DOI: 10.48011/asba.v2i1.1472

# Análise da Distribuição de Energia na Decomposição de Sinais no Domínio Wavelet

**Rodrigo de A. Coelho** * **Hugerles S. Silva** **
**Núbia S. D. Brito** ***

* *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Campina Grande, PB*
** *Centro de Informática, Universidade Federal da Paraíba, PB*
*** *Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Campina Grande, PB*
*(e-mail: rodrigo.almeida@ee.ufcg.edu.br)*

**Abstract:** The Discrete Wavelet Transform (DWT) is one of the most applied tools for studies concerning power quality (PQ). However, depending on the filter used in its processing, the decomposition performed by DWT can result in spectral leakage. Spectral leakage can lead to misrepresentation of frequency components, which is detrimental to PQ analysis. In this context, this work presents an analysis of the energy distribution and spectral leakage in signals decomposition performed by the Redundant Discrete Wavelet Transform (RDWT) and by the Redundant Discrete Wavelet Packet Transform (RDWPT). In simulated signals, the energy of each coefficient of RDWT and RDWPT was analyzed, as well as its concentration in its ideal passband. Thus, wavelet functions with different lengths were used. The results indicated that compact wavelets lead to a higher energy leakage than high-order wavelets.

**Resumo**: A Transformada Wavelet Discreta (TWD) é uma das ferramentas mais aplicadas para estudos sobre a qualidade da energia elétrica (QEE). Entretanto, dependendo do filtro utilizado, a decomposição efetuada pela TWD pode implicar em vazamento espectral. O vazamento espectral pode acarretar uma má representação de componentes de frequência, o que é prejudicial à análise da QEE. Nesta conjuntura, este trabalho apresenta uma análise da distribuição de energia e do vazamento espectral na decomposição de sinais efetuada pela Transformada Wavelet Discreta Redundante (TWDR) e pela Transformada Wavelet *Packet* Discreta Redundante (TWPDR). Em sinais de teste, analisou-se a energia de cada coeficiente da TWDR e da TWPDR, bem como sua concentração em sua banda passante ideal. Para tanto, foram utilizadas funções wavelet com diferentes comprimentos. Os resultados indicaram que wavelets curtas acarretam um vazamento de energia superior ao de wavelets longas.

*Keywords:* wavelet transform; redundant discrete wavelet transform; redundant discrete wavelet packet transform; energy leakage; harmonic analysis.

*Palavras-chaves:* transformada wavelet; transformada wavelet discreta redundante; transformada wavelet *packet* discreta redundante; vazamento de energia; análise harmônica.

## 1. INTRODUÇÃO

A disseminação de cargas não-lineares no sistema elétrico de potência (SEP) contribuiu para que a qualidade da energia elétrica (QEE) se constituísse como uma das áreas de pesquisa mais profícuas da engenharia elétrica. A drenagem de correntes não-lineares das fontes provoca distorções nos sinais de tensão e de corrente, as quais podem ser prejudiciais à operação de diversos equipamentos (Dugan et al., 2004).

Este cenário evidencia a necessidade de uma estimativa dos parâmetros dos sinais de tensão e corrente que compõem o SEP. Desse modo, a assertividade no diagnóstico e classificação de distúrbios de QEE está intimamente relacionada com uma representação adequada dos sinais que compõem o SEP.

Nessa conjuntura, uma das ferramentas de análise de sinais de maior destaque na literatura é a Transformada Wavelet (TW), cuja versão discreta, a Transformada Wavelet Discreta (TWD), tem sido utilizada em diversas áreas da engenharia elétrica, muitas das quais relacionadas à QEE, como em Santoso et al. (1996); Wilkinson and Cox (1996); Barros and Diego (2008); Alves et al. (2017), o que evidencia a proeminência dessa ferramenta.

A TWD efetua uma filtragem nos sinais, decompondo-os em faixas de frequências. Na prática, os filtros utilizados devem garantir boas características de banda passante (BP) plana e boa separação de frequências, caso contrário pode ocorrer vazamento do espectro entre as bandas (Tarasiuk, 2004), o qual pode acarretar uma caracterização inadequada de componentes de frequência de um sinal. Isto é, o processamento efetuado pela TWD pode implicar em vazamento de energia no processo de decomposição dos

sinais, cujos efeitos, segundo Peng et al. (2009), são pouco relatados na literatura.

O vazamento espectral pode ocorrer devido a uma amostragem irregular e/ou ao janelamento em um sinal (Oppenheim and Schafer, 2009), onde as amplitudes estimadas sofrem um achatamento e um espalhamento em torno das raias espectrais. Desse modo, este efeito também pode ocorrer em outras transformadas, tais como as fundamentadas na Teoria de Fourier.

Este trabalho se insere neste contexto e apresenta um estudo da distribuição de energia e do vazamento espectral para decomposições baseadas em duas transformadas, a Transformada Wavelet Discreta Redundante (TWDR) e a Transformada Wavelet *Packet* Discreta Redundante (TWPDR).

Além desta seção introdutória, este artigo está organizado como se segue: na Seção 2 são apresentados os conceitos básicos da TWDR e da TWPDR; a Seção 3 se refere a metodologia aplicada ao estudo, cujos resultados e análise estão dispostos na Seção 4; e, por fim, a Seção 5 é destinada às conclusões deste trabalho.

## 2. TRANSFORMADA WAVELET

Resumidamente, a TW é uma ferramenta matemática que efetua uma análise tempo-frequência de um sinal, provendo informações de ambos os domínios. As funções base desta transformada são as wavelets, que são provenientes de uma função de referência, conhecida como wavelet-mãe, por meio de operações simultâneas de escalonamento e translação, as quais possibilitam a decomposição de um sinal. A versão discreta da TW, a TWD, foi desenvolvida por Daubechies (1992) e pode ser calculada de modo eficiente a partir do algoritmo de banco de filtros proposto por Mallat (1989), que possibilita a divisão do espectro de frequências do sinal em diferentes faixas.

Os coeficientes escala, $c_m$, e wavelet, $d_m$, da TWD são obtidos conforme (Mallat, 1989):

$$c_m[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\varphi[k-2n]c_{m-1}[k], \tag{1}$$

$$d_m[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\psi[k-2n]c_{m-1}[k], \tag{2}$$

em que $h_\varphi$ e $h_\psi$ são os filtros passa-baixa (filtro escala) e passa-alta (filtro wavelet), respectivamente, e $m$ representa o nível de resolução da decomposição ($1 \leq m \leq M$).

