

# Estabilidade Entrada-Estado de Sistemas Discretos no tempo a Parâmetros Lineares Variantes e Sujeitos a Atuadores Saturantes<sup>\*</sup>

Lucas A. L. Oliveira<sup>\*</sup> Marcus V. C. Barbosa<sup>\*\*</sup>  
Luís F. P. Silva<sup>\*\*</sup> Valter J. S. Leite<sup>\*,\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica  
UFSJ/CEFET-MG  
CEFET-MG, Av. Amazonas 7675, Belo Horizonte, MG, Brasil  
<sup>\*\*</sup> Departamento de Engenharia Mecatrônica/CEFET-MG  
Campus Divinópolis, R. Álvares Azevedo, 400, MG, Brasil

**Abstract:** This work investigates the input-to-state stabilization (ISS) of linear parameter varying (LPV) discrete-time systems subject to saturating actuators. Moreover, the system is affected by energy-bounded disturbance signals. The proposed convex conditions, formulated in terms of linear matrix inequalities (LMIs), allows the synthesis of state feedback controllers depending linearly on the time-varying parameters. Therefore, the proposed control design yields the local and poly-quadratic stability of the system for a given set of initial conditions and energy disturbance signals. The approach is based on the application of the generalized sector condition to handle the saturating actuators and on previous results from the literature that extends the polyquadratic stability by allowing parametric dependence of the input matrix. Examples illustrate the proposal by means of numerical simulations and experimental tests.

**Resumo:** Este trabalho investiga a estabilização entrada-estado (ISS) de sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV) discretos no tempo sujeitos a atuadores saturantes. Além disso, o sistema é afetado por sinais de perturbação limitados em energia. As condições convexas propostas, formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs), permitem a síntese de controladores por realimentação de estados dependentes linearmente de parâmetros variantes no tempo. Portanto, o projeto de controle proposto proporciona a estabilização local e poliquadrática do sistema para um determinado conjunto de condições iniciais e sinais de perturbação limitados em energia. A proposta é baseada na aplicação da condição de setor generalizada para tratar os atuadores saturantes e em resultados anteriores da literatura que estendem a estabilização poliquadrática, permitindo a dependência de parâmetros na matriz de entrada. Exemplos ilustram a proposta por meio de simulações numéricas e testes experimentais.

*Keywords:* Linear parameter varying (LPV); Input-to-state stability (ISS); State feedback controller; Saturating actuators; Linear matrix inequalities (LMIs).

*Palavras-chaves:* Parâmetro linear variante; Estabilidade entrada-estado (ISS); Controlador por realimentação de estados; Atuadores saturantes; Desigualdades lineares matriciais (LMIs).

## 1. INTRODUÇÃO

A análise de estabilidade e a síntese de controladores de sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV, do inglês *Linear Parameter Varying*) têm sido muito investigadas nos estudos de sistemas de controle (Peixoto et al., 2020). A principal razão para esse interesse é que os modelos LPV podem representar com maior fidelidade a dinâmica de processos que possuem parâmetros cujos valores podem mudar no tempo ou com a condição de operação (Briat, 2015), ao mesmo tempo que mantêm uma representação matemática simples. Os sistemas LPV formam uma classe de processos e sistemas que podem ser representados por modelos de dinâmica linear cuja modelagem matemática é

linearmente dependente de parâmetros variantes no tempo (Rugh and Shamma, 2000). Exemplos de aplicações reais que são modeladas como sistemas LPV, são motores aeronáuticos (Yang et al., 2020), suspensão semi-ativa de veículos (Morato et al., 2019), dentre outros. A análise de estabilidade e o projetos de controladores para sistemas LPV geralmente baseiam-se na Teoria de Lyapunov, que se destaca por permitir formulações convexas em termos de desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequalities*). A vantagem das LMIs é a eficiência de resolução numérica e garantia de otimalidade de suas soluções (Boyd et al., 1994). Nesse contexto, os primeiros trabalhos presentes na literatura utilizam a estabilização quadrática o que pode, no entanto, levar a soluções conservadoras. Portanto, para melhorar os resultados alcançados, uma abordagem frequentemente encontrada na

<sup>\*</sup> Este trabalho foi financiado em parte pelo CEFET-MG e pelas agências CNPq (311208/2019-3) e FAPEMIG.

literatura trata da utilização de candidatas a funções de Lyapunov que sejam dependentes de parâmetros (Briat, 2015; Mohammadpour and Scherer, 2012; Hoffmann and Werner, 2015). Assim, a estabilização poliquadrática em sistemas discretos no tempo foi proposta por Daafouz and Bernussou (2001), e então, estendida por Pandey and de Oliveira (2017), de maneira que a matriz de entrada possa depender de parâmetros. Recentemente, esse tipo de abordagem foi usada no contexto de sistemas LPV para tratar os problemas de controle sob falhas (Quadros et al., 2020).

Um aspecto importante em aplicações práticas é a presença de saturação nos atuadores dos sistemas de controle, que se não for considerada nas condições de síntese do controlador pode causar perda de desempenho e até mesmo instabilidade nos sistemas de controle (Tarbouriech et al., 2011). Nesse contexto, é importante desenvolver condições para análise de estabilidade e síntese de controladores que considerem a saturação do sinal de controle. Além disso, é necessário estimar uma sub-região do espaço de estado do sistema, de forma a assegurar que toda trajetória iniciada nessa região convirja assintoticamente para o ponto de equilíbrio, em geral representado pela origem. No entanto, estabelecer essa estimativa é uma tarefa desafiadora por tratar-se de um conjunto que pode ser não-convexo e aberto em certas direções (Hu and Lin, 2001; Tarbouriech et al., 2011).

