

Controle de epidemia baseado apenas em distanciamento social

Samaherni M. Dias* Kurios I. P. M. Queiroz*
Aldayr D. Araujo*

* *Laboratório de Automação, Controle e Instrumentação (LACI),
Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio
Grande do Norte (UFRN), Natal-RN, Brasil.**

Abstract: The World Health Organization (WHO) made the assessment that COVID-19 can be characterized as a pandemic on March 11, 2020. To the COVID-19 outbreak, there is no vaccination and no treatment. The only way to control the COVID-19 outbreak is sustained physical distancing. In this work, a simple control law was proposed to keep the infected individuals during the COVID-19 outbreak below the desired number. The proposed control law keeps the value of infected individuals controlled only adjusting the social distancing level. The stability analysis of the proposed control law is done and the uncertainties in the parameters were considered. In the end, numerical simulations were done to show the behavior of the number of infected individuals during an epidemic disease when the proposed control law is used to adjust the social distancing level.

Resumo: A Organização Mundial da Saúde (OMS) declarou que a COVID-19 já se caracterizava como uma pandemia em 11 de março de 2020. Para o surto da COVID-19 não há vacinação e nem tratamento. A única possibilidade de se controlar o surto de COVID-19 é através do distanciamento físico sustentável. Neste trabalho, uma lei de controle simples será proposta para manter o número de indivíduos infectados que necessitarão de hospitalização abaixo de um valor desejado. A lei de controle manterá o número de indivíduos hospitalizados controlado apenas ajustando o nível de distanciamento social. A análise de estabilidade da lei de controle proposta é realizada considerando ou não que existem incertezas nos parâmetros. Por fim, simulações numéricas serão realizadas para demonstrar o comportamento do número de indivíduos infectados que necessitam de hospitalização durante um surto epidêmico utilizando a lei de controle proposta para ajustar o nível de distanciamento social.

Keywords: COVID-19; epidemic disease; SIR model; controller;

Palavras-chaves: COVID-19; epidemia; modelo SIR; controlador;

1. INTRODUÇÃO

No dia 11 de março de 2020, a Organização Mundial da Saúde (OMS) declarou que a COVID-19 já se caracterizava como uma pandemia. Esta declaração atraiu a atenção de vários pesquisadores, das mais diversas áreas, para essa nova síndrome respiratória aguda grave desencadeada pelo novo coronavírus SARS-CoV-2 e chamada de COVID-19. Como mitigar os efeitos da COVID-19 passou a ser o grande desafio para estes pesquisadores.

Em um cenário realístico de uma doença epidêmica, os recursos sociais e médicos para tratar a doença ou prevenir que ela se espalhe são geralmente bem limitados (Jiang e Zhou, 2018). A pandemia do COVID-19 tem uma taxa básica de reprodução bastante alta, apresenta um número de hospitalização preocupante e uma elevada taxa de mortes (Verity et al., 2020).

Medidas para prevenção e controle de doenças infecciosas incluem vacinação, tratamento, quarentena, isolamento e profilaxia. Quarentena e isolamento são duas medidas nas

quais os indivíduos expostos ou infectados são removidos do convívio social durante um período com o objetivo de impedir a propagação da infecção. A quarentena é aplicada com menor frequência, porém é um dos primeiros métodos de resposta utilizados nos casos de extrema emergência. A quarentena foi utilizada durante a epidemia de SARS entre os anos de 2002 e 2003 (Martcheva, 2015).

Na literatura existem vários trabalhos considerando um controlador ótimo aplicado no controle de doenças epidêmicas (Martcheva, 2015; Ball et al., 2008; Gaff e Schaefer, 2009; Zaman et al., 2009). A teoria de controle ótimo fornece uma ferramenta valiosa que controla o *trade-off* entre vacinação e as estratégias de tratamento (Gaff e Schaefer, 2009). Entretanto, para o recente surto da COVID-19 não há vacina e nem tratamento. A única possibilidade para controlar o surto da COVID-19 é o distanciamento físico sustentado, de agora em diante chamado de distanciamento social.

No trabalho de Prem et al. (2020), os autores concluem que intervenções não farmacêuticas baseadas no distanciamento social têm grande potencial de reduzir a magnitude

* <https://laci.ufrn.br>

do pico da epidemia de COVID-19 e, desta forma, reduzir o número total de casos da doença. Ainda neste trabalho, os autores utilizaram um modelo estruturado por idade porque os padrões de mistura social variam entre os locais, incluindo residências, locais de trabalho, escolas entre outros locais.

No trabalho de Hellewell et al. (2020), os autores concluíram que em muitos cenários o rastreamento de contato altamente eficaz e o isolamento dos indivíduos são suficientes para controlar o surto da COVID-19.

Nowzari et al. (2016) fizeram um trabalho avaliando os principais métodos de análise e controle de epidemias. Neste trabalho, os autores destacaram como principais desafios para as pesquisas em controle de epidemia o fato de que os métodos geralmente utilizam modelos determinísticos, que todos os controladores propostos utilizam soluções de controle centralizadas e que todos os controladores não consideram incertezas paramétricas. Os autores também apresentam como uma necessidade a criação de modelos epidêmicos mais gerais, pois geralmente se utiliza um modelo estruturado para um problema específico.

Baseado nos desafios apresentados e nas características do surto de COVID-19, o foco deste trabalho é propor uma lei de controle, robusta à incertezas nos parâmetros, para controlar o surto de doenças epidêmicas que não possuem vacinação e nem tratamento. A lei de controle proposta neste trabalho é baseada no ajuste do nível de distanciamento social para controlar o surto da doença epidêmica.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: na seção 2, o modelo epidêmico considerado será apresentado; na seção 3, a lei de controle para controlar um surto epidêmico, considerando incertezas nos parâmetros, será proposta e, ainda nesta seção, a análise de estabilidade da lei de controle proposta será estudada; a seção 4 contém os resultados simulados; e na seção 5 os comentários conclusivos do trabalho e as perspectivas futuras para o mesmo são apresentadas.