Os filtros escala e wavelet dependem da wavelet-mãe utilizada e satisfazem as seguintes propriedades (Percival and Walden, 2000):

$$\sum_{l=1}^{L} h_\varphi[l] = \sqrt{2}, \qquad \sum_{l=1}^{L} h_\varphi^2[l] = 1, \tag{3}$$

$$\sum_{l=1}^{L} h_\psi[l] = \sqrt{2}, \qquad \sum_{l=1}^{L} h_\psi^2[l] = 1, \tag{4}$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_\varphi[l]h_\varphi[l+2k] = 0, \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_\psi[l]h_\psi[l+2k] = 0, \tag{5}$$

em que $k \in \mathbb{N}$ e $L$ representa o número de coeficientes dos filtros escala e wavelet. Ademais, $h_\varphi$ e $h_\psi$ são filtros espelhados em quadratura, isto é,

$$h_\varphi[l] = (-1)^{l+1}h_\psi[L-l-1], \tag{6}$$

$$h_\psi[l] = (-1)^{l}h_\varphi[L-l-1]. \tag{7}$$

Na Figura 1 é ilustrada a decomposição de um sinal efetuada pela TWD em três níveis de resolução, em que $f_s$ denota a frequência de amostragem do sinal. Como se vê, a TWD é uma transformada variante no tempo, pois efetua uma subamostragem do sinal em cada nível de decomposição, que pode provocar erros no cálculo dos coeficientes. Além disso, o processo de subamostragem só é possível em sinais cujo número de amostras seja uma potência de dois, de modo que a divisão por dois resulte em um número inteiro.

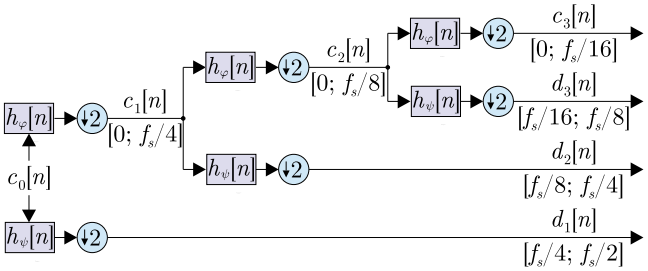



Figura 1. TWD em três níveis de resolução.

Diferentemente da TWD, a TWDR não possui subamostragem em seu processamento, isto é, a TWDR é uma transformada invariante no tempo, cujos coeficientes escala, $s_m$, e wavelet, $w_m$, são dados por (Percival and Walden, 2000):

$$s_m[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\varphi[k-n]s_{m-1}[k], \tag{8}$$

$$w_m[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\psi[k-n]s_{m-1}[k]. \tag{9}$$

A decomposição de um sinal em três níveis efetuada pela TWDR é ilustrada na Figura 2. Pode-se observar que tanto a TWD quanto a TWDR apresentam faixas de frequências de comprimento não-uniforme (Figuras 1 e 2), o que pode representar uma limitação para a detecção de componentes de frequência de maneira isolada.

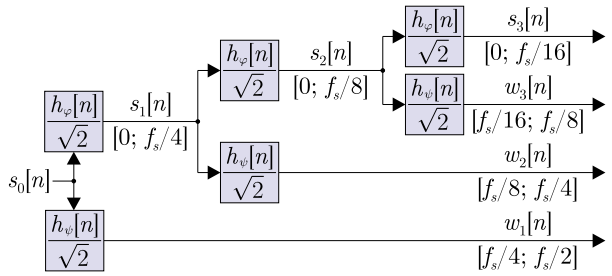



Figura 2. TWDR em três níveis de resolução.

A característica de faixas de frequências de comprimento não-uniforme da TWD e da TWDR foi contornada pela Transformada Wavelet *Packet* Discreta (TWPD), na qual o processo de decomposição abrange tanto os coeficientes escala quanto os coeficientes wavelet. Desse modo, a

decomposição resulta em faixas de frequência de comprimento uniforme. Contudo, assim como a TWD, a TWPD é uma transformada variante no tempo, pois ocorre subamostragem em seu processamento. A TWPDR, por outro lado, alia as características de uniformidade no comprimento das faixas de frequência da TWPD e da invariância no tempo da TWDR, o que pode ser vantajoso, dependendo da aplicação.

Os coeficientes de decomposição da TWPDR são dados por (Mallat, 2008):

$$s_m^{2p}[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\varphi[k] s_{m-1}^p[n-k], \tag{10}$$

$$s_m^{2p+1}[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\psi[k] s_{m-1}^p[n-k], \tag{11}$$

em que $p$ denota o número do nó da decomposição ($0 \leq p \leq P$, $P = 2^{m-1} - 1$, $p \in \mathbb{N}$).

Na Figura 3 é ilustrada a decomposição de um sinal em três níveis efetuada pela TWPDR.

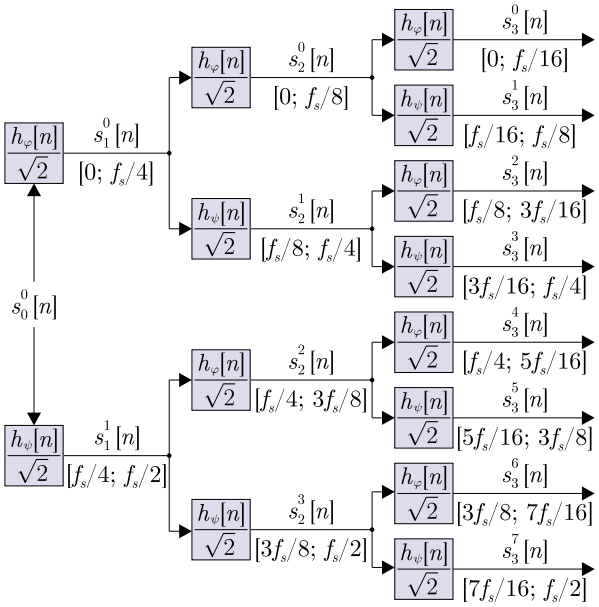



Figura 3. TWPDR em três níveis de resolução.

A energia dos coeficientes escala e wavelet da TWDR é definida por (Burrus et al., 1998):

$$\sum_{n=1}^{N} |s_0[n]|^2 = \sum_{n=1}^{N} |s_M[n]|^2 + \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} |w_m[n]|^2, \tag{12}$$

em que: $\sum_{n=1}^{N} |s_0[n]|^2$ representa a energia do sinal original; $\sum_{n=1}^{N} |s_M[n]|^2$ denota a energia dos coeficientes escala no nível de resolução $M$; e $\sum_{n=1}^{N} |w_m[n]|^2$ corresponde à energia dos coeficientes wavelet no nível $m$.

