

# Projeto de Controle Feedforward Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares

Egydio Tadeu Gomes Ramos\* George Acioli Júnior\*\*  
Péricles R. Barros\*\* José Sérgio da R. Neto\*\*

\* *Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica,  
Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de  
Campina Grande, Campina Grande, PB  
(e-mail: egydio.ramos@ee.ufcg.edu.br).*

\*\* *Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de  
Campina Grande, Campina Grande, PB  
(e-mails: [georgeacioli, prbarros, zesergio]@dee.ufcg.edu.br).*

**Abstract:** In feedforward control, the process and disturbance models can lead to a problem where the ideal compensator is non realizable. It can have improper transfer function, unstable poles or non realizable delays. In this work, a method for feedforward controller tuning is presented. It consists in an  $\mathcal{H}_\infty$  optimization problem, which can be applied to different structures of the process and perturbation models. To regulate the performance of the disturbance rejection, a frequency weighting is proposed for application in single-input and single-output systems. A solution using linear matrix inequalities is developed for the problem. Finally, case studies were carried out to verify the performance of the proposed method, comparing it with others existing in the literature.

**Resumo:** No controle feedforward, os modelos do processo e da perturbação podem resultar em um problema onde o compensador ideal é não-realizável. Sua função de transferência pode ser imprópria, possuir polos instáveis ou atrasos não-realizáveis. Neste trabalho é apresentada uma técnica de sintonia para controladores feedforward. O método consiste na solução de um problema de otimização  $\mathcal{H}_\infty$ , que pode ser aplicado para diversas estruturas dos modelos do processo e da perturbação. Para regular o desempenho da rejeição de perturbação uma ponderação na frequência é proposta para aplicação em sistemas de uma entrada e uma saída. Uma solução utilizando desigualdades matriciais lineares é desenvolvida para o problema. Por fim, estudos de caso foram realizados para verificar o desempenho do método proposto, comparando-o com outros existentes na literatura.

**Keywords:** Feedforward Control;  $\mathcal{H}_\infty$  Optimization; Linear Matrix Inequalities.

**Palavras-chaves:** Controle Feedforward; Otimização  $\mathcal{H}_\infty$ ; Desigualdades Matriciais Lineares.

## 1. INTRODUÇÃO

A compensação de perturbações utilizando controle feedforward é uma técnica aplicada em conjunto com o controle em malha fechada para melhoria no desempenho da rejeição dessas. Se a perturbação pode ser medida e a dinâmica de sua influência no sistema é conhecida, então é possível tomar ações de controle antes que ela afete a saída do processo. É uma técnica utilizada em diversas aplicações como, por exemplo, o controle de colunas de destilação (Nisenfeld and Miyasaki, 1972).

Um compensador feedforward ideal que rejeita completamente a perturbação pode ser obtido a partir do conhecimento das dinâmicas do processo e da perturbação. Contudo, características como ordens dos sistemas, fases não-mínimas e atrasos podem resultar em um compensador não realizável.

Nesses casos, diversos trabalhos propuseram métodos de sintonia para obtenção de compensadores que resultem em um bom desempenho na rejeição de perturbações. Técnicas para tratar atrasos não-realizáveis são abordadas em Guzmán and Hägglund (2011) e Rodríguez et al. (2013).

Em Rodríguez et al. (2014) é desenvolvido um método para quando as ordens dos modelos da planta e da perturbação resultariam em uma função de transferência imprópria para o compensador. A abordagem utilizada em Li et al. (2015) é aplicada a casos mais gerais e consiste em obter um compensador realizável que aproxima a resposta em frequência de um não realizável.

Neste trabalho é proposta uma técnica de projeto utilizando otimização  $\mathcal{H}_\infty$  para controle feedforward. Uma solução do problema utilizando desigualdades matriciais lineares (LMI - *linear matrix inequalities*) é detalhada, possibilitando a utilização de *solvers* já existentes, como o *LMI Lab* do MATLAB (Gahinet et al., 1995) ou o

\* Este trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

CVX (Grant and Boyd, 1995), para a busca da solução. A vantagem deste método é sua aplicabilidade a diferentes casos, incluindo a possibilidade de extensão para sistemas multivariáveis, que não é englobado nas demais técnicas supracitadas. É possível ainda regular o desempenho do compensador na rejeição de perturbações por meio de ponderação nas frequências.