Outra dificuldade encontrada em sistemas físicos são os distúrbios externos ou sinais exógenos, que podem levar as trajetórias para fora da região de atração do ponto de equilíbrio de interesse, resultando em convergência assintótica para outros pontos de equilíbrio, na ocorrência de ciclos limites, ou ainda em trajetórias divergentes. Desse modo, é necessário investigar a estabilidade regional da origem, valendo-se, em geral, da teoria de estabilidade entrada-estado (ISS, do inglês *Input-to-state stability*), que permite avaliar a estabilidade regional de uma malha fechada na presença de sinais de perturbação admissíveis limitados em energia (Sontag and Wang, 1995).

Embora Daafouz and Bernussou (2001) e Pandey and de Oliveira (2017) investiguem a estabilização poliquadrática de sistemas LPV, estes não consideram os atuadores saturantes. Os autores em Figueiredo et al. (2019) propõem a estabilização local poliquadrática de sistemas LPV em tempo discreto com atuadores saturantes, porém sem considerar os efeitos que sinais exógenos podem causar na malha fechada, por exemplo levando a trajetória para fora da região de atração. Dessa forma, a principal contribuição deste trabalho é investigar a estabilização entrada-estado de sistemas LPV discretos no tempo sujeitos a atuadores saturantes e sinais exógenos limitados em energia. Um aspecto interessante da abordagem proposta, baseada na estabilidade poliquadrática, é que os parâmetros do sistema podem ter taxas de variação arbitrárias. Porém, essa abordagem é sabidamente menos conservadora que a estabilidade quadrática. Assim, as condições convexas propostas garantem a estabilização regional e poliquadrática do sistema para um conjunto de condições iniciais e sinais de perturbação limitados em energia. A proposta é demonstrada em um exemplo numérico da literatura e em testes experimentais em um processo não-linear representado por um modelo (*quasi*-)LPV.

**Notações:** O conjunto dos números reais é representado por  $\mathbb{R}$ , enquanto que  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  são, respectivamente, a matriz de dimensões  $n \times m$  com entradas reais e o vetor com  $n$  posições e entradas reais. O transposto de  $M$  é denotado por  $M^\top$ . Dadas duas matrizes quadradas de mesma dimensão,  $A > (\geq) B$  denota que os autovalores de  $(A - B)$  são maiores que (ou maiores ou iguais a) zero. As matrizes identidade e nula de dimensões adequadas são denotadas por  $I$  e  $\mathbf{0}$ , respectivamente. O símbolo  $\star$  representa um bloco diagonalmente simétrico em uma matriz quadrada e simétrica.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o sistema linear discreto no tempo com parâmetros variantes no tempo, sujeito a atuadores saturantes e perturbações limitadas em energia, descrito pelo modelo:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)\text{sat}(u_k) + B_w(\alpha_k)\omega_k, \quad (1)$$

em que  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$  o vetor das entradas de controle,  $\text{sat}(u_k)$  é a função de saturação que pode ser escrita por

$$\text{sat}(u_{k(r)}) = \text{sign}(u_{k(r)}) \min(|u_{k(r)}|, \rho_{(r)}), \quad r = 1, \dots, n_u,$$

em que  $\rho_{(r)} \in \mathbb{R}^{n_u}$  é o maior valor de sinal de controle que pode ser aplicado pelo  $r$ -ésimo atuador. O vetor  $\omega_k \in \mathbb{R}^{n_w}$  é composto por sinais de perturbação supostos quadraticamente somáveis, isto é,  $\omega \in \mathcal{W}$  em que:

$$\mathcal{W} = \{\omega_k \in \mathbb{R}^{n_w} : \|\omega_k\|_2^2 \leq \delta^{-1}\}, \quad (2)$$

com  $\|\omega_k\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^\top \omega_k}$  e  $\delta^{-1} \in \mathbb{R}_+$  representa a máxima energia dos sinais de perturbação. As matrizes  $A(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$  e  $B_w(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$  são variantes no tempo e pertencem ao politopo da combinação convexa de  $N$  vértices conhecidos:

$$M(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} M_i, \quad (3)$$

em que  $M$  pode ser substituído por  $A$ ,  $B$  e  $B_w$ . O vetor de parâmetros variantes no tempo é dado por  $\alpha_k$ , que pertence ao simplex unitário:

$$\Lambda = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}, \quad (4)$$

e, por hipótese, pode ser obtido em tempo real.

A lei de controle utilizada neste trabalho é a de realimentação de estado por um ganho LPV:

$$u_k = K(\alpha_k)x_k, \quad (5)$$

em que  $K(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  e satisfaz (3).

Devido à não-linearidade introduzida pela saturação do atuador, faz-se necessário determinar o conjunto de condições iniciais  $\mathcal{R}_A \subseteq \mathbb{R}^n$  de (1)–(5) que resultam em trajetórias que convergem assintoticamente para a origem. Em especial, para  $\omega_k \in \mathcal{W}$  com  $\delta \neq 0$ , deve-se determinar  $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_A$  de forma a assegurar que as trajetórias da malha fechada não deixam o conjunto  $\mathcal{R}_A$ . Para garantir a estabilidade regional na presença de sinais exógenos limitados em energia, considera-se a seguinte definição (Sontag, 2004):

**Definição 1.** Considere um escalar positivo  $\delta$  e uma sequência  $\omega_k \in \mathcal{W}$ . O sistema em malha fechada resultante (1)–(5) é considerado entrada-estado estável (ISS)

se para qualquer  $x_0 \in \mathcal{R}_0$  todas as trajetórias resultantes permanecem em  $\mathcal{R}_A$  para sinais de perturbação limitados em energia, para todo  $k \geq 0$ .