Para a TWPDR, a energia dos coeficientes é obtida conforme:

$$\sum_{n=1}^{N} |s_0[n]|^2 = \sum_{p=0}^{P} \sum_{n=1}^{N} |s_m^p[n]|^2, \tag{13}$$

em que o lado esquerdo de (13) representa a energia do sinal original e o lado direito denota a energia dos coeficientes da TWPDR no nível de resolução $m$.

## 3. MATERIAL E MÉTODOS

Para avaliar a distribuição de energia nos coeficientes da TWDR e da TWPDR, aplicou-se a metodologia apresentada na Figura 4. A resposta em frequência de filtros baseados em funções da família Daubechies (1992) foi analisada. Adicionalmente, a partir de sinais de teste, computou-se os coeficientes escala e wavelet da TWDR e da TWPDR, cujos espectros de frequências foram analisados. Em seguida, determinou-se a energia de cada coeficiente em sua BP ideal.

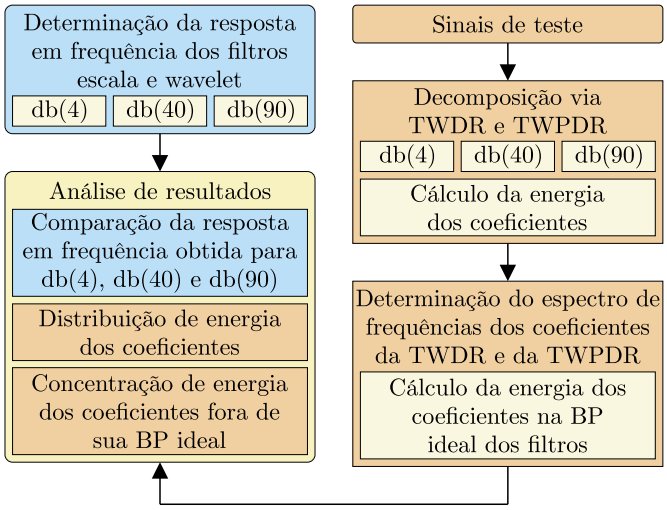



Figura 4. Metodologia aplicada ao estudo.

### *3.1 Determinação da resposta em frequência dos filtros escala e wavelet*

O processamento efetuado pela TWDR e pela TWPDR filtra um sinal em faixas de frequências, cuja quantidade é associada ao nível de resolução. Neste contexto, este trabalho analisou a resposta em frequência de filtros baseados em funções da família Daubechies (1992), as quais, segundo a literatura, são adequadas para a análise de harmônicos em sistemas de potência (Barros and Diego, 2008; Morsi and El-Hawary, 2008; Alves et al., 2017). Como se espera que wavelets mais longas propiciem resultados mais acurados (Morsi and El-Hawary, 2008), adotou-se funções com diferentes valores de $L$: db(4), db(40) e db(90).

### *3.2 Sinais de teste*

Dois sinais foram considerados para a análise da distribuição de energia dos coeficientes da TWDR e TWPDR, os quais possuem $f = 60$ Hz, $\omega = 2\pi f$ e foram amostrados a uma frequência $f_s = 1920$ Hz. A frequência de amostragem utilizada neste trabalho permite a representação de harmônicos com ordem igual ou inferior a 16 ($f_s/2 = 16 \times 60$ Hz).

*Sinal A* Contém múltiplas componentes de frequência ímpares, conforme (14):

$$A(t) = \sum_{h \in H_A} \sin(h\omega t), \qquad H_A = \{1; 3; 13; 15\}, \tag{14}$$

o qual foi adotado por possuir componentes apenas em algumas faixas de frequências: $S_3[f]$ ([0; 120] Hz), $W_3[f]$ ([120; 240] Hz) e $W_1[f]$ ([480; 960] Hz) para a TWDR; e

$S_3^0[f]$ ([0; 120] Hz), $S_3^1[f]$ ([120; 240] Hz), $S_3^6[f]$ ([720; 840] Hz) e $S_3^7[f]$ ([840; 960] Hz) para a TWPDR.

*Sinal B* Possui múltiplas componentes de frequência ímpares, conforme (15):

$$B(t) = \sum_{h \in H_B} \sin(h\omega t), \qquad H_B = \{1; 5; 7\}, \tag{15}$$

que possui componentes apenas nas faixas correspondentes a: $S_3[f]$ ([0; 120] Hz) e $W_2[f]$ ([240; 480] Hz), para a TWDR; e $S_3^0[f]$ ([0; 120] Hz), $S_3^2[f]$ ([240; 360] Hz) e $S_3^3[f]$ ([360; 480] Hz) para a TWPDR.

### *3.3 Decomposição via TWDR e TWPDR*

A TWDR e a TWPDR foram aplicadas aos sinais de teste adotando como wavelets as funções db(4), db(40) e db(90), cuja decomposição foi efetuada em três níveis de resolução. Em seguida, calculou-se o percentual de energia concentrado em cada coeficiente:

$$\xi_{\lambda_m} = \frac{\sum_{n=1}^{N} |\lambda_m[n]|^2}{\sum_{n=1}^{N} |s_0[n]|^2} \times 100\ (\%), \tag{16}$$

em que $\lambda_m$ denota os coeficientes da TWDR ($\lambda_m = s_m$ para os coeficientes escala e $\lambda_m = w_m$ para os coeficientes wavelet) e da TWPDR ($\lambda_m = s_m^p$).

### *3.4 Determinação do espectro de frequências dos coeficientes da TWDR e da TWPDR*

Para calcular a quantidade de energia de um coeficiente em uma faixa de frequências, é necessário determinar o espectro de frequências de cada coeficiente. Para isso, aplicou-se a Transformada de Fourier (TF) a cada coeficiente da TWDR e da TWPDR.

De acordo com o Teorema de Parseval, a energia de um coeficiente, $E_{\Lambda_m}$, pode ser obtida a partir de sua TF conforme (Oppenheim and Schafer, 2009):

$$E_{\Lambda_m} = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_m[n]|^2 = \frac{1}{F} \sum_{f=0}^{F-1} |\Lambda_m[f]|^2, \tag{17}$$

em que $\Lambda_m[f]$ denota a TF do coeficiente $\lambda_m[n]$ e $F$ corresponde ao comprimento de $\Lambda_m[f]$.