O trabalho está organizado da seguinte forma. Na seção 2 é feita uma breve descrição do controle feedforward. A formulação do problema de otimização  $\mathcal{H}_\infty$  é apresentada na seção 3 e um solução utilizando LMI é desenvolvida na seção 4. Na seção 5 são realizados alguns estudos de caso comparando o método proposto com outros disponíveis na literatura. Por fim, as conclusões do trabalho são apresentadas na seção 6.

## 2. CONTROLE FEEDFORWARD

O problema de controle em malha fechada com compensação de perturbações utilizando o *feedforward* é ilustrado no diagrama de blocos da Fig. 1. O processo  $\mathbf{G}$  está em malha fechada com o controlador  $\mathbf{K}$ . A perturbação  $\mathbf{d}$  atua na saída do sistema por meio de  $\mathbf{G}_d$  e é compensada na entrada por  $\mathbf{G}_{ff}$ .

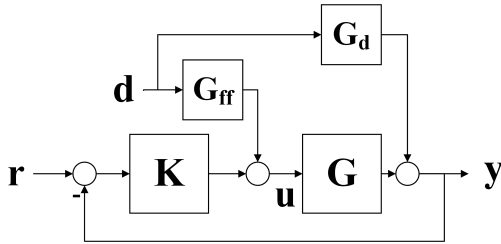


Figura 1. Diagrama de blocos do controle feedforward.

Considerando o sistema em malha aberta, a saída  $\mathbf{y}$  e a perturbação  $\mathbf{d}$  são relacionadas pela seguinte expressão:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{G}_d + \mathbf{G}\mathbf{G}_{ff})\mathbf{d}. \quad (1)$$

Logo, a condição ideal para rejeição da perturbação é:

$$\mathbf{G}_d + \mathbf{G}\mathbf{G}_{ff} = 0, \quad (2)$$

implicando na seguinte expressão para o compensador ideal:

$$\mathbf{G}_{ff} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}_d. \quad (3)$$

Dependendo das estruturas dos modelos de  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{G}_d$ , a solução obtida em (3) pode resultar em uma função de transferência com polos instáveis, imprópria ou com atraso não realizável (Guzmán and Hägglund, 2011). Nesses casos não é possível obter um compensador ideal, mas outras estratégias podem ser adotadas para o projeto de controle feedforward que resulte em um bom desempenho na rejeição da perturbação.

## 3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

### 3.1 Otimização $\mathcal{H}_\infty$

O método proposto consiste em formular o problema de controle feedforward como um problema de otimização  $\mathcal{H}_\infty$ . A estrutura básica é baseada no diagrama de blocos

da Fig. 2, onde  $\mathbf{P}(s)$  é o modelo generalizado,  $\mathbf{K}(s)$  é o controlador,  $\mathbf{u}$  são variáveis de controle,  $\mathbf{w}$  são entradas exógenas,  $\mathbf{y}$  são as saídas medidas e  $\mathbf{z}$  são as variáveis de erro.

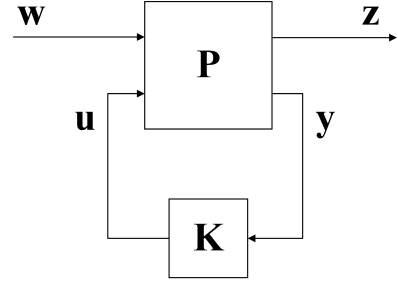


Figura 2. Diagrama em blocos da formulação geral do  $\mathcal{H}_\infty$ .