Em função das dificuldades na determinação de  $\mathcal{R}_A$ , tais como não-convexidade e eventualmente não ser limitada em certas direções (veja Tarbouriech et al. (2011)), buscase estimar  $\mathcal{R}_E \subseteq \mathcal{R}_A$  e  $\mathcal{R}_{E0} \subseteq \mathcal{R}_0$ , os maiores possíveis. Assim, define-se o seguinte problema para ser investigado:

**Problema 2.** Considere o sistema LPV discreto no tempo (1)–(4) sob com a ação da lei de controle (5). Determine os ganhos  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e estime as regiões  $\mathcal{R}_{E0} \subseteq \mathcal{R}_0$  e  $\mathcal{R}_E \subseteq \mathcal{R}_A$  que garantam, para todo  $\omega_k \in \mathcal{W}$ , a estabilidade entrada-estado do sistema (1) em malha fechada para todo  $\alpha_k \in \Lambda$ .

### 3. RESULTADOS AUXILIARES

Considerando a não-linearidade da saturação como uma função de zona morta,  $\psi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k)$ , pode-se reescrever o sistema de controle (1)–(5) como:

$$x_{k+1} = \mathcal{A}_{cl}(\alpha_k)x_k - B(\alpha_k)\psi(K(\alpha_k)x_k) + B_w(\alpha_k)\omega_k, \quad (6)$$

em que  $\mathcal{A}_{cl}(\alpha_k) = A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k)$ . Obtém-se então um sistema do tipo Lur'e em que  $\psi(\cdot)$  é uma não-linearidade confinada em um setor  $[0, 1]$ . Seguindo (Gomes da Silva Jr. and Tarbouriech, 2001), pode-se utilizar a condição de setor generalizada para tratar essa não-linearidade com o auxílio do conjunto  $\mathbb{S}$ , definido como:

$$\mathbb{S}(\rho) = \{x_k \in \mathbb{R}^n : |(K_{(r)}(\alpha_k) - G_{(r)}(\alpha_k))x_k| \leq \rho_{(r)}\}, \quad (7)$$

com  $r = 1, \dots, n_u$ , e em que a variável  $G_{(r)}(\alpha_k)$  gera um grau de liberdade, proporcionando resultados menos conservadores para a síntese dos ganhos do controlador.

Os resultados propostos neste trabalho são baseados na Teoria de Lyapunov. Portanto, uma candidata a função de Lyapunov  $V(x_k) : \mathcal{R}_A \rightarrow \mathbb{R}^+$  e  $V(0) = 0$ ,  $\forall \alpha_k \in \Lambda$ , deve satisfazer

- i)  $\beta_1 \|x_k\|^2 \leq V(x_k) \leq \beta_2 \|x_k\|^2$ ;
- ii)  $\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\beta_3 \|x_k\|^2 < 0$ ,

em que  $\beta_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , são escalares positivos (Vidyasagar, 1993), garantindo assim a estabilidade regional da malha fechada.

Se  $V(x_k)$  é uma função de Lyapunov, pode-se associar a ela o seguinte conjunto de nível:

$$\mathcal{L}_V(\eta) = \{x_k \in \mathbb{R}^n : V(x_k) \leq \eta^{-1}, \forall \alpha_k \in \Lambda\}, \quad (8)$$

com  $0 < \eta < \infty$ .

O lema a seguir, adaptado de (Klug et al., 2013), estabelece o confinamento das trajetórias do sistema em malha fechada (6) no conjunto de nível  $\mathcal{L}_V(\beta)$  e, assim, garantindo a sua estabilidade regional entrada-estado.

**Lema 3.** Considere que a função  $V(x_k)$  é uma função de Lyapunov,  $\alpha_k \in \Lambda$ ,  $\omega_k \in \mathcal{W}$  para um  $\delta > 0$  dado e algum  $\beta$  tal que  $\mathcal{L}_V(\beta) \subseteq \mathcal{R}_E \subseteq \mathcal{R}_A$ . Se para todo  $x_0 \in \mathcal{L}_V(\beta)$

$$\Delta V(x_k) - \omega_k^\top \omega_k < 0 \quad (9)$$

é verificado para as trajetórias do sistema (6), então

$$V(x_k) - V(x_0) - \sum_{i=0}^k \omega_i^\top \omega_i < 0, \forall k > 0. \quad (10)$$

Além disso,

1. para o sistema sem perturbação, isto é, para  $\omega_k = 0$ , para todo  $k \geq 0$ , o conjunto  $\mathcal{R}_E = \mathcal{L}_V(\eta) \subseteq \mathcal{R}_A$  é uma região de condições iniciais que assegura a estabilidade assintótica da origem;
2. para  $\omega_k \neq 0$  com  $\omega_k \in \mathcal{W}$ , as trajetórias do sistema de controle (1)–(5) não deixam o conjunto  $\mathcal{R}_E = \mathcal{L}_V(\eta) \subseteq \mathcal{R}_A$  para todo estado inicial pertencente ao conjunto  $\mathcal{R}_{E0} = \mathcal{L}_V(\beta) \subseteq \mathcal{R}_0$ , com  $\beta = (\eta^{-1} - \delta^{-1})^{-1}$ .