Por conseguinte, a energia de um coeficiente concentrada em sua BP, denotada por $E_{\Lambda_m}^{[f_0;f_1]}$, é obtida a partir de:

$$E_{\Lambda_m}^{[f_0;f_1]} = \frac{1}{F} \sum_{f=f_0}^{f_1} |\Lambda_m[f]|^2, \tag{18}$$

em que $[f_0; f_1]$ representa a BP ideal do coeficiente $\lambda_m[n]$. Isto é, considerando a TWDR $[f_0; f_1]$ corresponde a: [0; 120 Hz] para $S_3[f]$, [120; 240 Hz] para $W_3[f]$, [240; 480 Hz] para $W_2[f]$ e [480; 960 Hz] para $W_1[f]$. E, considerando a TWPDR, $[f_0; f_1]$ representa: [0; 120 Hz] para $S_3^0[f]$, [120; 240 Hz] para $S_3^1[f]$, [240; 360 Hz] para $S_3^2[f]$, [360; 480 Hz] para $S_3^3[f]$, [480; 600 Hz] para $S_3^4[f]$, [600; 720 Hz] para $S_3^5[f]$, [720; 840 Hz] para $S_3^6[f]$ e [840; 960 Hz] para $S_3^7[f]$.

Desse modo, é possível estabelecer uma razão que quantifique a concentração da energia de um coeficiente dentro, $\delta_{\Lambda_m}$, e fora, $\beta_{\Lambda_m}$, de sua BP ideal:

$$\delta_{\Lambda_m} = \frac{E_{\Lambda_m}^{[f_0;f_1]}}{E_{\Lambda_m}} \times 100\ (\%), \tag{19}$$

$$\beta_{\Lambda_m} = 100 - \delta_{\Lambda_m}\ (\%). \tag{20}$$

## 4. RESULTADOS E ANÁLISE

Esta seção é destinada à apresentação e análise dos resultados obtidos a partir da metodologia aplicada ao trabalho.

### *4.1 Resposta em frequência dos filtros escala e wavelet*

Nas Figuras 5 e 6 são apresentadas as respostas em frequência dos filtros escala e wavelet das funções db(4), db(40) e db(90) para decomposição via TWDR e TWPDR em três níveis de resolução, respectivamente.

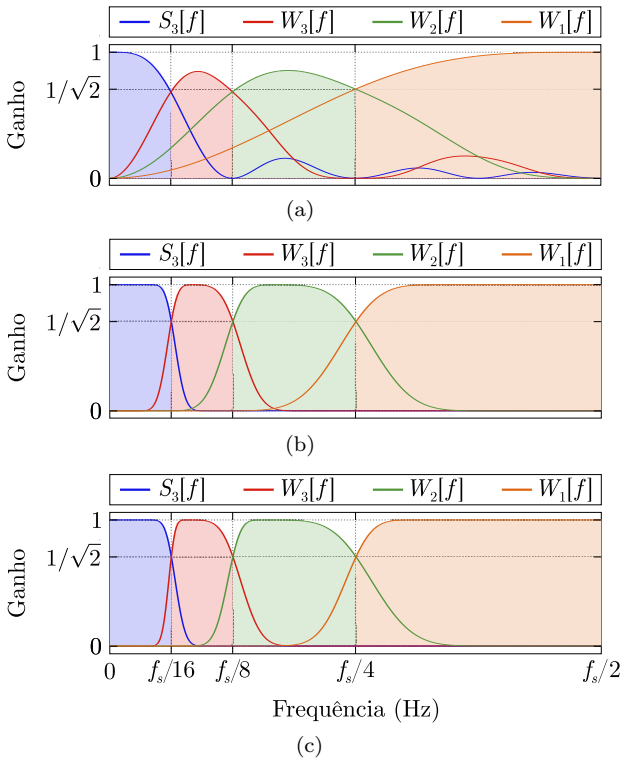



Figura 5. Resposta em frequência dos filtros escala e wavelet para uma decomposição via TWDR em três níveis: (a) db(4), (b) db(40) e (c) db(90).

A análise das Figuras 5 e 6 evidencia a ocorrência de um vazamento do espectro entre os coeficientes. Isto é, há uma passagem de informação do conteúdo de frequências vizinhas às bandas passantes ideais dos filtros.

A Figura 5(a) mostra que, para a função db(4), $W_1[f]$ possui componentes de todas as frequências anteriores à sua BP ideal ($[f_s/4; f_s/2]$). Além disso, considerando a TWPDR (Figura 6(a)), houve atenuação nos coeficientes entre os nós 1 e 6. Comprovou-se também que a adoção de wavelets mais longas propiciou melhores resultados, conforme ilustrado nas Figuras 5(b) e 5(c) para a TWDR, e 6(b) e 6(c) para a TWPDR. Entretanto, o efeito do vazamento de energia para as diferentes faixas de frequência não pode ser desprezado.

Para as funções db(40) e db(90), o vazamento de energia ocorreu predominantemente nas frequências vizinhas à BP ideal de cada filtro, diferentemente da wavelet db(4), cujo espectro foi afetado em todas as frequências. Portanto,

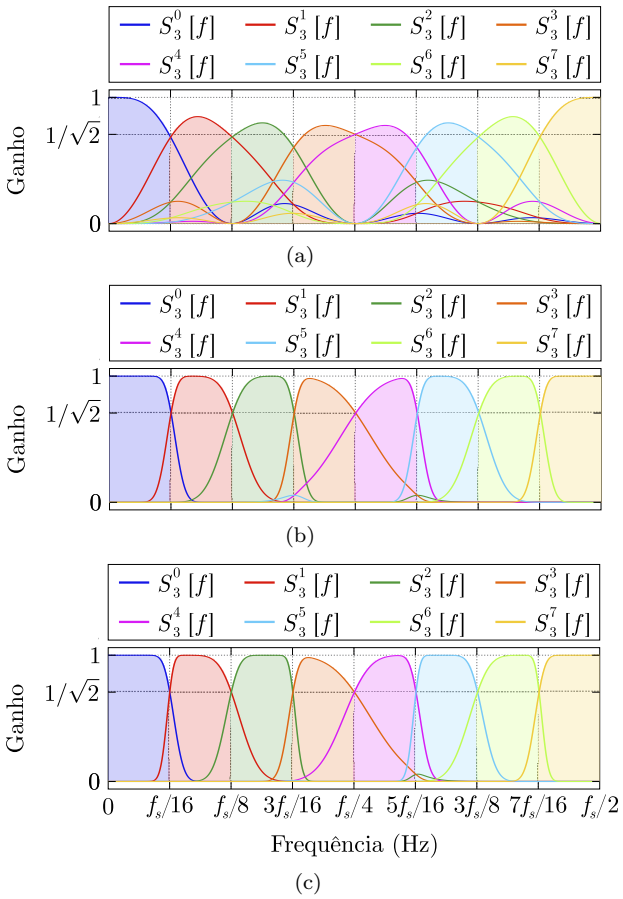



Figura 6. Resposta em frequência dos filtros escala e wavelet para uma decomposição via TWPDR em três níveis: (a) db(4), (b) db(40) e (c) db(90).

mesmo utilizando diferentes wavelets, desde uma mais curta com $L = 4$ até uma longa com $L = 90$, a resposta em frequência dos filtros difere da resposta ideal. Isto é, até mesmo em wavelets com elevada quantidade de coeficientes, as operações de filtragem efetuadas pela TWDR e pela TWPDR podem acarretar erros na representação do conteúdo em frequência de sinais.