No controle  $\mathcal{H}_\infty$  sub-ótimo, o objetivo consiste em limitar a norma- $\infty$ , por um valor máximo  $\gamma$ , da matriz de transferência em malha fechada entre  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{w}$ , denominada  $\mathbf{F}_{zw}(s)$ . Um controlador  $\mathbf{K}$  deve ser obtido tal que:

$$\|\mathbf{F}_{zw}\|_\infty < \gamma. \quad (4)$$

Para o problema de controle feedforward, a estrutura geral é modificada para a apresentada na Fig. 3, onde considerou-se  $\mathbf{d} = \mathbf{w}$ .

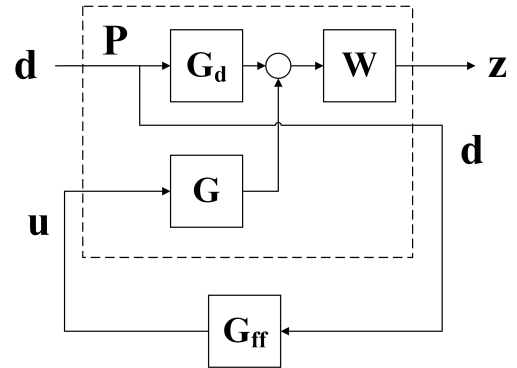


Figura 3. Diagrama de blocos da formulação  $\mathcal{H}_\infty$  para controle feedforward.

A partir do diagrama, a matriz de transferência do modelo generalizado é expressa por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_d & \mathbf{G} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

e o problema de otimização resultante é:

$$\|\mathbf{F}_{zd}\|_\infty < \gamma, \quad \text{onde } \mathbf{F}_{zd} = \mathbf{W}(\mathbf{G}\mathbf{G}_{ff} + \mathbf{G}_d). \quad (6)$$

Uma condição necessária para obtenção da solução do problema de otimização é que  $\mathbf{F}_{zd}$  não possua polos instáveis. Logo, será assumido que  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}_d$  e  $\mathbf{G}_{ff}$  são estáveis.

### 3.2 Considerações acerca da ponderação

A ponderação  $\mathbf{W}$  é fundamental para ajustar o desempenho do compensador obtido. Utilizar um valor constante normalmente resulta em um desempenho ruim, principalmente nas baixas frequências. Dessa forma é interessante

aumentar a magnitude da ponderação nessa faixa. Para sistemas com uma entrada e uma saída (SISO - *single-input and single-output*) pode-se utilizar um filtro passa-baixa de primeira ordem com a seguinte expressão:

$$W(s) = \frac{k_w}{s + \omega_w}, \quad (7)$$

onde  $k_w$  é o ganho e  $\omega_w$  a frequência de corte.

A manipulação dos parâmetros  $k_w$  e  $\omega_w$  influenciam tanto no desempenho do sistema quanto na convergência do algoritmo de otimização. Valores muito altos de  $k_w$  resultam em um problema sem solução. Da mesma forma, se o valor de  $\omega_w$  for muito baixo, a ponderação se aproxima de um integrador e não é possível obter uma solução para o problema  $\mathcal{H}_\infty$  se  $\mathbf{F}_{zd}$  for instável.

Dado um sistema SISO cujo modelo da planta possui ganho  $G(0)$  e frequência de corte  $\omega_G$ , e o modelo da perturbação possui ganho  $G_d(0)$  e frequência de corte  $\omega_{Gd}$ . Definindo  $\gamma = 1$  no problema de otimização, as seguintes expressões garantem que uma solução seja obtida:

$$k_w = \frac{G(0)}{G_d(0)} \quad (8)$$

$$\omega_w = 0.001 \min(\omega_G, \omega_{Gd}). \quad (9)$$

Esses valores podem ser ajustados para obter compensadores com o desempenho desejado. Aumentar  $k_w$  ou reduzir  $\omega_w$  resulta em um compensador com atuação mais agressiva, reduzindo a constante de tempo e aumentando o pico no sinal de controle.