2. MODELO SIR

A dinâmica de uma doença epidêmica pode ser descrita pelo modelo SIR (Suspeitos, Infectados e Recuperados). O modelo SIR foi formulado por Kermack et al. (1927). O modelo SIR é aplicado às epidemias com duração relativamente curta (alguns meses). O modelo SIR apresentado neste trabalho é utilizado para representar a dinâmica de doenças epidêmicas sem vacinação e nem tratamento.

O modelo SIR é um sistema de três equações diferenciais dado por:

$$\begin{aligned}\frac{d s(t)}{dt} &= -\beta(t)i(t)s(t) \\ \frac{d i(t)}{dt} &= \beta(t)i(t)s(t) - \gamma i(t), \\ \frac{d r(t)}{dt} &= \gamma i(t)\end{aligned}\quad (1)$$

onde $s(t)$ é o número de indivíduos susceptíveis, $i(t)$ é o número de indivíduos infectados, $r(t)$ é o número de indivíduos recuperados, $\beta(t)$ é um coeficiente proporcional à

taxa de transmissão da doença e γ é a taxa de recuperação (é a taxa na qual os indivíduos infectados se recuperam da doença). Seja $N(t) = s(t) + i(t) + r(t)$ o número total de indivíduos na população e considerando que este número é constante, tem-se

$$\frac{d N(t)}{dt} = \frac{d s(t)}{dt} + \frac{d i(t)}{dt} + \frac{d r(t)}{dt} = 0. \quad (2)$$

O coeficiente proporcional à taxa de transmissão da doença é obtido por

$$\beta(t) = \frac{\kappa(t)\tau(t)}{N(t)}, \quad (3)$$

onde $\kappa(t)$ é proporcional ao número de contatos que um indivíduo infectado tem por unidade de tempo e $\tau(t)$ é a probabilidade que um contato entre um indivíduo susceptível e um indivíduo infectado resulte em uma transmissão efetiva (Martcheva, 2015).

O número básico de reprodução da epidemia é dado por

$$R_0 = \frac{\beta_0}{\gamma_0} = \frac{\kappa_0\tau_0}{N\gamma}, \quad (4)$$

onde κ_0 representa o valor médio do número de contatos que um indivíduo infectado tem por unidade de tempo em condições normais de movimentação social, τ_0 representa o valor médio da probabilidade que um contato entre um indivíduo susceptível e um indivíduo infectado resulte em uma transmissão efetiva, β_0 é o valor médio do número proporcional à taxa de transmissão da doença em condições normais de movimentação social e o número total de indivíduos na população (N) é considerado constante.

As características fundamentais do modelo (1) são:

- C1.** o número de indivíduos susceptíveis é maior que zero ($s(t) > 0$);
- C2.** o número de indivíduos infectados é maior que zero ($i(t) > 0$);
- C3.** o valor do número de contatos que um indivíduo infectado tem por unidade de tempo é maior que zero ($\kappa(t) > 0$);
- C4.** a probabilidade que um contato entre um indivíduo susceptível e um indivíduo infectado resulte em uma transmissão efetiva é maior que zero ($\tau(t) > 0$);
- C5.** a taxa de recuperação é maior que zero ($\gamma > 0$);

3. CONTROLADOR PROPOSTO

O principal objetivo do controlador proposto é manter o número de indivíduos infectados que necessitam de serem hospitalizados abaixo da capacidade máxima do sistema de saúde da região onde o surto epidêmico está ocorrendo. O distanciamento social será utilizado para controlar o número de indivíduos hospitalizados. O controlador proposto neste trabalho irá calcular qual é o nível de distanciamento social necessário para manter o número de indivíduos hospitalizados abaixo de um valor máximo desejado. O controlador proposto poderá ser utilizado para auxiliar no afrouxamento das medidas de isolamento de uma determinada região.

O propósito é encontrar uma lei de controle $\rho(t)$, para o sistema (1), tal que o erro de saída

$$e(t) = i_d - i(t) > 0, \quad (5)$$

onde i_d é proporcional ao número máximo de indivíduos infectados que o sistema de saúde pode receber, tenda a

um valor maior ou igual a zero quando $t \rightarrow \infty$, o que garante que o sistema de saúde não entrará em colapso.

As seguintes hipóteses são feitas:

- H1.** o número máximo de indivíduos infectados que o sistema de saúde pode receber é assumido um valor constante e maior que zero ($i_d > 0$);
- H2.** o número total de indivíduos ($N(t)$) na população é assumido constante (N);
- H3.** o valor médio do número proporcional à taxa de transmissão da doença em condições normais de movimentação social é assumido constante (β_0);

Considerando as hipóteses (H2-H3), o coeficiente proporcional da taxa de transmissão é atualizado para

$$\beta(t) = \rho(t)\beta_0, \quad (6)$$

onde $\rho(t)$ é o sinal de controle o qual irá modular o valor médio do número proporcional à taxa de transmissão da doença em condições normais de movimentação social (β_0).

Considere a lei de controle

$$\rho(t) = \frac{\psi(t)}{i(t)s(t)\beta_0}, \quad (7)$$

onde

$$\psi(t) = \psi_1 e(t) + \psi_2 \int_0^t e(t)dt \quad (8)$$

é um controlador PI e ψ_1, ψ_2 são constantes positivas escolhidas para ajustar a dinâmica do erro.

Teorema 1. Considere o sistema (1), o erro (5) e a lei de controle (7). Sempre que todas as hipóteses (H1)-(H3) forem satisfeitas, o erro $e(t)$ irá convergir para zero quando o tempo tender a infinito.

