.E., e Bennani, S. (1997). Parametrically varying flight control system design with full block scalings. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, 1510–1515. doi:10.1109/CDC.1997.657686.
- Shamma, J. (2012). An overview of LPV systems. In J. Mohammadpour e C.W. Scherer (eds.), *Control of Linear Parameter Varying Systems With Applications*, 3–26. Springer. doi:10.1007/978-1-4614-1833-7.
- Veenman, J. e Scherer, C.W. (2010). On robust LPV controller synthesis: A dynamic integral quadratic constraint based approach. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 591–596.
- Veenman, J., Scherer, C.W., e Köroğlu, H. (2016). Robust stability and performance analysis based on integral quadratic constraints. *European Journal of Control*, 31, 1–32. doi:10.1016/j.ejcon.2016.04.004.
- Wang, S., Pfifer, H., e Seiler, P. (2016). Robust synthesis for linear parameter varying systems using integral quadratic constraints. *Automatica*, 68, 111 – 118. doi:10.1016/j.automatica.2016.01.053.
- Young, P.M. (1996). Controller design with real parametric uncertainty. *International Journal of Control*, 65(3), 469–509. doi:10.1080/00207179608921707.