#### 4. SOLUÇÃO DO PROBLEMA $\mathcal{H}_\infty$ UTILIZANDO LMI

O problema de otimização  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser formulado como um conjunto de LMIs utilizando o *Bounded Real Lemma* (Dullerud and Paganini, 2010). A solução pode ser determinada então utilizando o método dos pontos interiores. Do ponto de vista da estrutura do modelo, essa abordagem é menos restritiva do que a utilização de equações de Riccati, de forma que pode ser aplicada a casos mais gerais (Mackenroth, 2004). A única restrição aplicada ao modelo generalizado é que não possua ganho direto entre as variáveis de controle e as saídas medidas.

Dadas as seguintes representações em espaço de estados para o modelo generalizado, compensador e a função de transferência em malha fechada:

$$\mathbf{P}(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \hline \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (10)$$

$$\mathbf{G}_{ff}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \hline \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_K \end{array} \right]$$

$$\mathbf{F}_{zd}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \hline \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{array} \right].$$

Uma matriz  $\mathbf{J}$  é definida contendo as matrizes da realização em espaço de estados de  $\mathbf{G}_{ff}(s)$ :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_K \end{bmatrix}. \quad (11)$$

As matrizes do sistema em malha fechada podem ser descritas em função de  $\mathbf{J}$  da seguinte forma:

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A}_e + \mathbf{B}_{2e}\mathbf{J}\mathbf{C}_{2e}, \quad \mathbf{B}_c = \mathbf{B}_{1e} + \mathbf{B}_{2e}\mathbf{J}\mathbf{D}_{21e} \quad (12)$$

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{C}_{1e} + \mathbf{D}_{12e}\mathbf{J}\mathbf{C}_{2e}, \quad \mathbf{D}_c = \mathbf{D}_{11} + \mathbf{B}_{2e}\mathbf{J}\mathbf{C}_{2e}$$

onde:

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{1e} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{1e} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{2e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{12e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{21e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

O projeto do controlador pode ser dividido em duas etapas. Primeiro as LMIs (14)-(16) são resolvidas para determinar se existe um controlador realizável que satisfaz o problema de otimização. Em seguida, a realização em espaço de estados do controlador é obtida utilizando (19).

Lema 1. Existe um controlador que satisfaz  $\|\mathbf{F}_{zd}\|_\infty < \gamma$  se, e somente se, existem duas matrizes  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  positivas definidas que satisfazem as seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} & \mathbf{X}\mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{B}_1^T\mathbf{X} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A}^T & \mathbf{Y}\mathbf{C}_1^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{Y} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{D}_{11}^T & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \quad (16)$$

As matrizes  $\mathbf{N}_o$  e  $\mathbf{N}_c$  possuem posto completo e são expressas por:

$$\mathbf{N}_o = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{N}_c = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_{12}^T \end{bmatrix}, \quad (17)$$

onde  $\ker(\cdot)$  denota uma base do espaço nulo da matriz.

Lema 2. Se existem  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  que satisfazem simultaneamente (14)-(16), e uma matriz  $\mathbf{X}_2$  tal que  $\mathbf{X}_2\mathbf{X}_2^T = \mathbf{X} - \mathbf{Y}^{-1} \geq 0$ , então, definindo  $\mathbf{Z}$  como:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2^T & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

os parâmetros do controlador podem ser obtidos substituindo (12) na seguinte LMI e resolvendo para  $\mathbf{J}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{A}_c & \mathbf{Z} \mathbf{B}_c & \mathbf{C}_c^T \\ \mathbf{B}_c^T \mathbf{Z} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}_c^T \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (19)$$

As provas dessas desigualdades são detalhadas em MacKenroth (2004).

## 5. RESULTADOS

Nesta seção são apresentados resultados simulados com a aplicação da técnica apresentada. São considerados três casos distintos de compensadores não realizáveis: a função de transferência é imprópria, o processo possui fase não-mínima e o atraso não realizável. Para cada caso foi projetado um compensador utilizando  $\mathcal{H}_\infty$  e realizadas simulações para verificar o desempenho na rejeição de perturbação em comparação com outras técnicas disponíveis na literatura. A integral do erro absoluto (IAE - *integral absolute error*) foi utilizada como critério de desempenho.