Prova. Considere a função de Lyapunov

$$V(\dot{e}, e) = \frac{\dot{e}^2}{2} + \frac{\psi_2 e^2}{2}. \quad (9)$$

Então, a derivada de $V(\dot{e}, e)$ será

$$\dot{V}(\dot{e}, e) = \ddot{e} + \psi_2 \dot{e}e. \quad (10)$$

Aplicando (1), (5) e (7) em (10), o resultado será

$$\dot{V}(\dot{e}, e) = -\psi_1 \dot{e}^2 - \gamma e^2 \leq 0. \quad (11)$$

Para o sistema manter a condição $\dot{V}(\dot{e}, e) = 0$, a trajetória deve estar confinada à linha $\dot{e} = 0$. Utilizando a dinâmica do erro (5) tem-se:

$$\dot{e} \equiv 0 \Rightarrow \ddot{e} \equiv 0 \Rightarrow -\psi_2 e \equiv 0 \Rightarrow e \equiv 0$$

e, pelo Teorema de LaSalle a origem é globalmente assintoticamente estável (GAS).

Agora, considere $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\gamma}$ os valores conhecidos para os parâmetros β_0 e γ , respectivamente, onde $\hat{\beta}_0 = \Delta_\beta \beta_0$ e $\hat{\gamma} = \Delta_\gamma \gamma$. Δ_β e Δ_γ representam as incertezas nos parâmetros do sistema e elas podem assumir quaisquer valores entre 0,5 e 1,5 (isso representa uma incerteza de $\pm 50\%$). A lei de controle será atualizada para

$$\rho(t) = \frac{\psi(t)}{i(t)s(t)\hat{\beta}_0}. \quad (12)$$

Corolário 2. Considere o sistema (1), o erro (5) e a lei de controle (12) e que existem incertezas nos parâmetros β_0, γ . Sempre que todas as hipóteses (H1)-(H3) forem

satisfeitas, o erro $e(t)$ irá convergir para zero quando o tempo tender a infinito.

Prova. Considere a função de Lyapunov

$$V(\dot{e}, e) = \frac{\dot{e}^2}{2} + \frac{\psi_2 e^2}{2\Delta_\beta}. \quad (13)$$

Então, a derivada de $V(\dot{e}, e)$ será

$$\dot{V}(\dot{e}, e) = -\frac{\psi_1 \dot{e}^2}{\Delta_\beta} - \frac{\gamma \dot{e}^2}{\Delta_\beta} \leq 0. \quad (14)$$

Para o sistema manter a condição $\dot{V}(\dot{e}, e) = 0$, a trajetória deve estar confinada à linha $\dot{e} = 0$. Utilizando a dinâmica do erro (5) tem-se:

$$\dot{e} \equiv 0 \Rightarrow \ddot{e} \equiv 0 \Rightarrow -\frac{\psi_2}{\Delta_\beta} e \equiv 0 \Rightarrow e \equiv 0$$

e, pelo Teorema de LaSalle a origem é globalmente assintoticamente estável (GAS).

3.1 Controlador proposto com sinal de controle saturado

Para a aplicação da lei de controle em casos reais se faz necessário a saturação do sinal de controle, o que implica na atualização da lei de controle para

$$\rho(t) = \max \left(0, \min \left(1, \frac{\psi(t)}{i(t)s(t)\beta_0} \right) \right). \quad (15)$$

Em outras palavras, $\rho(t)$ pode assumir qualquer valor entre 0 e 1. $\rho(t) < 0$ ocorre quando $i(t) \gg i_d$ e indica que é necessário aumentar a taxa de recuperação dos indivíduos, o que é possível somente com tratamento e não é o caso de estudo deste trabalho. $\rho(t) > 1$ ocorre quando $i(t) \ll i_d$ e indica que é necessário aumentar o número de contatos entre indivíduos susceptíveis e indivíduos infectados por unidade de tempo, entretanto, isto não será feito pois o número de indivíduos infectados hospitalizados está abaixo do número máximo desejado, ou seja, $e(t) > 0$ o que satisfaz o objetivo do controlador.

Teorema 3. Considere o sistema (1), o erro (5) e a lei de controle (15). Sempre que todas as hipóteses (H1)-(H3) forem satisfeitas, o erro $e(t)$ irá convergir para um valor maior que zero quando o tempo tender ao infinito.

Prova. Considere o sistema (1) quando a lei de controle (15) é aplicada

$$\begin{aligned} \frac{d s(t)}{dt} &= -\rho(t)\beta_0 i(t)s(t) \\ \frac{d i(t)}{dt} &= \rho(t)\beta_0 i(t)s(t) - \gamma i(t) \end{aligned}$$

Baseado nas características (C1-C5) do sistema (1), considere a função de Lyapunov

$$V(s, i) = s + i.$$

Então, a derivada de $V(s, i)$ será

$$\dot{V}(s, i) = -\gamma i \leq 0.$$

Portanto, $\dot{V}(s, i) \leq 0$ implica que o sistema com o sinal de controle saturado é estável e baseado nas propriedades do

modelo, tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0$ (ver Apêndice A) o que implica em $e(t) \rightarrow i_d > 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Fora da região de saturação se aplica o mesmo raciocínio do Teorema 1.

Durante o período de saturação da lei de controle, o valor do termo integral da equação (8) não é computado.

Considerando que há incertezas nos parâmetros β_0 e γ , o sinal de controle de (15) será atualizado para

$$\rho(t) = \max \left(0, \min \left(1, \frac{\psi(t)}{\hat{i}(t)s(t)\hat{\beta}_0} \right) \right). \quad (16)$$

ao qual pode-se aplicar o Teorema 3.

3.2 Controlador proposto utilizando estimativas para $i(t)$

Para aplicar o controlador proposto durante um surto epidêmico real, se faz necessário conhecer N , β_0 , medir $s(t)$ e $i(t)$. Geralmente os valores de N e β_0 são conhecidos (β_0 é obtido de R_0). O valor de $s(t)$ é medido indiretamente baseado na medida do número de casos confirmados $c(t)$. Porém, durante a ocorrência de um surto epidêmico, geralmente a medida do número de indivíduos infectados ao longo do tempo ($i(t)$) pode não ser uma medida muito confiável. Desta forma, ao invés de se utilizar a medida de $i(t)$, utiliza-se uma estimativa para $i(t)$ ($\hat{i}(t)$), a qual é baseada em $s(t)$ e β_0 .