### 4. RESULTADOS PRINCIPAIS

A principal contribuição deste trabalho consiste em tratar a presença de sinais exógenos de perturbação limitados em energia em sistemas LPV discretos no tempo a partir da condição proposta por Figueiredo et al. (2019) para a estabilização poliquadrática (Daafouz and Bernussou, 2001; Pandey and de Oliveira, 2017). Adicionalmente, agrega-se a taxa de contratividade,  $\lambda \in (0, 1]$ , da função de Lyapunov como forma de imprimir algum desempenho à malha fechada. Portanto, o Teorema a seguir estabelece uma solução de estabilidade para o Problema 2, agregando o desempenho da malha fechada assegurado pela medida de  $\lambda$ -contratividade.

**Teorema 4.** Considere o sistema discreto no tempo descrito por (1)–(4) e um escalar  $\lambda \in (0, 1]$ . Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas  $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $X_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ ,  $Y_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ ,  $Z_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ ,  $W_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ , uma matriz diagonal definida positiva  $V \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ , e escalares reais positivos  $\eta$  e  $\delta$ , tais que as seguintes LMIs sejam verificadas:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & -W_i^\top & \mathbf{0} & X_i^\top A_i^\top & -L_i^\top \\ * & \text{He}(V) & \mathbf{0} & -V^\top B_i^\top & \mathbf{0} \\ * & * & I & B_{wi}^\top & \mathbf{0} \\ * & * & * & Q_j - R_{ij} & B_i Z_j - Y_j^\top \\ * & * & * & * & \text{He}(Z_j) \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} -\eta \rho_{(r)}^2 & L_{i(r)} - W_{i(r)} \\ * & Q_i - X_i - X_i^\top \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (12)$$

e

$$\delta - \eta \geq 0 \quad (13)$$

nas quais,  $M_{11} = X_i + X_i^\top - \lambda^{-1}Q_i$ ,  $R_{ij} = B_i Y_j + Y_j^\top B_i^\top$ , para todo  $i, j = 1, \dots, N$ , e  $r = 1, \dots, n_u$ . Então, os ganhos do sinal de controle (5) são calculados por:

$$K_i = L_i X_i^{-1} \quad (14)$$

e estabilizam regionalmente o sistema (1)–(4), garantindo que:

- (1) se  $\omega_k = 0$  para  $k \geq 0$ , então o conjunto  $\mathcal{R}_E = \mathcal{L}_V(\eta)$  é uma região de estabilidade assintótica do sistema de controle (1)–(5), para todo  $k \geq 0$ ;
- (2) para  $\omega_k \neq 0$  com  $\omega_k \in \mathcal{W}$ , as trajetórias do sistema (1) iniciadas em  $\mathcal{R}_{E0} = \mathcal{L}_V(\beta) \subseteq \mathcal{R}_0$ , com  $\beta = (\eta^{-1} - \delta^{-1})^{-1}$ , não deixam o conjunto  $\mathcal{R}_E = \mathcal{L}_V(\eta)$  para todo  $\alpha_k \in \Lambda$  e  $k > 0$ .

**Prova.** Adota-se que as LMIs em (11) sejam satisfeitas, o que assegura pelo bloco (1,1) a positividade de  $Q_i$  e a regularidade de  $X_i$ , e pelo bloco (2,2) a regularidade de  $V$ . Substitui-se  $L_i$  e  $W_i$  por  $K_i X_i$  e  $G_i X_i$ , respectivamente, em (11). Uma vez que  $(Q_i - X_i)^\top Q_i^{-1} (Q_i - X_i) \geq 0$  implica  $X_i^\top Q_i^{-1} X_i \geq X_i + X_i^\top - Q_i$ , pode-se, portanto, majorar o bloco (1,1) de (11). Pré e pós-multiplicando

a desigualdade resultante por  $\text{diag}\{X_i^{-\top}, I, I, I\}$  e sua transposta, respectivamente, substituindo  $P_i = Q_i^{-1}$ ,  $H_i = Z_i^{-\top}$  e  $F_i = P_i Y_i^\top H_i$ , e pré- e pós-multiplicando-se o resultado por  $\text{diag}\left\{I, V^{-\top}, I, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & H_j \\ P_j & F_j \end{bmatrix}\right\}$  e sua transposta, respectivamente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \lambda P_i & -G_i^\top V^{-1} & \mathbf{0} & -K_i^\top H_j^\top & A_i^\top P_j - K_i^\top F_j^\top \\ \star & \text{He}(V^{-1}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -B_i^\top P_j \\ \star & \star & I & \mathbf{0} & B_{wi}^\top P_j \\ \star & \star & \star & \text{He}(H_j) & B_i^\top P_j + F_j^\top \\ \star & \star & \star & \star & P_j \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (15)$$

Da não-singularidade de  $V$ , substitui-se  $S = V^{-1}$ , multiplica-se a desigualdade por  $\alpha_{k(i)}$ ,  $\alpha_{k+1(j)}$ ,  $\alpha \in \Lambda$ , e faz-se o somatório para  $i, j = 1 \dots, N$ . Em seguida, pré e pós-multiplicando a desigualdade resultante por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\alpha_{k+1})^{-1} \\ I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & K(\alpha_k)^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e sua transposta, aplica-se o complemento de Schur, obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} \lambda P(\alpha_k) & -G(\alpha_k)^\top S & \mathbf{0} \\ \star & 2S & \mathbf{0} \\ \star & \star & I \end{bmatrix} - \Phi^\top P(\alpha_{k+1}) \Phi > \mathbf{0} \quad (16)$$