Tendo em vista que a função de transferência resultante da aplicação do  $\mathcal{H}_\infty$  possui a mesma ordem do modelo generalizado, foi utilizada a técnica de redução de modelos balanceada, proposta por Laub et al. (1987). O objetivo foi simplificar o modelo obtido para comparação com os resultados de aplicações das técnicas propostas na literatura, que em sua maioria são focadas em compensadores de baixa ordem.

### 5.1 Caso 1: função de transferência imprópria

No primeiro caso foram utilizados os seguintes modelos para o processo e a perturbação, retirados de Li et al. (2015):

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad (20)$$

$$G_d(s) = \frac{2}{2s+1}. \quad (21)$$

O compensador ideal possui uma função de transferência imprópria:

$$C_{ff}(s) = -2 \frac{(s+1)^2}{2s+1}. \quad (22)$$

No projeto utilizando LMI foi utilizado um filtro passa-baixa de primeira ordem com ganho  $k_w = 1,3G(0)/G_d(0)$  e frequência de corte igual a  $0,001\omega_{G_d}$ . Obteve-se a seguinte expressão para o compensador:

$$C_{ff1}(s) = -1,998 \frac{1,63s+1}{1,98s+1}, \quad (23)$$

resultando em  $\gamma = 0,48$ .

Para efeitos de comparação entre as técnicas foi utilizado o compensador projetado para esse sistema obtido com a técnica apresentada em Li et al. (2015):

$$C_{ff2}(s) = -2 \frac{0,98s+1}{0,008s+1}. \quad (24)$$

No gráfico da Fig. 4 são apresentadas as respostas do sistema a aplicação de um degrau unitário na perturbação. O sistema está em malha fechada com um controlador PI ( $K_p = 1$  e  $T_i = 4$ ) projetado de forma heurística para garantir estabilidade. A saída do sistema foi observada nos casos com apenas o controlador em malha fechada e com os compensadores projetados.

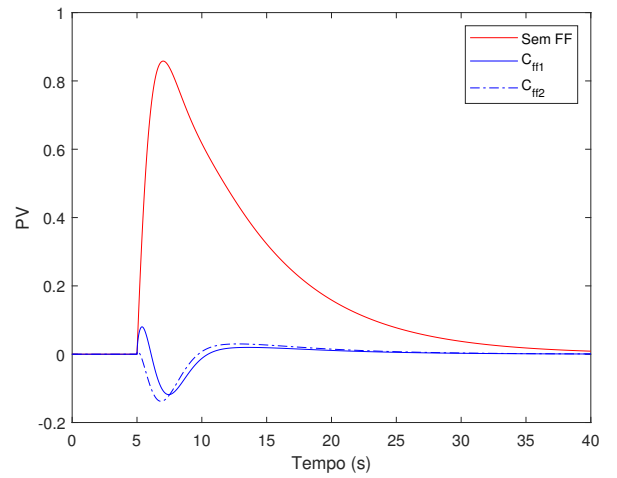


Figura 4. Aplicação de um degrau unitário (em  $t = 5$  s) na perturbação do sistema de ordem 2.

Na Tabela 1 são apresentadas as IAEs calculadas para cada caso. Observou-se que a aproximação do compensador ideal foi a que resultou no pior caso de controle com feedforward. Observou-se que o desempenho na rejeição da perturbação foi significativamente melhorado com a inserção dos compensadores. O projeto utilizando  $\mathcal{H}_\infty$  resultou em um sistema com desempenho equiparável ao da técnica utilizada na comparação.