O fato de não se medir o valor de $i(t)$ também implica na mudança da equação de erro utilizada no controlador para

$$e(t) = i_d - \hat{i}(t). \quad (17)$$

Nos casos em que não se tem uma medida confiável de $i(t)$, a lei de controle (7) será ajustada para

$$\rho(t) = \max \left(0, \min \left(1, \frac{\psi(t)}{\hat{i}(t)s(t)\beta_0} \right) \right), \quad (18)$$

onde $\hat{i}(t)$ é a estimativa do valor de $i(t)$.

Para um surto epidêmico descrito pelo modelo SIR (1), onde todos os indivíduos da população são considerados susceptíveis, a única forma de um indivíduo sair do grupo dos susceptíveis é quando ele passa para o grupo dos infectados e, desta forma, o número dos indivíduos susceptíveis pode ser obtido por

$$s(t) = N - c(t), \quad (19)$$

ou seja, a população susceptível são todos os indivíduos da população que ainda não se infectaram.

Baseando em (1), (6) e (19) é possível considerar

$$\frac{d c(t)}{dt} = \rho(t)\beta_0 i(t)s(t). \quad (20)$$

Aplicando (19) em (20), pode-se obter

$$i(t) = \frac{d s(t)}{dt} \cdot (\rho(t)\beta_0 s(t))^{-1} \quad (21)$$

e

$$\hat{i}(t) = \frac{\Delta_s}{\Delta_t} \cdot (\rho(t)\beta_0 s(t))^{-1}, \quad (22)$$

onde Δ_s representa a variação do número de indivíduos susceptíveis e Δ_t é o intervalo de tempo considerado na variação do número de indivíduos susceptíveis. Quanto

menor for o intervalo de tempo melhor será a estimativa de $i(t)$.

Por fim, quando existem incertezas nos parâmetros β_0 e γ , a estimativa de $i(t)$ muda para

$$\hat{i}(t) = \frac{\Delta_s}{\Delta_t} \cdot (\rho(t)\hat{\beta}_0 s(t))^{-1} \quad (23)$$

e o sinal de controle de (18) será atualizado para

$$\rho(t) = \max \left(0, \min \left(1, \frac{\psi(t)}{\hat{i}(t)s(t)\hat{\beta}_0} \right) \right). \quad (24)$$

É importante notar que quando se utiliza $\hat{i}(t)$ não é mais possível garantir erro nulo pois não é possível medir $i(t)$. Porém, se $\hat{i}(t) \rightarrow i(t)$, pode-se garantir que o erro será nulo.

4. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção, os resultados de simulação do controlador proposto serão apresentados e analisados. Em todas as simulações o controlador proposto foi aplicado ao modelo SIR (1), o método numérico utilizado para a solução das equações diferenciais ordinárias foi o método de Euler, o passo de integração foi um dia, todas as simulações possuem 600 dias, o número total de indivíduos na população $N=1$ milhão, o número básico de reprodução $R_0 = 2$, a taxa de recuperação $\gamma = 0,2$, a condição inicial de indivíduos susceptíveis é $s(0) = N - 1$, a condição inicial dos indivíduos infectados é $i(0) = 1$, a condição inicial de indivíduos recuperados é $r(0) = 0$, o número de indivíduos infectados hospitalizados (H) é 10% do total de indivíduos infectados, o número máximo de indivíduos infectados que o sistema de saúde pode receber é $H.d = 0,1 \cdot i_d = 1000$ e os ganhos do controlador são $\psi_1 = 0,02$, $\psi_2 = 0,0043$, os quais são obtidos por projeto semelhante ao método do lugar das raízes para um controlador PI.

Para simplificar, a lei de controle utilizada em todas as simulações foi (15), ou seja,

$$\rho(t) = \max \left(0, \min \left(1, \frac{\psi(t)}{\hat{i}(t)s(t)\beta_0} \right) \right),$$

na qual será utilizado $\hat{\beta}_0$ no lugar de β_0 quando existem incertezas nos parâmetros e será utilizado $\hat{i}(t)$ no lugar de $i(t)$ quando se considera que se tem apenas o valor estimado de $i(t)$.

As simulações serão divididas em três subseções, sendo a primeira destinada à avaliação do desempenho do modelo SIR (1) quando não se aplica a lei de controle proposta, a segunda subseção se destina à avaliação do caso quando se mede o valor de $i(t)$, sem e com incertezas paramétricas e, por fim, a terceira subseção se destina à avaliação do caso quando se estima o valor de $i(t)$, novamente considerando ou não que existem incertezas nos parâmetros.

4.1 Modelo SIR

A primeira simulação (Figura 1) que será realizada se destina a comprovar os efeitos e a dinâmica do distanciamento social sobre o número total de indivíduos infectados. Para isso, o número acumulado de indivíduos infectados quando o número básico de reprodução R_0 varia entre 2,8 e 1,2 será

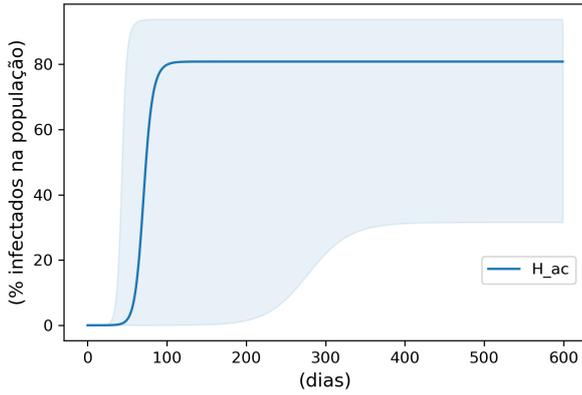


Figura 1. Simulação do modelo SIR para diferentes valores de R_0 , onde a região em azul delimita a faixa com o número de infectados quando o número básico de reprodução está entre $R_0 = 2,8$ e $R_0 = 1,2$ e a linha azul é o número acumulado de indivíduos infectados H_{ac} quando $R_0 = 2,0$

apresentado. Nesta simulação ainda é possível verificar de forma destacada a dinâmica do número acumulado de indivíduos infectados ao se utilizar o número básico de reprodução $R_0 = 2$ com a taxa de recuperação $\gamma = 0,2$, valores obtidos a partir de publicações científicas sobre a COVID-19 Li et al. (2020); Prem et al. (2020); Kucharski et al. (2020). É importante ressaltar que para esta simulação (Figura 1) não se utilizou o controlador proposto