### *4.2 Energia dos coeficientes escala e wavelet*

*Sinal A* Nas Tabelas 1 e 2 são apresentadas as distribuições de energia dos coeficientes da TWDR e da TWPDR, respectivamente. A análise destas tabelas evidencia que o aumento no valor de $L$ da função wavelet propiciou uma distribuição de energia do sinal mais fidedigna. Destaca-se a função db(4), que apresentou uma concentração de 5,78% para o coeficiente $w_2[n]$, e uma concentração de 5,35% para $s_3^2[n]$ e $s_3^5[n]$, cujos valores ideais são nulos.

Tabela 1. Sinal A: Distribuição de energia (TWDR).

| **Função** | $\xi_{s_3}$ (%) | $\xi_{w_3}$ (%) | $\xi_{w_2}$ (%) | $\xi_{w_1}$ (%) |
|---|---|---|---|---|
| Ideal | 25 | 25 | 0 | 50 |
| db(4) | 24,57 | 19,65 | 5,78 | 50,00 |
| db(40) | 25,00 | 24,84 | 0,16 | 50,00 |
| db(90) | 24,99 | 24,99 | 0,01 | 50,01 |

Nas Figuras 7 e 8 são ilustrados os espectros de frequências dos coeficientes escala e wavelet para o sinal A obtidos via TWDR e TWPDR, respectivamente. A partir destas Figuras, constatou-se que a função db(4) apresentou uma menor atenuação nas componentes de frequência fora da BP ideal dos filtros. Considerando a função db(4), observa-se que, para todos os coeficientes, houve uma intensificação do espectro nas componentes de frequência presentes no sinal (60, 180, 780 e 900 Hz). Este efeito ocorreu de modo menos significativo para as funções db(40) e db(90), exceto para a componente de 180 Hz, conforme Figuras 7(c) e 8(c).

Tabela 2. Sinal A: Distribuição de energia (TWPDR).

| **Função** | $\xi$ (%) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\xi_{s_3^0}$ | $\xi_{s_3^1}$ | $\xi_{s_3^2}$ | $\xi_{s_3^3}$ | $\xi_{s_3^4}$ | $\xi_{s_3^5}$ | $\xi_{s_3^6}$ | $\xi_{s_3^7}$ |
| Ideal | 25 | 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25 | 25 |
| db(4) | 24,57 | 19,65 | 5,35 | 0,43 | 0,43 | 5,35 | 19,65 | 24,57 |
| db(40) | 25,00 | 24,84 | 0,15 | 0,00 | 0,00 | 0,15 | 24,84 | 25,00 |
| db(90) | 25,00 | 25,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 25,00 | 25,00 |

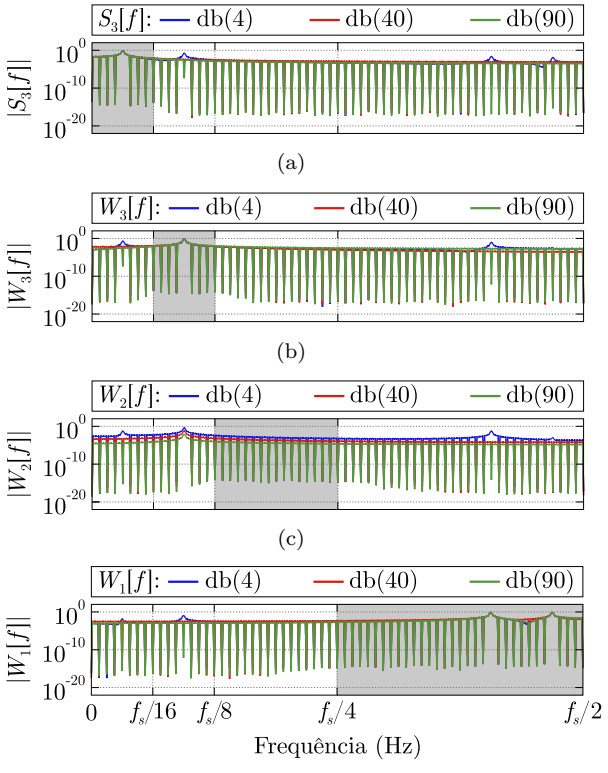



Figura 7. Sinal A: Espectro de frequências dos coeficientes escala e wavelet: (a) $S_3[f]$, (b) $W_3[f]$, (c) $W_2[f]$ e (d) $W_1[f]$ (em que ■ representa a BP ideal).

Nas Tabelas 3 e 4 são apresentados os percentuais de vazamento de energia de cada coeficiente da TWDR e da TWPDR, respectivamente. Conforme esperado, por não haver nenhum componente na faixa de frequências englobada por $w_2[n]$, $s_3^2[n]$, $s_3^3[n]$, $s_3^4[n]$ e $s_3^5[n]$, os valores de $\beta$ correspondentes foram de quase 100%. Isto é, praticamente toda a energia contida nesses coeficientes originou-se de frequências vizinhas à sua BP ideal.

Além disso, as funções db(40) e db(90) propiciaram um menor vazamento de energia em seus coeficientes, pois, para essas funções, os valores de $\beta_{S_3}$, $\beta_{W_3}$ e $\beta_{W_1}$, para a TWDR, e $\beta_{S_3^0}$, $\beta_{S_3^1}$, $\beta_{S_3^6}$ e $\beta_{S_3^7}$, para a TWPDR, foram