Tabela 1. Comparação da IAE para os resultados da simulação apresentada na Fig. 4.

|     | Sem FF | $G_{ff1}$ | $G_{ff2}$ |
|-----|--------|-----------|-----------|
| IAE | 793,86 | 56,73     | 68,04     |

### 5.2 Caso 2: processo com fase não-mínima

Dadas as seguintes funções de transferência para o processo e a perturbação:

$$G(s) = \frac{-2s+1}{5s+1} \quad (25)$$

$$G_d(s) = \frac{5}{10s+1}. \quad (26)$$

Devido a fase não-mínima em  $G(s)$ , o compensador ideal possui um polo no semiplano direito:

$$C_{ff}(s) = -5 \frac{5s + 1}{(10s + 1)(-2s + 1)}. \quad (27)$$

Aplicando o projeto com LMIs obteve-se a seguinte expressão para o compensador:

$$C_{ff1}(s) = -4,996 \frac{6,83s + 1}{10,42s + 1}, \quad (28)$$

resultando em  $\gamma = 1,3$ .

Para efeitos de comparação, foram utilizados outros dois compensadores. O primeiro foi obtido a partir do ideal, desprezando o polo instável, o que resultou em:

$$C_{ff2}(s) = -5 \frac{5s + 1}{10s + 1}. \quad (29)$$

O segundo foi projetado utilizando a técnica proposta em Rodríguez et al. (2014), que é específica para o problema com fase não-mínima. Nela se considera uma estrutura de controle diferente com o bloco utilizado para desacoplar as ações de feedforward do controlador em malha fechada. Contudo, apenas para efeito de comparação entre os métodos foi mantida a estrutura convencional apresentada na Fig. 1. A função de transferência do compensador obtida nesse caso foi:

$$C_{ff3}(s) = -5 \frac{(3,33s + 1)(5s + 1)}{(2s + 1)(10s + 1)}. \quad (30)$$

No gráfico da Fig. 5 são apresentadas as respostas do sistema a aplicação de um degrau unitário na perturbação. O sistema está em malha fechada com um controlador PI ( $K_p = 0,2$  e  $T_i = 2$ ).

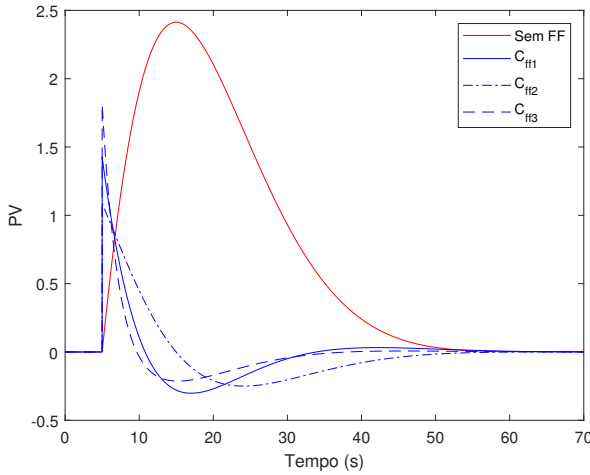


Figura 5. Aplicação de um degrau unitário (em  $t = 5$  s) na perturbação do sistema de fase não-mínima.

Na Tabela 2 são apresentadas as IAEs calculadas para cada caso. Observou-se que a aproximação do compensador ideal foi a que resultou no pior caso de controle com feedforward. O compensador  $\mathcal{H}_\infty$  teve um bom desempenho, sendo um pouco inferior ao da técnica proposta por Rodríguez et al. (2014), mesmo possuindo uma função de transferência com ordem menor.

### 5.3 Caso 3: atraso não realizável

Para esse caso foram considerados os seguintes modelos:

Tabela 2. Comparação da IAE para os resultados da simulação apresentada na Fig. 5.

|     | Sem FF  | $G_{ff1}$ | $G_{ff2}$ | $G_{ff3}$ |
|-----|---------|-----------|-----------|-----------|
| IAE | 4991,40 | 771,57    | 965,43    | 592,73    |

$$G(s) = \frac{40}{200s + 1} e^{-50s} \quad (31)$$

$$G_d(s) = \frac{20}{150s + 1} e^{-30s}. \quad (32)$$

O compensador ideal possui atraso não realizável:

$$C_{ff}(s) = -0,5 \frac{200s + 1}{150s + 1} e^{20s}. \quad (33)$$

Para tratar o atraso no projeto utilizando  $\mathcal{H}_\infty$  foi utilizada uma aproximação de Padé de primeira ordem. Dessa forma, o problema se torna semelhante a um caso de fase não-mínima. As aproximações resultam em:

$$G(s) \approx 40 \frac{-25s + 1}{(200s + 1)(25s + 1)} \quad (34)$$

$$G_d(s) = 20 \frac{-15s + 1}{(150s + 1)(15s + 1)}. \quad (35)$$

Aplicando o projeto com LMIs obteve-se a seguinte expressão para o compensador:

$$C_{ff1}(s) = -0,5 \frac{143,68s + 1}{123,37s + 1}. \quad (36)$$

resultando em  $\gamma = 2,96$ .

De forma análoga ao caso anterior, foram utilizados outros dois compensadores para comparação. O primeiro foi obtido a partir do ideal, desprezando o atraso, o que resultou em:

$$C_{ff2}(s) = -0,5 \frac{200s + 1}{150s + 1}. \quad (37)$$

O segundo foi projetado utilizando a técnica para atraso não realizável proposta em Rodríguez et al. (2013). O método consiste em alterar a constante de tempo do denominador e o ganho de  $C_{ff2}$  para, respectivamente, minimizar a integral do erro e obter uma compensação do efeito da malha fechada com um controlador PI. A função de transferência do compensador obtida nesse caso foi:

$$C_{ff3}(s) = -0,434 \frac{200s + 1}{138,23s + 1}. \quad (38)$$

No gráfico da Fig. 6 são apresentadas as respostas do sistema a aplicação de um degrau unitário na perturbação. O sistema está em malha fechada com um controlador PI ( $K_p = 0,04$  e  $T_i = 100$ ).

Na Tabela 3 são apresentadas as IAEs calculadas para cada caso. Observou-se que nesse caso o compensador utilizando  $\mathcal{H}_\infty$  foi o que apresentou melhor desempenho na rejeição da perturbação.

## 6. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma técnica para projeto de controle feedforward utilizando otimização  $\mathcal{H}_\infty$ . A solução proposta é flexível para tratar diferentes casos que impossibilitam o uso de um compensador ideal, tais como: ordens dos modelos do processo e da perturbação que resultam em funções de transferência impróprias, fases não-mínimas e atraso não realizável. O desempenho na rejeição de perturbação pode ser facilmente regulado por meio da inclusão de uma ponderação nas frequências. Uma solução para o problema de otimização utilizando desigualdades matriciais lineares é abordada, no intuito de facilitar a implementação do método a partir do uso de *solvers* e funções já existentes. Estudos de casos simulados foram realizados, onde foi possível observar por meio dos gráficos e índices de desempenho a eficácia do método, em comparação com outras técnicas disponíveis na literatura.

O método utilizado possibilita a extensão direta para o controle feedforward de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas, contudo para que se obtenha uma solução satisfatória é necessário investigar a utilização da ponderação em frequência, algo que será realizado em trabalhos futuros. Além disso, uma nova formulação  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser adotada para realizar o projeto do compensador considerando o sistema em malha fechada.

## REFERÊNCIAS

- Dullerud, G.E. and Paganini, F. (2010). *A Course In Robust Control Theory*. Texts in Applied Mathematics. Springer, 1 edition.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A., and Chilali, M. (1995). *LMI control toolbox user's guide*.
- Grant, M.C. and Boyd, S.P. (1995). *The CVX User's Guide*.
- Guzmán, J. and Hägglund, T. (2011). Simple tuning rules for feedforward compensators. *Journal of Process Control*, 21(1), 92 – 102.
- Laub, A., Heath, M., Paige, C., and Ward, R. (1987). Computation of balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 32, 115 – 122.
- Li, X., Wang, Q., and Cai, W. (2015). Approximate feedforward control. In *2015 10th Asian Control Conference (ASCC)*, 1–6.
- Mackenroth, U. (2004). *Robust Control Systems: Theory and Case Studies*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition.
- Nisenfeld, A. and Miyasaki, R. (1972). Applications of feedforward control to distillation columns. *IFAC Proceedings Volumes*, 5(1, Part 1), 4 – 10. IFAC 5th World Congress: Part 1, Paris, France, June 12-17, 1972.
- Rodríguez, C., Guzmán, J., Berenguel, M., and Hägglund, T. (2013). Generalized feedforward tuning rules for non-realizable delay inversion. *Journal of Process Control*, 23(9), 1241 – 1250.
- Rodríguez, C., Guzmán, J., Berenguel, M., and Hägglund, T. (2014). Optimal feedforward compensators for systems with right-half plane zeros. *Journal of Process Control*, 24(4), 368 – 374.