A partir da Figura 1 é possível identificar que a variação do número básico de reprodução influencia na velocidade da propagação da epidemia, bem como no número acumulado de indivíduos infectados. Utilizando $R_0 = 2$, valor obtido após reparametrização em regiões (China continental) onde a COVID-19 se espalhou primeiro, é possível verificar que sem nenhuma ação de mitigação, em um curto espaço de tempo 80% da população será infectada. Porém, se uma ação de distanciamento social garantisse uma taxa de isolamento de 40% durante aproximadamente 400 dias, o número total de indivíduos infectados seria de aproximadamente 30% da população. A simulação de forma indubitável consegue estabelecer uma relação entre o nível de distanciamento social e a redução do número total de infectados. Embora seja clara a ação direta do distanciamento social sobre o número total de infectados, a mesma gera um *trade-off* em relação às questões econômicas, pois, ao se impor um distanciamento social, várias das atividades econômicas perdem a viabilidade de funcionamento.

O último aspecto que deve ser considerado é o colapso do sistema de saúde (ver Figura 2). De acordo com esta simulação, em todos os cenários, a capacidade máxima do sistema de saúde foi ultrapassada. No caso de referência ($R_0 = 2$), o número de indivíduos necessitando de hospitalização chega a exceder quinze vezes o valor máximo levando o sistema de saúde ao colapso. É importante destacar que o número de indivíduos necessitando de hospitalização excede o valor máximo por aproximadamente 80 dias, o que seria trágico em diversos aspectos.

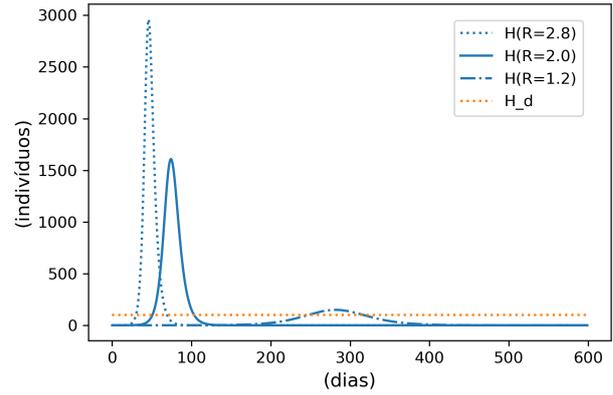


Figura 2. Simulação do modelo SIR para diferentes valores de R_0 , onde as linhas azul pontilhada, sólida e tracejada correspondem ao número de indivíduos infectados que necessitam de hospitalização em um certo dia quando $R_0 = 2,8$, $R_0 = 2,0$, $R_0 = 1,2$, respectivamente, e a linha pontilhada laranja é o número máximo de indivíduos infectados que o sistema de saúde pode receber em um certo dia H_d .

4.2 Controlador utilizando medidas de $i(t)$

Nesta subseção se encontra a simulação (Figuras 3 e 4) do modelo SIR (1) quando se mede o número de indivíduos infectados ($i(t)$). Dois cenários serão apresentados, sem e com incertezas nos parâmetros. As incertezas consideradas na simulação foram de +15% e -20% nos valores de β_0 e γ , respectivamente.

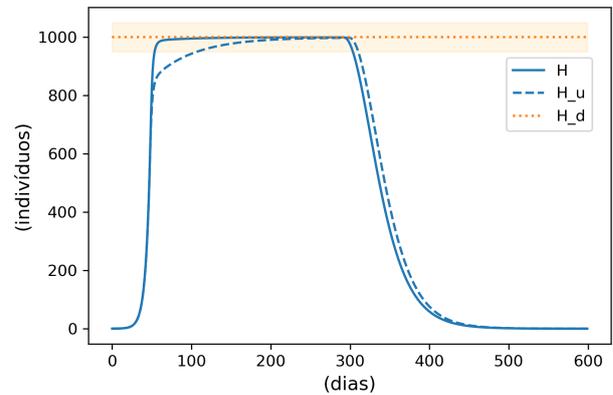


Figura 3. Simulação do modelo SIR com a atuação do controlador proposto onde a linha azul é o número de indivíduos que necessitarão de hospitalização H , a linha tracejada azul é o número de indivíduos que necessitarão de hospitalização H_u quando se considera as incertezas paramétricas, a linha pontilhada laranja é o número máximo de indivíduos infectados que o sistema de saúde pode receber H_d e a região laranja delimita a faixa de $\pm 5\%$ do valor de H_d .

Observando a simulação na Figura 3, é possível notar que a lei de controle proposta consegue manter o número de indivíduos infectados abaixo do valor máximo desejado durante todo o surto para ambos os casos, sem e com

incertezas. A lei de controle, quando não saturada, tem o objetivo de zerar o erro, ou seja, manter o menor nível de distanciamento social que garanta o número de indivíduos infectados hospitalizados abaixo de um limite estipulado e, assim, permitindo a maior atividade econômica possível sem colapsar o sistema de saúde.