em que  $\Phi = [A_{cl}(\alpha_k) \quad -B(\alpha_k) \quad B_{w}(\alpha_k)]$ . Pré e pós-multiplicando-se (16) pelo vetor  $[x_k^\top \quad \psi_k^\top \quad \omega_k^\top]$  e seu transposto, tem-se:

$$\begin{aligned} & x_{k+1}^\top P(\alpha_{k+1}) x_{k+1} - x_k^\top \lambda P(\alpha_k) x_k - \omega_k^\top \omega_k \\ & - 2\psi(K(\alpha_k)x_k)^\top S(\psi(K(\alpha_k)x_k) - G(\alpha_k)x_k) < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Suponha que  $x_k \in \mathbb{S}$  de forma a garantir que a condição de setor generalizada é verificada, isto é, que

$$\psi(K(\alpha_k)x_k)^\top S(\psi(K(\alpha_k)x_k) - G(\alpha_k)x_k) \leq 0.$$

Para maiores detalhes veja (Figueiredo et al., 2019). Dessa forma, tem-se que

$$x_{k+1}^\top P(\alpha_{k+1}) x_{k+1} - x_k^\top \lambda P(\alpha_k) x_k - \omega_k^\top \omega_k < 0$$

com  $\lambda \in (0, 1]$ , o que, pelo Lema 3, garante-se a estabilidade regional entrada-estado de (1)–(5).

Para garantir a conclusão obtida no parágrafo anterior, é necessário que  $x_k \in \mathbb{S}$ , o que é assegurado a partir da verificação da LMI (12). Portanto, substitui-se em (12)  $L_i$  por  $K_i X_i$ ,  $W_i$  por  $G_i X_i$ , majora-se o bloco (2,2):  $X_i^\top Q_i^{-1} X_i \geq X_i^\top + X_i - Q_i$ , pré e pós-multiplica-se o resultado por  $\text{diag}\{1, X_i^{-\top}\}$  e seu transposto, substitui-se  $Q_i^{-1} = P_i$  e, assim, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -\eta \rho_{(r)}^2 & K_{i(r)} - G_{i(r)} \\ \star & -P_i \end{bmatrix} \leq 0. \quad (18)$$

Então, multiplica-se (18) por  $\alpha_i$ , soma-se em  $i = 1, \dots, N$ , aplica-se o complemento de Schur e pré e pós-multiplica-se o resultado por  $x_k^\top$  e  $x_k$ , obtendo-se:

$$x_k^\top \Theta^\top (\eta \rho_{(r)}^2)^{-1} \Theta x_k - x_k^\top P(\alpha_k) x_k \leq 0, \quad (19)$$

em que  $\Theta = K_{(r)}(\alpha(k)) - G_{(r)}(\alpha(k))$  e  $r = 1, \dots, n_u$ . Se  $x_0$  é escolhido tal que  $x_0 \in \mathcal{L}_V(\eta)$ , então tem-se que  $x_k^\top P(\alpha_k) x_k \leq V(x_0) \leq \eta^{-1}$ . De (19), tem-se que

$$\rho_{(r)}^{-2} |\Theta x_k|^2 \leq \eta x_k^\top P(\alpha_k) x_k \leq \eta V(x_0) \leq 1.$$

Logo,  $|\Theta x_k|^2 \leq \rho_{(r)}^2$ , satisfazendo o conjunto  $\mathbb{S}(\rho)$  dado em (7) e assegurando a verificação da condição de setor. Assim, de acordo com o lema proposto em (Gomes da Silva Jr. and Tarbouriech, 2005), é verificada a convergência para a origem de qualquer trajetória do sistema em malha fechada iniciada em  $\mathcal{L}_V(\eta)$  para  $w_k = 0$ , concluindo-se a prova.

Observação 5. Se as condições do Teorema 4 são satisfeitas, então o problema de cômputo de  $\mathcal{L}_V(\eta)$  para todo  $\alpha_k \in \Lambda$  pode ser resolvido de forma equivalente, e portanto sem introdução de conservadorismo, usando:

$$\mathcal{L}_V(\eta) = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{E}(P_i, \eta) \quad (20)$$

with  $\mathcal{E}(P_i, \eta) = \{x_k \in \mathbb{R}^n; x_k^\top P_i x_k \leq \eta^{-1}\}$ . Este resultado pode ser visto em detalhes em (Jungers and Castelan, 2011).

#### 4.1 Procedimentos de otimização

As condições estabelecidas pelo Teorema 4 podem ser usadas em um procedimento de otimização para aumentar o tamanho das estimativas da região de atração como apresentado nos procedimentos a seguir:

*Maximização da Tolerância ao Distúrbio:* O objetivo da otimização é obter as matrizes de ganho de  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , para estados iniciais nulos, maximizando a energia admissível nos sinais  $\omega_k \in \mathcal{W}$ . Ou seja, obter ganhos  $K_i$  que permitem à malha fechada tolerar perturbações com o maior valor possível de  $\delta^{-1}$ . Esse objetivo pode ser alcançado a partir do seguinte procedimento de otimização:

$$\begin{cases} \min \delta \\ \text{sujeito a: LMIs (11), (12) e (13)} \\ i, j = 1, \dots, N \end{cases} \quad (21)$$

Um caso particular desta otimização é para  $x_0 = 0$  (sistema em equilíbrio), o que resulta em  $\delta^{-1} = \eta^{-1}$ . Assim, o procedimento 21 equivale a minimizar  $\eta$ , sujeito às LMIs (11) e (12).