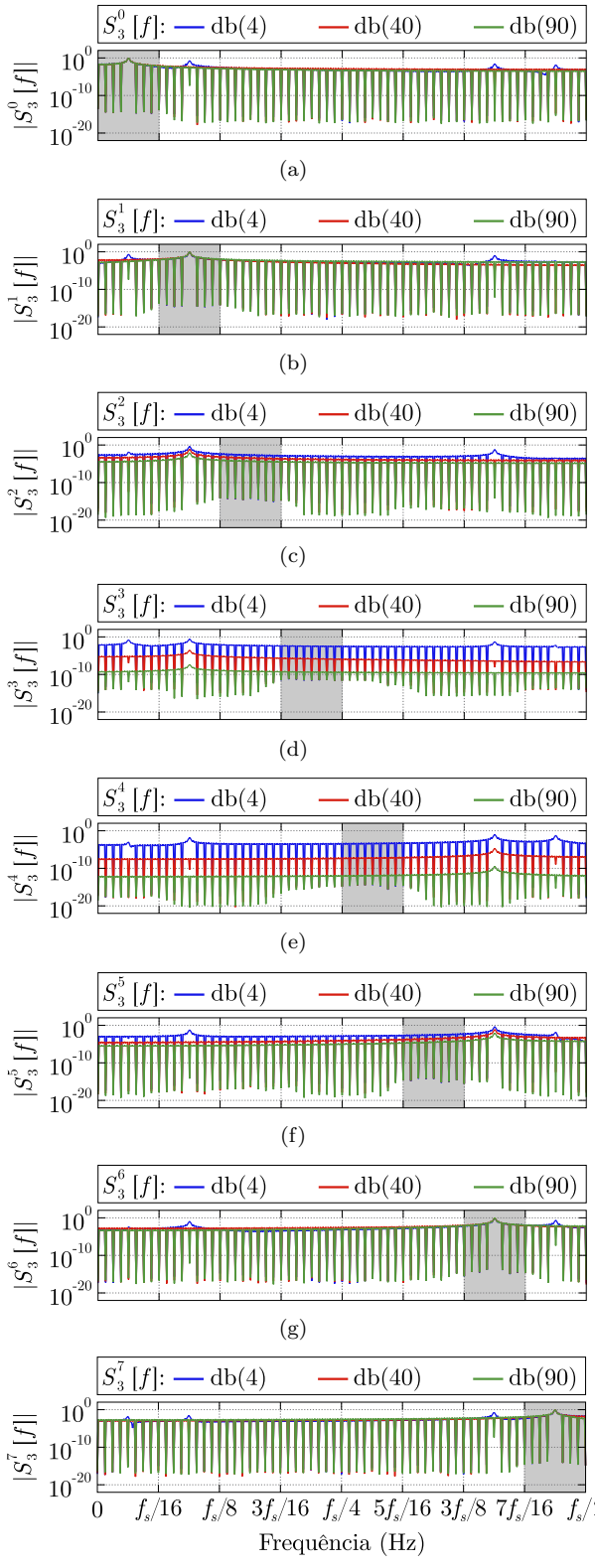



Figura 8. Sinal A: Espectro de frequências dos coeficientes escala e wavelet: (a) $S_3^0[f]$, (b) $S_3^1[f]$, (c) $S_3^2[f]$, (d) $S_3^3[f]$, (e) $S_3^4[f]$, (f) $S_3^5[f]$, (g) $S_3^6[f]$ e (h) $S_3^7[f]$ (em que ■ representa a BP ideal).

próximos de zero. Por outro lado, a adoção da função db(4) para a análise pode acarretar associações significativas de componentes de frequência incompatíveis com a BP ideal de cada coeficiente. Isto é, na prática, o vazamento espectral pode provocar uma má caracterização de componentes harmônicas.

Tabela 3. Sinal A: Vazamento de energia (TWDR).

| **Função** | $\beta_{S_3}$ (%) | $\beta_{W_3}$ (%) | $\beta_{W_2}$ (%) | $\beta_{W_1}$ (%) |
|---|---|---|---|---|
| db(4) | 4,59 | 9,61 | 99,88 | 1,06 |
| db(40) | 0,17 | 0,46 | 99,84 | 0,13 |
| db(90) | 0,07 | 0,51 | 99,72 | 0,01 |

Tabela 4. Sinal A: Vazamento de energia (TWPDR).

| **Função** | $\beta$ (%) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\beta_{S_3^0}$ | $\beta_{S_3^1}$ | $\beta_{S_3^2}$ | $\beta_{S_3^3}$ | $\beta_{S_3^4}$ | $\beta_{S_3^5}$ | $\beta_{S_3^6}$ | $\beta_{S_3^7}$ |
| db(4) | 4,60 | 9,61 | 99,84 | 99,93 | 99,95 | 99,76 | 9,58 | 4,66 |
| db(40) | 0,17 | 0,46 | 99,85 | 99,99 | 99,96 | 99,89 | 0,49 | 0,26 |
| db(90) | 0,07 | 0,51 | 99,80 | 99,95 | 99,94 | 99,89 | 0,46 | 0,59 |

*Sinal B* Nas Tabelas 5 e 6 são apresentadas as distribuições de energia dos coeficientes da TWDR e da TWPDR para o sinal B, respectivamente. Como se vê, a função que melhor representou o sinal foi a db(90), enquanto que a wavelet mais curta, db(4), apresentou a pior distribuição de energia. Embora a função db(90) tenha apresentado a melhor distribuição, os valores de $\xi_{w_1}$ e $\xi_{s_3^4}$ foram de aproximadamente 1%, os quais deveriam ser nulos.

Tabela 5. Sinal B: Distribuição de energia (TWDR).

| **Função** | $\xi_{s_3}$ (%) | $\xi_{w_3}$ (%) | $\xi_{w_2}$ (%) | $\xi_{w_1}$ (%) |
|---|---|---|---|---|
| Ideal | 33,33 | 0 | 66,67 | 0 |
| db(4) | 31,73 | 8,14 | 44,05 | 16,08 |
| db(40) | 33,33 | 0,21 | 62,86 | 3,60 |
| db(90) | 33,33 | 0,01 | 65,62 | 1,04 |

Tabela 6. Sinal B: Distribuição de energia (TWPDR).

| **Função** | $\xi$ (%) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\xi_{s_3^0}$ | $\xi_{s_3^1}$ | $\xi_{s_3^2}$ | $\xi_{s_3^3}$ | $\xi_{s_3^4}$ | $\xi_{s_3^5}$ | $\xi_{s_3^6}$ | $\xi_{s_3^7}$ |
| Ideal | 33,33 | 0 | 33,33 | 33,33 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| db(4) | 31,73 | 8,16 | 22,46 | 21,59 | 11,30 | 3,75 | 0,90 | 0,11 |
| db(40) | 33,33 | 0,21 | 33,12 | 29,74 | 3,59 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| db(90) | 33,33 | 0,00 | 33,33 | 32,29 | 1,04 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

O espectro de frequências dos coeficientes da TWDR e da TWPDR, considerando o sinal B, são apresentados nas Figuras 9 e 10, respectivamente. Conforme se vê, a função db(4) apresentou a menor atenuação das componentes de frequência fora da BP ideal dos filtros. Assim como observado no sinal B, essa função provocou uma intensificação do espectro em todas as frequências presentes no sinal (60, 300 e 420 Hz). Para a TWDR, as funções db(40) e db(90), apresentaram este efeito apenas para o coeficiente $w_1[n]$, cujas componentes de 300 e 420 Hz foram acentuadas no espectro de frequências, o que condiz com os valores não nulos de $\xi_{w_1}$ na Tabela 5. E, para a TWPDR, as funções db(40) e db(90) apresentaram comportamento similar ao da função db(4) para o coeficiente $s_3^4[n]$, conforme Figura

10(e), o que é consonante com os valores de $\xi_{s_3^4}$ indicados na Tabela 6.