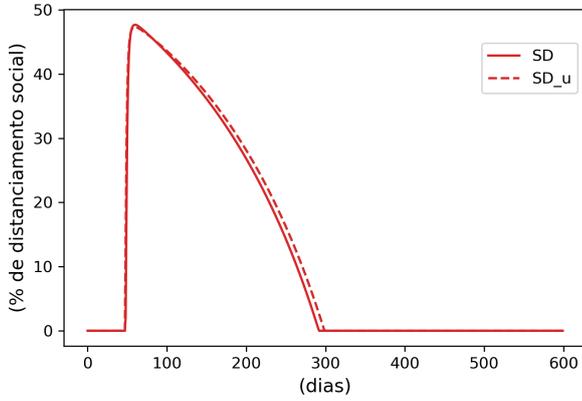


Figura 4. Simulação do modelo SIR com a atuação do controlador proposto onde a linha vermelha é o nível do ajuste de distanciamento social necessário e a linha tracejada vermelha é o nível do ajuste de distanciamento social necessário quando as incertezas paramétricas são consideradas.

A simulação da Figura 4 apresenta o comportamento do nível de distanciamento social calculado pelo controlador proposto. É importante destacar que o número de dias com algum distanciamento social é inversamente proporcional ao número máximo de indivíduos infectados que o sistema de saúde pode receber. No início o nível de distanciamento social é próximo de 50% e decai suavemente durante 300 dias. O nível de distanciamento social para ambos os casos, com ou sem incertezas paramétricas, possui desempenho e comportamento semelhantes.

4.3 Controlador utilizando estimativas de $i(t)$

Nesta subseção se encontra a simulação (Figuras 5 e 6) do modelo SIR (1) quando se estima o número de indivíduos infectados ($\hat{i}(t)$). Dois cenários serão apresentados, sem e com incertezas nos parâmetros. As incertezas consideradas na simulação foram de +15% e -20% nos valores de β_0 e γ , respectivamente.

O primeiro fato a ser considerado é que o controlador, ao se utilizar como medida a ser controlada a estimativa de $i(t)$, deverá zerar o erro (17), o que implica em garantir que a estimativa de $i(t)$ convirja para o valor desejado i_d .

De acordo com a simulação da Figura 5 é possível verificar que no caso sem incertezas paramétricas a lei de controle zera o erro $e(t)$ pois praticamente não há erro entre as estimativas de $i(t)$ e o valor exato de $i(t)$. Já no caso com incertezas paramétricas, a incerteza no parâmetro β_0 aplica um ganho direto na estimativa $\hat{i}(t)$ o que implica em um erro entre as estimativas de $i(t)$ e o valor exato de $i(t)$. Consequentemente, o número de indivíduos infectados hospitalizados não é igual ao máximo desejado,

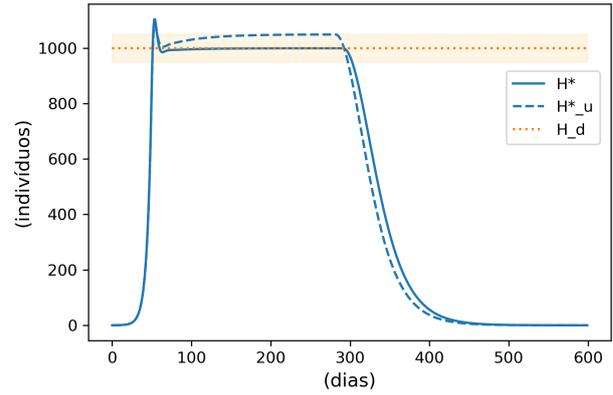


Figura 5. Simulação do modelo SIR com a atuação do controlador proposto onde a linha azul é o número de indivíduos que necessitarão de hospitalização H^* , a linha tracejada azul é o número de indivíduos que necessitarão de hospitalização H^*_u quando se considera as incertezas paramétricas, a linha pontilhada laranja é o número máximo de indivíduos infectados que o sistema de saúde pode receber H_d e a região laranja delimita a faixa de $\pm 5\%$ do valor de H_d .

porém fica em uma região próxima ao valor desejado. A amplitude dessa região é proporcional às incertezas no parâmetro β_0 . É interessante ressaltar que o caso com incertezas paramétricas e utilizando estimativas para $i(t)$ embora possa ocorrer, muito provavelmente possuirá erros nos parâmetros inferiores aos utilizados nesta simulação e, desta forma, não depreciará tanto o desempenho do controlador. Outro aspecto é que mesmo no caso com erros paramétricos grandes, utilizar a lei de controle proposta é melhor que utilizar uma abordagem empírica, a qual também estará submetida a todas as incertezas envolvidas.

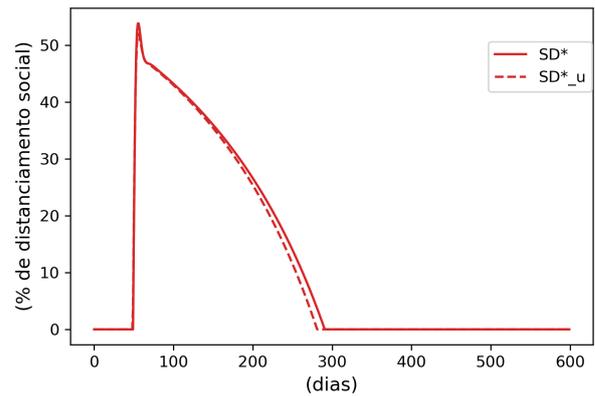


Figura 6. Simulação do modelo SIR com a atuação do controlador proposto onde a linha vermelha é o nível do ajuste de distanciamento social SD^* necessário e a linha tracejada vermelha é o nível do ajuste de distanciamento social SD^*_u necessário quando as incertezas paramétricas são consideradas.