*Maximização do Conjunto de Estados Iniciais Admissíveis:* Para o caso em que uma energia de perturbação ( $\delta^{-1}$ ) é dada, um objetivo de interesse é a obtenção de matrizes de ganho  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , que asseguram a estabilização regional da malha fechada para o maior conjunto possível de estados iniciais. O seguinte procedimento permite essa otimização:

$$\begin{cases} \min \eta \\ \text{sujeito a: LMIs (11), (12) e (13)} \\ i, j = 1, \dots, N \end{cases} \quad (22)$$

## 5. APLICAÇÕES

Nesta seção, o método proposto é avaliado em um exemplo numérico estudado na literatura e em um processo físico, com atuadores e sensores industriais. Na parte experimental, o sistema físico utilizado trata do controle de nível em um sistema de dois tanques acoplados, em que um deles apresenta uma não-linearidade. Assim, a utilização de um modelo LPV pode representar com fidelidade a dinâmica do processo, cujo atuador tem limitações de amplitude.

### 5.1 Exemplo numérico

Considere o sistema (1) com  $n = 3$ ,  $N = 2$ , e matrizes adaptadas de (Oliveira et al., 2009):

$$A_1 = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = 0.5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{w1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0,5 \\ 0 & -0,25 \end{bmatrix}, B_{w2} = \begin{bmatrix} 0 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Foi considerado o limite de saturação simétrico  $\rho = 1$  e  $\lambda = 1$ . Resolvendo o procedimento de otimização (21) para o sistema (23) em equilíbrio, com  $x_0 = 0$ , obtém-se os ganhos  $K_1 = [0,3826 \quad -0,5058 \quad 0,6104]$  e  $K_2 = [0,0840 \quad 0,4059 \quad 0,3933]$  e o valor de  $\eta^{-1} = 2,0309$ . O procedimento consiste em maximizar a tolerância ao distúrbio. A região obtida corresponde à estimação  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$  da região  $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$  quando a perturbação é nula. Os resultados obtidos também podem ser observados na Figura 1 em que são apresentados os conjuntos elipsoidais  $\mathcal{E}(P_1, \eta)$  (em verde) e  $\mathcal{E}(P_2, \eta)$  (em vermelho). Simulou-se a resposta da malha fechada para a aplicação de um sinal de perturbação com energia  $\delta^{-1} = 2,0309$  e estado inicial nulo ( $x_0 = \mathbf{0}$ ). As trajetórias dos estados são apresentadas pela linha azul, que convergem para a condição de equilíbrio e permanecem na região  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$  resultante.

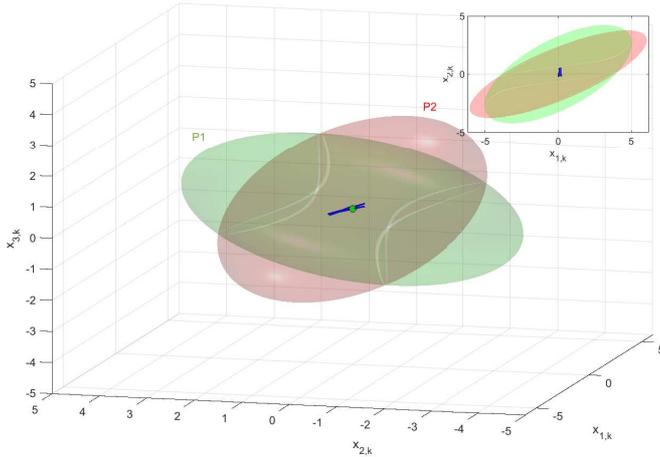


Figura 1. Estimativa da região de atração e as trajetórias dos estados do Exemplo 1.

Resolvendo o procedimento de otimização (22) e variando o valor de  $\delta^{-1}$ , ou seja, a máxima energia permitida para a entrada de perturbação, obtém-se os resultados mostrados na Figura 2, em que são apresentados os pontos em azul, que representam os valores de  $\beta^{-1}$  encontrados de acordo com a variação dos valores de  $\delta^{-1}$ . O  $\eta^{-1}$  que é maximizado no procedimento tem o valor de 4,1247 e não se altera com a variação de  $\delta^{-1}$ , sendo este portanto, o valor máximo que  $\beta^{-1}$  pode alcançar. Verifica-se que ao aumentar a energia admitida, diminui-se a região do conjunto de estados iniciais  $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\beta)$  de forma linear (afim).

### 5.2 Controle experimental de nível

A abordagem proposta foi implementada para o controle de nível em um processo de segunda ordem, não linear

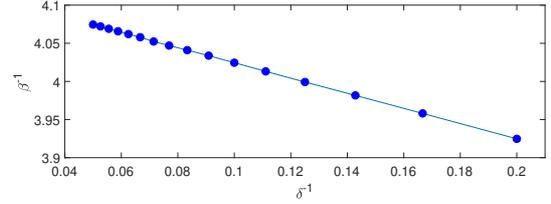


Figura 2. Variação do conjunto de estados iniciais de acordo com a variação da máxima energia admitida para o sinal de perturbação.

e com modelo *quasi*-LPV. O sistema consiste em dois tanques cilíndricos acoplados, TQ-01 e TQ-02, cada um com capacidade para 200l e altura máxima de 0,7m, e por atuadores e sensores industriais. O atuador do processo é uma motobomba de 1HP que alimenta o tanque TQ-02. O fluxo de saída do tanque TQ-01 vai para um reservatório de 400l onde o fluido é recirculado. O objetivo de controle é o nível do tanque TQ-01, que contém um sólido não linear de poliestireno. A Figura 3 mostra um diagrama simplificado do sistema.