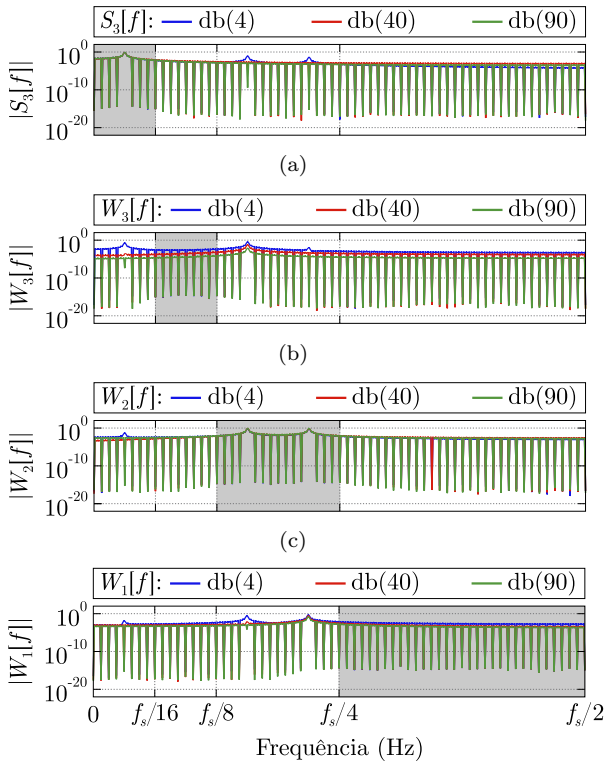



Figura 9. Sinal B: Espectro de frequências dos coeficientes escala e wavelet: (a) $S_3[f]$, (b) $W_3[f]$, (c) $W_2[f]$ e (d) $W_1[f]$ (em que ■ representa a BP ideal).

Nas Tabelas 7 e 8 são apresentados os percentuais de energia fora da faixa de frequências ideal de cada coeficiente para a TWDR e TWPDR, respectivamente. Conforme esperado, os valores de $\beta_{W_3}$, $\beta_{W_2}$, $\beta_{S_3^1}$, $\beta_{S_3^4}$, $\beta_{S_3^5}$, $\beta_{S_3^6}$ e $\beta_{S_3^7}$ apresentaram valores elevados, o que condiz com a ausência de componentes de frequência na faixa compreendida por estes coeficientes. Ademais, as funções wavelet mais longas acarretaram um menor vazamento de energia em seus coeficientes.

Por outro lado, independentemente da função wavelet adotada, os coeficientes $s_3[n]$ e $w_2[n]$ apresentaram vazamento de energia em seu espectro. Isto é, estes coeficientes podem caracterizar componentes de frequência que não estejam contidos em sua faixa de frequências ideal.

Além disso, o valor de $\beta_{S_3^7}$ obtido para a função db(90) foi o que mais se distanciou de 100%. Conforme Figura 10(h), para a função db(90), o espectro de $s_3^7[n]$ se acentuou na última faixa de frequências ([840; 960] Hz). Por outro lado, para as funções db(4) e db(40), a maior intensidade do espectro ocorreu nas proximidades de 300 Hz. Segundo Morsi and El-Hawary (2009), wavelets longas podem causar instabilidade no algoritmo de cálculo dos filtros escala e wavelet, o que pode explicar o baixo valor de $\beta_{S_3^7}$ para a função db(90).

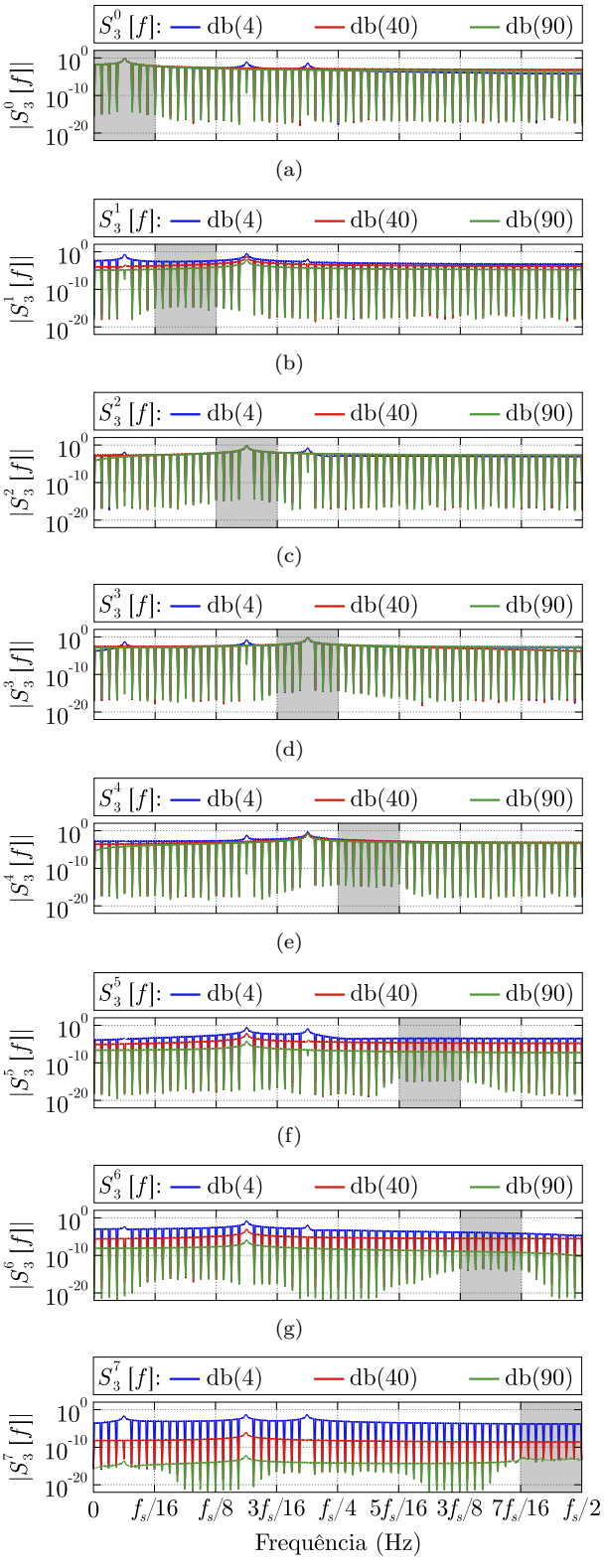



Figura 10. Sinal B: Espectro de frequências dos coeficientes escala e wavelet: (a) $S_3^0[f]$, (b) $S_3^1[f]$, (c) $S_3^2[f]$, (d) $S_3^3[f]$, (e) $S_3^4[f]$, (f) $S_3^5[f]$, (g) $S_3^6[f]$ e (h) $S_3^7[f]$ (em que ■ representa a BP ideal).