A simulação da Figura 6 apresenta o comportamento do nível de distanciamento social calculado pelo controlador proposto. É importante notar que o comportamento do dis-

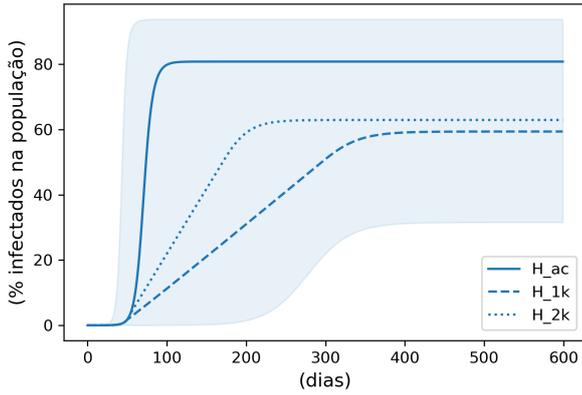


Figura 7. Simulação do modelo SIR para comparação entre ações de mitigação, onde a região em azul delimita a faixa com o número de infectados quando o número básico de reprodução está entre $R_0 = 2,8$ e $R_0 = 1,2$, a linha azul é o número de indivíduos infectados H_{ac} quando $R_0 = 2,0$, a linha tracejada azul é número de indivíduos infectados H_{1k} quando se aplica a lei de controle proposta para garantir $H_d = 1000$ e a linha pontilhada azul é número de indivíduos infectados H_{2k} quando se aplica a lei de controle proposta para garantir $H_d = 2000$

tanciamento social é praticamente o mesmo para todos os casos apresentados, o que deixa claro que pequenas falhas no ajuste do nível de distanciamento poderá comprometer a capacidade de atendimento do sistema de saúde.

4.4 Discussão

O controlador proposto calcula o nível de distanciamento social para manter o surto de COVID-19 controlado. O nível de distanciamento social foi ajustado para garantir a forma mais rápida de passar pelo surto de uma doença epidêmica mantendo-se o número de pessoas infectadas hospitalizadas abaixo de um valor desejado. A técnica proposta neste trabalho pode reduzir os efeitos econômicos do distanciamento social, pois aplica o nível de distanciamento social adequado para evitar que o sistema de saúde entre em colapso.

Um outro fato importante sobre se utilizar o controlador é que o número total de pessoas infectadas hospitalizadas é menor que o número sem nenhuma ação de mitigação (ver Figura 7).

A simulação da Figura 7 apresenta o número acumulado de indivíduos infectados quando não há ação de mitigação (H_{ac}) e quando a lei de controle proposta é aplicada para garantir um número máximo de indivíduos infectados hospitalizados em 1000 (H_{1k}) e outra em 2000 (H_{2k}). A partir desta simulação é possível verificar que a lei de controle é capaz de reduzir o número total de indivíduos que serão infectados, o que reduz o número de mortos e os custos com atendimento. Também é possível perceber que ao dobrar a capacidade de atendimento se reduz o tempo necessário de distanciamento social praticamente pela metade e se amplia o número total de infectados em aproximadamente 5%. Ainda sobre esta simulação é possível se desfazer a ideia comum de que o número total de

infectados será o mesmo com ou sem mitigação. Este fato se dá pois o número de indivíduos que irão se infectar leva em conta o número de indivíduos que estão infectados em um certo dia e, desta forma, ao se permitir o crescimento descontrolado do número de infectados, se está permitindo que o número total de infectados aumente e que também aumente o número de hospitalizados e mortos (ambos são proporcionais ao número total de infectados).

Os valores dos ganhos do controlador proposto são escolhidos por um projetista e possui a seguinte lógica: ψ_1 está relacionado com quão rápido o erro ($e(t)$) se aproxima de zero e ψ_2 está relacionado com quão suave o erro ($e(t)$) converge para zero.

Para se obter melhores resultados quando se utiliza estimativas para $i(t)$, será necessário melhorar a qualidade do estimador ou garantir um melhor valor para o parâmetro β_0 .

O tempo necessário para se zerar o distanciamento social dependerá da capacidade do sistema de saúde em atender os indivíduos infectados hospitalizados. Quanto maior a capacidade de atendimento menor será o tempo com algum nível de distanciamento social.

5. CONCLUSÃO

A COVID-19 é uma doença infecciosa transmitida por contato que se espalha pela população através de um contato direto entre um indivíduo infectado e um indivíduo susceptível (Prem et al., 2020).

Este trabalho propôs uma lei de controle simples para manter o número de indivíduos infectados que irão necessitar de hospitalização abaixo de um valor desejado. A lei de controle proposta mantém o número de indivíduos infectados controlado somente ajustando o nível de distanciamento social. A análise de estabilidade do controlador proposto foi realizada.

Neste trabalho, resultados de simulação foram apresentados para demonstrar o funcionamento do controlador proposto. Em todas as simulações, a lei de controle proposta atinge seus objetivos. O controlador proposto se demonstrou robusto às incertezas paramétricas no número básico de reprodução R_0 e na taxa de recuperação γ . Uma simulação considerando incertezas paramétricas e que somente a medida do número de casos confirmados para a COVID-19 está disponível foi feita e o controlador proposto manteve o número de indivíduos infectados hospitalizados abaixo do limite superior desejado.

Um aspecto extremamente importante verificado neste trabalho é que a ação da lei de controle proposta pode reduzir o número total de infectados e, conseqüentemente, o número total de hospitalizados e de mortos durante o surto epidêmico.

Para finalizar, este trabalho propôs solução para um dos principais desafios para os pesquisadores que atuam na análise e controle de epidemias. O controlador proposto abordou o desafio sobre controladores que considerem incertezas paramétricas.

Para o futuro, um modelo SIR estruturado por grupos será proposto e uma versão do controlador apresentado neste

trabalho será expandida para este modelo. O objetivo é desenvolver uma solução descentralizada e mais geral para surtos de doenças epidêmicas.