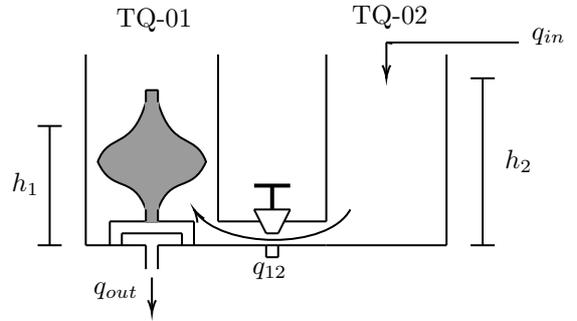


Figura 3. Diagrama do sistema de tanques (Figueiredo et al., 2020).

A modelagem física do processo foi feita pelo balanço de massas, sendo demonstrada detalhadamente em (Figueiredo et al., 2020). As matrizes do sistema discretizado com período de amostragem  $T_s = 5,2632s$  para o nível variando na faixa  $28cm \leq h_1 \leq 48cm$  são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9455 & 0,0540 \\ 0,0752 & 0,9057 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0,9466 & 0,0528 \\ 0,1130 & 0,8652 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_{w1} = \begin{bmatrix} 0,2779 \\ 0,0111 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, B_2 = B_{w2} = \begin{bmatrix} 0,2780 \\ 0,0167 \end{bmatrix} \times 10^{-3}. \quad (24)$$

O valor limite da saturação simétrica do atuador foi definido como  $\rho = 10\%$  a partir do valor de operação. A constante de contratividade foi reduzida a partir de 1 até que se atingisse uma região de atração compatível com o excursionamento desejado para o vetor de estado do sistema, obtendo-se  $\lambda = 0,986$ . Assim, foi aplicado o procedimento de otimização (21) com esse valor de  $\lambda$ , resultando nas matrizes de ganho  $K_1 = [-1,5540 \quad 0,2195] \times 10^3$  e  $K_2 = [-1,5653 \quad 0,2578] \times 10^3$ , e admitindo a presença de sinais exógenos limitados em energia de até  $\delta^{-1} = \eta^{-1} = 460,966$ .

O controlador foi implementado por meio de uma interface baseada em linguagem Python em conjunto com um computador Raspberry Pi 3 (Sousa et al., 2018) e

o sistema foi levado manualmente à condição de operação  $h_1(t) = 0,28m$ . Foram realizados uma simulação e um experimento mostrando a rejeição de um distúrbio introduzido no tanque TQ-01 sendo considerada a altura  $h_1(t) = 0,28m$  como o estado inicial. O sinal de perturbação com energia de  $\delta^{-1} = 460,966$  foi implementado como mostrado na parte de baixo da Figura 5. A Figura 4 mostra o comportamento previsto para o nível (linha laranja) e o resultado experimental (linha azul).

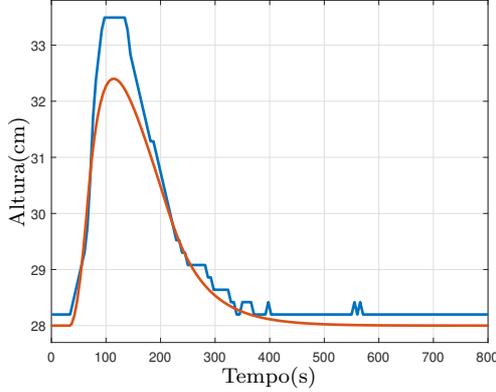


Figura 4. Nível do TQ-01 no experimento.

O sinal de controle (real) que atua para rejeitar a perturbação é mostrado na Figura 5 (acima), assim como o sinal de perturbação aplicado (abaixo). As linhas vermelhas pontilhadas representam o limite de saturação simétrico de  $\rho = 10\%$ . Como pode-se observar, o sinal controle atinge o nível de saturação definido, especialmente no momento em que a perturbação é aplicada.

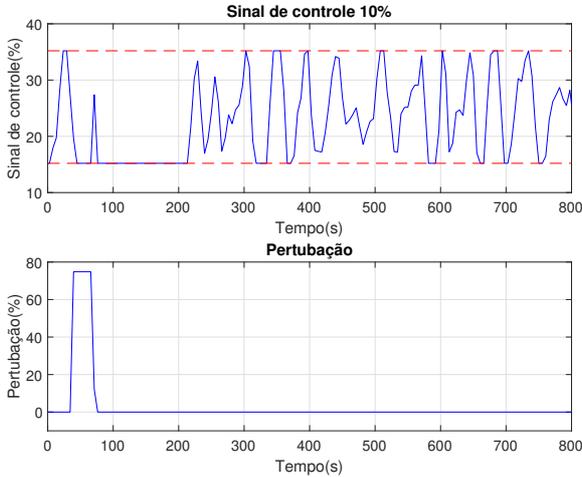


Figura 5. Sinal de controle e perturbação aplicada no experimento.