Tabela 7. Sinal B: Vazamento de energia (TWDR).

| **Função** | $\beta_{S_3}$ (%) | $\beta_{W_3}$ (%) | $\beta_{W_2}$ (%) | $\beta_{W_1}$ (%) |
|---|---|---|---|---|
| db(4) | 1,5393 | 99,8053 | 0,5780 | 99,6019 |
| db(40) | 0,1680 | 99,8801 | 0,2135 | 99,8163 |
| db(90) | 0,0732 | 99,8735 | 0,1848 | 99,7997 |

Tabela 8. Sinal B: Vazamento de energia (TWPDR).

| **Função** | $\beta$ (%) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\beta_{S_3^0}$ | $\beta_{S_3^1}$ | $\beta_{S_3^2}$ | $\beta_{S_3^3}$ | $\beta_{S_3^4}$ | $\beta_{S_3^5}$ | $\beta_{S_3^6}$ | $\beta_{S_3^7}$ |
| db(4) | 1,54 | 99,80 | 5,97 | 7,13 | 99,87 | 99,99 | 100,00 | 99,99 |
| db(40) | 0,17 | 99,88 | 0,50 | 0,50 | 99,78 | 99,96 | 99,98 | 99,99 |
| db(90) | 0,07 | 99,87 | 0,50 | 0,50 | 99,77 | 99,99 | 100,00 | 79,64 |

## 5. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um estudo sobre a distribuição de energia da decomposição efetuada pela TWDR e pela TWPDR em dois sinais de teste considerando funções wavelet da família Daubechies. Avaliou-se a resposta em frequência dos filtros escala e wavelet baseados nas funções db(4), db(40) e db(90). Adicionalmente, analisou-se o vazamento de energia que ocorre na decomposição via TWDR e TWPDR.

A resposta em frequência dos filtros escala e wavelet evidenciou a ocorrência de um vazamento de energia no processo de filtragem. Embora as wavelets mais longas tenham propiciado melhores resultados, o efeito do vazamento de energia pode provocar erros na representação dos coeficientes da TWDR e da TWPDR. Isto é, o vazamento no espectro pode reverberar, por exemplo, em má representação da amplitude de uma componente do sinal ou da energia de um coeficiente.

Para os dois sinais de teste, verificou-se que a distribuição de energia dos coeficientes foi mais fidedigna para funções wavelet mais longas, isto é, a função db(90) apresentou os melhores resultados, enquanto a função db(4) possuiu o pior desempenho. De modo geral, o aumento do número de coeficientes da função wavelet propiciou uma melhor representação do espectro de energia do sinal.

A análise do espectro de frequências dos coeficientes da TWDR e da TWPDR apontou que a função db(4) apresenta menor atenuação das componentes de frequência situadas fora da faixa de frequências ideal de cada coeficiente. Embora as funções db(40) e db(90) tenham apresentado resultados superiores aos da função db(4), o seu espectro apresentou um vazamento de energia para frequências fora de sua BP ideal.

Destarte, considerando a família Daubechies, o processamento efetuado pela TWDR e TWPDR pode acarretar em um vazamento de energia nos coeficientes escala e wavelet. Isto é, a depender da wavelet adotada, determinado coeficiente pode representar componentes de frequências que estejam situadas além de sua BP ideal.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande.

## REFERÊNCIAS

Alves, D.K., Costa, F.B., de A. Ribeiro, R.L., de Sousa Neto, C.M., and de O. A. Rocha, T. (2017). Real-time power measurement using the maximal overlap discrete wavelet-packet transform. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64, 3177–3187. doi:10.1109/TIE.2016.2637304.

Barros, J. and Diego, R.I. (2008). Analysis of harmonics in power systems using the wavelet-packet transform. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 57, 63–69. doi:10.1109/tim.2007.910101.

Burrus, C.S., Gopinath, R.A., and Guo, H. (1998). *Introduction to wavelets and wavelet transforms: a primer*. Prentice Hall, 1 edition.

Daubechies, I. (1992). *Ten lectures on wavelets*. CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics 61. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1 edition.

Dugan, R.C., McGranaghan, M.F., Santoso, S., and Beaty, H.W. (2004). *Electrical Power Systems Quality*. McGraw-Hill, 2 edition.

Mallat, S.G. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7), 674–693. doi:10.1109/34.192463.

Mallat, S.G. (2008). *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*. Academic Press, 3 edition.

Morsi, W.G. and El-Hawary, M.E. (2008). The most suitable mother wavelet for steady-state power system distorted waveforms. In *2008 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*. IEEE, Niagara Falls, Canada. doi:10.1109/ccece.2008.4564487.

Morsi, W.G. and El-Hawary, M.E. (2009). A new reactive, distortion and non-active power measurement method for nonstationary waveforms using wavelet packet transform. *Electric Power Systems Research*, 79, 1408–1415. doi:10.1016/j.epsr.2009.04.018.

Oppenheim, A.V. and Schafer, R.W. (2009). *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, 3 edition.

Peng, Z.K., Jackson, M.R., Rongong, J.A., Chu, F., and Parkin, R. (2009). On the energy leakage of discrete wavelet transform. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23, 330–343. doi:10.1016/j.ymssp.2008.05.014.

Percival, D.B. and Walden, A.T. (2000). *Wavelet methods for time series analysis*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 1 edition.

Santoso, S., Powers, E.J., Grady, W.M., and Hofmann, P. (1996). Power quality assessment via wavelet transform analysis. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 11, 924–930. doi:10.1109/61.489353.

Tarasiuk, T. (2004). Hybrid wavelet-fourier spectrum analysis. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 19, 957–964. doi:10.1109/tpwrd.2004.824398.

Wilkinson, W.A. and Cox, M.D. (1996). Discrete wavelet analysis of power system transients. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11, 2038–2044. doi:10.1109/59.544682.