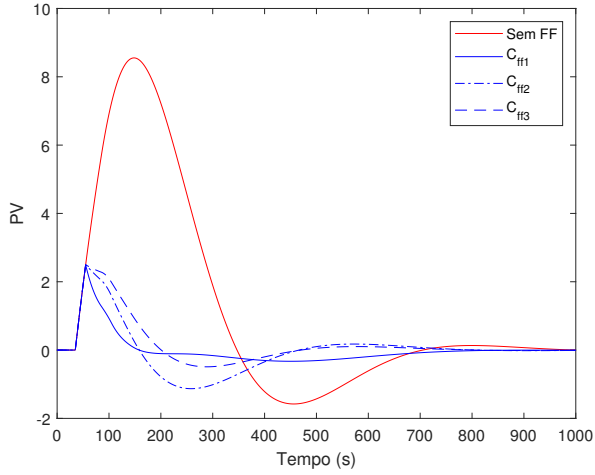


Figura 6. Aplicação de um degrau unitário (em  $t = 5$  s) na perturbação do sistema com atraso.

Tabela 3. Comparação da IAE para os resultados da simulação apresentada na Fig. 6.

|                       | Sem FF | $G_{ff1}$ | $G_{ff2}$ | $G_{ff3}$ |
|-----------------------|--------|-----------|-----------|-----------|
| IAE ( $\times 10^4$ ) | 18,87  | 2,31      | 4,10      | 3,25      |

Porém vale salientar que o desempenho está muito ligado a escolha do controlador PI. Por exemplo, alterando  $K_p$  para 0.03 e  $T_i$  para 300 verifica-se pelo gráfico na Fig. 7 e a Tabela 4 que o desempenho do compensador  $\mathcal{H}_\infty$  piorou. Contudo, a presença do controle feedforward ainda atua significativamente melhor na rejeição da perturbação.

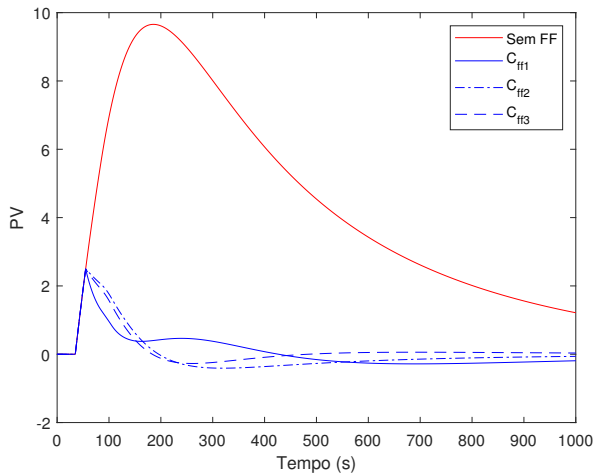


Figura 7. Aplicação de um degrau unitário na perturbação do sistema com atraso ao alterar os parâmetros do controlador.

Tabela 4. Comparação da IAE para os resultados da simulação apresentada na Fig. 7.

|                       | Sem FF | $G_{ff1}$ | $G_{ff2}$ | $G_{ff3}$ |
|-----------------------|--------|-----------|-----------|-----------|
| IAE ( $\times 10^4$ ) | 45,02  | 3,41      | 3,61      | 2,40      |