REFERÊNCIAS

- Ball, F.G., Knock, E.S., e O'Neill, P.D. (2008). Control of emerging infectious diseases using responsive imperfect vaccination and isolation. *Mathematical Biosciences*, 216(1), 100 – 113. doi:10.1016/j.mbs.2008.08.008.
- Gaff, H. e Schaefer, E. (2009). Optimal control applied to vaccination and treatment strategies for various epidemiological models. *Mathematical Biosciences & Engineering*, 6, 469. doi:10.3934/mbe.2009.6.469.
- Hellewell, J., Abbott, S., Gimma, A., Bosse, N.I., Jarvis, C.I., Russell, T.W., Munday, J.D., Kucharski, A.J., Edmunds, W.J., Sun, F., Flasche, S., Quilty, B.J., Davies, N., Liu, Y., Clifford, S., Klepac, P., Jit, M., Diamond, C., Gibbs, H., [van Zandvoort], K., Funk, S., e Eggo, R.M. (2020). Feasibility of controlling covid-19 outbreaks by isolation of cases and contacts. *The Lancet Global Health*, 8(4), e488 – e496. doi:10.1016/S2214-109X(20)30074-7.
- Jiang, J. e Zhou, T. (2018). Resource control of epidemic spreading through a multilayer network. *Scientific Reports*, 8(1), 1629. doi:10.1038/s41598-018-20105-w.
- Kermack, W.O., McKendrick, A.G., e Walker, G.T. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 115(772), 700–721. doi:10.1098/rspa.1927.0118.
- Kucharski, A.J., Russell, T.W., Diamond, C., Liu, Y., Edmunds, J., Funk, S., Eggo, R.M., Sun, F., Jit, M., Munday, J.D., Davies, N., Gimma, A., [van Zandvoort], K., Gibbs, H., Hellewell, J., Jarvis, C.I., Clifford, S., Quilty, B.J., Bosse, N.I., Abbott, S., Klepac, P., e Flasche, S. (2020). Early dynamics of transmission and control of covid-19: a mathematical modelling study. *The Lancet Infectious Diseases*, 20(5), 553 – 558. doi:10.1016/S1473-3099(20)30144-4.
- Li, Q., Guan, X., Wu, P., Wang, X., Zhou, L., Tong, Y., Ren, R., Leung, K.S., Lau, E.H., Wong, J.Y., Xing, X., Xiang, N., Wu, Y., Li, C., Chen, Q., Li, D., Liu, T., Zhao, J., Liu, M., Tu, W., Chen, C., Jin, L., Yang, R., Wang, Q., Zhou, S., Wang, R., Liu, H., Luo, Y., Liu, Y., Shao, G., Li, H., Tao, Z., Yang, Y., Deng, Z., Liu, B., Ma, Z., Zhang, Y., Shi, G., Lam, T.T., Wu, J.T., Gao, G.F., Cowling, B.J., Yang, B., Leung, G.M., e Feng, Z. (2020). Early transmission dynamics in wuhan, china, of novel coronavirus-infected pneumonia. *New England Journal of Medicine*, 382(13), 1199–1207. doi:10.1056/NEJMoa2001316.
- Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Texts in Applied Mathematics. Springer US.
- Nowzari, C., Preciado, V.M., e Pappas, G.J. (2016). Analysis and control of epidemics: A survey of spreading processes on complex networks. *IEEE Control Systems Magazine*, 36(1), 26–46.
- Prem, K., Liu, Y., Russell, T.W., Kucharski, A.J., Eggo, R.M., Davies, N., Flasche, S., Clifford, S., Pearson, C.A.B., Munday, J.D., Abbott, S., Gibbs, H., Rosello, A., Quilty, B.J., Jombart, T., Sun, F., Diamond, C., Gimma, A., [van Zandvoort], K., Funk, S., Jarvis, C.I., Edmunds, W.J., Bosse, N.I., Hellewell, J., Jit, M., e Klepac, P. (2020). The effect of control strategies to reduce social mixing on outcomes of the covid-19 epidemic in wuhan, china: a modelling study. *The Lancet Public Health*. doi:10.1016/S2468-2667(20)30073-6.
- Verity, R., Okell, L.C., Dorigatti, I., Winskill, P., Whittaker, C., Imai, N., Cuomo-Dannenburg, G., Thompson, H., Walker, P.G.T., Fu, H., Dighe, A., Griffin, J.T., Baguelin, M., Bhatia, S., Boonyasiri, A., Cori, A., Cucunubá, Z., FitzJohn, R., Gaythorpe, K., Green, W., Hamlet, A., Hinsley, W., Laydon, D., Nedjati-Gilani, G., Riley, S., [van Elsland], S., Volz, E., Wang, H., Wang, Y., Xi, X., Donnelly, C.A., Ghani, A.C., e Ferguson, N.M. (2020). Estimates of the severity of coronavirus disease 2019: a model-based analysis. *The Lancet Infectious Diseases*. doi:10.1016/S1473-3099(20)30243-7.
- Zaman, G., Kang, Y.H., e Jung, I.H. (2009). Optimal treatment of an sir epidemic model with time delay. *Biosystems*, 98(1), 43 – 50. doi:10.1016/j.biosystems.2009.05.006.

Apêndice A. PROPRIEDADES DO MODELO SIR

Baseado no modelo (1) tem-se que $\forall t, s(t) > 0$ e $\forall t, \dot{s}(t) < 0$, o que implica $s(t)$ irá decair independente do valor inicial $s(0) = s_0$. Ainda baseado no modelo (1) tem-se que $\forall t, \dot{r}(t) > 0$, o que implica $r(t)$ irá crescer, independente do valor inicial $r(0) = r_0$, até o valor máximo de N (total da população).

Considerando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = s_{\infty},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = r_{\infty},$$

dividindo a primeira equação pela terceira equação do modelo 1, considerando $\beta(t)$ constante, tem-se

$$\frac{d s(t)}{d r(t)} = \frac{-\beta s(t)}{\gamma},$$

utilizando nesta equação um método para resolução de equações diferenciais para variáveis separáveis tem-se

$$s = s_0 e^{-(\beta/\gamma)r} \geq s_0 e^{-(\beta/\gamma)N} > 0$$

e, desta forma, pode-se concluir que $s_{\infty} > 0$.

Integrando-se a primeira equação do modelo 1, considerando $\beta(t)$ constante, tem-se

$$\int_0^{\infty} \dot{s} dt = -\beta \int_0^{\infty} s(t)i(t) dt$$

$$s_{\infty} - s_0 = -\beta \int_0^{\infty} s(t)i(t) dt,$$

e, desta forma, pode-se concluir que

$$s(t) > 0, \forall t \implies \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0.$$