Para demonstrar que a trajetória do vetor de estado não deixa a região estimada  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ , a Figura 6 mostra o resultado alcançado no plano de fases. A interseção das elipsoides  $\mathcal{E}(P_1, \eta)$  (em azul) e  $\mathcal{E}(P_2, \eta)$  (em vermelho) representa a região estimada  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ . Observa-se que a trajetória do vetor de estado, representada pela linha verde se aproxima dos limites da região estimada, e retorna à origem, ilustrando a eficiência da condição proposta. Nota-se também que as elipses  $\mathcal{E}(P_1, \eta)$  e  $\mathcal{E}(P_2, \eta)$  estão bastante próximas, resultado decorrente da redução do valor de  $\lambda$ . Salienta-se

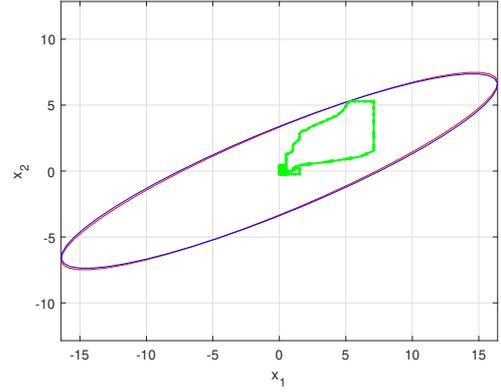


Figura 6. Região  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$  obtida e trajetória dos estados no sistema de tanques.

que as condições de estabilização entrada-estado propostas neste trabalho são baseadas na estabilização poliquadrática, o que permite taxas de variação arbitrariamente elevadas nos parâmetros do sistema.

## 6. CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta uma condição para a síntese de controladores por realimentação de estado para sistemas LPV em tempo discreto com atuadores saturantes e sujeitos a sinais exógenos de perturbação, limitados em energia. É utilizada a estabilização entrada-estado para assegurar a estabilização regional do sistema. Uma estimativa da região de atração é obtida por meio de um conjunto de nível da função de Lyapunov. Por ser baseado na abordagem da estabilidade poliquadrática, a estabilização proposta admite qualquer taxa de variação para os parâmetros do processo. A condição é ilustrada com um exemplo da literatura e por meio de uma aplicação experimental para o controle de nível de um processo não-linear representado por um modelo *quasi*-LPV, demonstrando a efetividade e viabilidade dos controladores sintetizados por meio da abordagem proposta. Por fim, propõe-se como continuidade deste trabalho a minimização do ganho  $\mathcal{L}_2$  e a comparação com outras alternativas à condição de Pandey and de Oliveira (2017).

## REFERÊNCIAS

- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, PA.
- Briat, C. (2015). *Linear parameter-varying and time-delay systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Daafouz, J. and Bernussou, J. (2001). Parameter dependent lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5), 355 – 359.
- Figueiredo, L.S., Lacerda, M.J., and Leite, V.J.S. (2019). Estabilização poliquadrática local de sistemas sujeitos a atuadores saturantes. *XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*.
- Figueiredo, L.S., Parreiras, T.A.R., Lacerda, M.J., and Leite, V.J.S. (2020). Design of LPV-PI-like controller with guaranteed performance for discrete-time systems under saturating acutators. *21st IFAC World Congress*.

- Gomes da Silva Jr., J.M. and Tarbouriech, S. (2001). Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls: An lmi-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(1), 119–125.
- Gomes da Silva Jr., J.M. and Tarbouriech, S. (2005). Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an lmi-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1), 106–111.
- Hoffmann, C. and Werner, H. (2015). A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(2), 416–433.
- Hu, T. and Lin, Z. (2001). *Control systems with actuator saturation: analysis and design*. Birkhäuser Basel.
- Jungers, M. and Castelan, E.B. (2011). Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators. *System & Control Letters*, 60(3), 169–173.
- Klug, M., Castelan, E.B., and Coutinho, D. (2013). Control of nonlinear discrete-time systems subject to energy bounded disturbances using local t-s fuzzy models. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, 7426–7431.
- Mohammadpour, J. and Scherer, C. (2012). *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. Springer.
- Morato, M.M., Nguyen, M.Q., Sename, O., and Dugard, L. (2019). Design of a fast real-time LPV model predictive control system for semi-active suspension control of a full vehicle. *Journal of the Franklin Institute*, 356(3), 1196 – 1224.
- Oliveira, R.C.L.F., de Oliveira, M.C., and Peres, P.L.D. (2009). Special time-varying lyapunov function for robust stability analysis of linear parameter varying systems with bounded parameter variation. *IET Control Theory & Applications*, 3(10), 1448 – 1461.
- Pandey, A.P. and de Oliveira, M.C. (2017). A new discrete-time stabilizability condition for linear parameter-varying systems. *Automatica*, 79, 214 – 217.
- Peixoto, M.L.C., Pessim, P.S.P., Lacerda, M.J., and Palhares, R.M. (2020). Stability and stabilization for LPV systems based on Lyapunov functions with non-monotonic terms. *Journal of the Franklin Institute*.
- Quadros, M.M., Bessa, I.V., Leite, V.J.S., and Palhares, R.M. (2020). Fault tolerant control for linear parameter varying systems: an improved robust virtual actuator and sensor approach. *ISA Transactions*.
- Rugh, W.J. and Shamma, J.S. (2000). Research on gain scheduling. *Automatica*, 36(10), 1401 – 1425.
- Sontag, E. and Wang, Y. (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24, 351–359.
- Sontag, E. (2004). *Nonlinear and Optimal Control Theory*, chapter Input to state stability: Basic concepts and results, 163–220. Springer.
- Sousa, A.C., Leite, V.J.S., and Rubio Scola, I. (2018). Affordable control platform with mpc application. *Studies in Informatics and Control*, 27(3), 265 – 274.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J.M., and Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, 2nd edition.
- Yang, D., Zong, G., and Karimi, H. (2020).  $\mathcal{H}_\infty$  refined antidisturbance control of switched LPV systems with application to aero-engine. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 67(4), 3180–3190.