

Metodologia de Controle LQRI *Fuzzy* Evolutivo via Alocação de Autoestruturas em Regiões Circulares Robustas com Especificações de Desempenho

Rodrigo Possidônio Noronha * Ginalber Luiz de Oliveira Serra **

* *Av. dos Portugueses, s/n, Bacanga, CEP:65001-970, Universidade Federal do Maranhão, MA, (e-mail: possidonio_789@hotmail.com)*

** *Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, CEP: 65030-005, Instituto Federal do Maranhão, MA (e-mail: ginalber@ifma.edu.br)*

Abstract: In this paper, a novel LQRI (Linear Quadratic Regulator with Integral Action) control methodology is proposed based on evolving TS (Takagi-Sugeno) fuzzy model. The control methodology is given by obtaining of an augmented state feedback gain matrix, which mutually satisfies the optimality conditions for the LQRI problem and the placement of eigenvalues in robust circular regions parameterized according to performance specifications, using a geometric approach.

Resumo: Neste artigo, é proposta uma nova metodologia de controle LQRI (*Linear Quadratic Regulator with Integral Action*) baseado em modelo *fuzzy* TS (Takagi-Sugeno) evolutivo. A metodologia de controle é dada pela obtenção de uma matriz de ganhos de realimentação de estados aumentada, que satisfaz mutuamente as condições de otimalidade para o problema do LQRI e a alocação de autovalores em regiões circulares robustas parametrizadas em função de especificações de desempenho, utilizando uma abordagem geométrica.

Keywords: Evolving Fuzzy Control; Optimal Control; Robust LQRI; Eigenvalue Regional Placement; Eigenvalue Robust Placement.

Palavras-chaves: Controle *Fuzzy* Evolutivo; Controle Ótimo; LQRI Robusto; Alocação Regional de Autovalores; Alocação Robusta de Autovalores.

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de metodologias de controle referentes ao problema do LQR com ação integral têm recebido notável atenção nos últimos anos. Em Mahmoud and Oyedeji (2018), o problema do LQRI baseado em multi-modelo, referente às diferentes velocidades de ventos, é utilizado para o controle de turbinas eólicas. Em Murari et al. (2019), é utilizado o problema do LQRI para executar o controle de potência fornecido à rede elétrica por um gerador de indução duplamente alimentado.

A vantagem da junção do problema do LQRI com a alocação de autovalores é devido a relação intrínseca entre a determinação das matrizes de ponderação do funcional de otimalidade e o posicionamento de autovalores, isto é, as matrizes de ponderação podem ser determinadas em função da alocação de autovalores. Dessa forma, por exemplo, as matrizes de ponderação podem ser obtidas em função de especificações de desempenho, tornando-se um projeto de controle multiobjetivo.

Ao invés do problema de controle multiobjetivo ser realizado em pontos específicos no plano complexo, pode-se realizá-lo em regiões circulares visando uma maior flexibi-

lidade na satisfação do critério multiobjetivo. Em Maamri et al. (2006), é proposta uma metodologia de alocação de autovalores em regiões circulares utilizando LMIs. Em Mansouri et al. (2008), é proposta uma metodologia de alocação robusta em regiões LMIs. Essas metodologias são úteis quando as regiões especificadas são assumidas convexas; porém, torna-se difícil lidar com restrições não lineares ou não convexas para várias descrições utilizando LMIs Zhai et al. (2015).

Uma desvantagem da junção do problema do LQRI com alocação de autovalores é a não consideração de incertezas nos modelos obtidos, fazendo com que o critério multiobjetivo não seja satisfeito; como proposta de solução, pode-se destacar a metodologia desenvolvida em dos Santos et al. (2018) que trata da alocação robusta de autovalores. Através da junção de métodos de alocação robusta com o problema do LQRI é possível realizar o desenvolvimento de metodologias promissoras, pois o critério multiobjetivo é satisfeito mesmo na presença de incertezas paramétricas

À vista disso, neste artigo, é proposta uma nova metodologia de controle referente ao problema do LQRI com alocação de autovalores, que é baseada em modelo *fuzzy* TS evolutivo. A originalidade desta proposta é dada pela obtenção de uma matriz de ganhos de realimentação de estados aumentada que garante mutuamente as condições

* O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil.

de otimalidade para o problema do LQRI e a alocação de autovalores, com robustez, em regiões circulares parametrizadas em função de especificações de desempenho, utilizando uma abordagem geométrica. Essas características permitem que a metodologia de controle seja satisfeita de forma robusta e flexível. Devido ao uso de sistemas *fuzzy* evolutivos, a estrutura de controle é obtida para se adaptar às mudanças do ambiente, modificando sua estrutura interna, com a criação, mesclagem ou exclusão de regras *fuzzy*. Portanto, a metodologia de controle proposta é apta a trabalhar em aplicações *on-line*, uma vez que não é somente adaptativa com ajuste automático dos parâmetros dos antecedentes e consequentes das regras *fuzzy*, mas é também evolutiva.

A organização do artigo é dada por: na SEÇÃO 2, é apresentada a metodologia de identificação fuzzy TS evolutivo. Na SEÇÃO 3, é apresentada a metodologia de controle proposta. Na SEÇÃO 4, são apresentados os resultados obtidos na validação da metodologia proposta em um sistema servo rotativo, na presença de incertezas paramétricas.

2. IDENTIFICAÇÃO FUZZY TS EVOLUTIVA NO ESPAÇO DE ESTADOS

Neste trabalho, o modelo *fuzzy* TS evolutivo é descrito pela i -ésima regra:

$$\mathcal{R}^i : \mathbf{SE}(\mathbf{z}_k \sim \mathbf{z}^i) \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (1)$$

em que, $i = 1, 2, \dots, R$ é a quantidade de regras *fuzzy*, $\mathbf{z}_k = [z_{1,k} \ z_{2,k} \ \dots \ z_{p+m,k}]^T$ é o vetor de variáveis de entrada do antecedente, \mathbf{z}^i é o ponto focal da i -ésima regra *fuzzy*. O consequente é composto pelas matrizes $\mathbf{A}^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}^i \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C}^i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{D}^i \in \mathbb{R}^{m \times p}$ referentes ao modelo local linear parametrizado em função da dinâmica representada pela i -ésima regra; $\mathbf{x}_k^i \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $\mathbf{y}_k^i \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de entrada. O grau de pertinência do vetor de dados \mathbf{z}_k associado à i -ésima regra *fuzzy* é determinado por uma função de pertinência gaussiana:

$$\mu_j^i(z_{j,k}) = e^{-\frac{(z_{j,k} - z_j^i)^2}{2(\varrho_{j,k}^i)^2}} \quad (2)$$

em que, $\varrho_{j,k}^i$ é a variância da gaussiana referente à j -ésima variável de entrada. Por fim, a saída do modelo *fuzzy* TS evolutivo é dada por:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{i=1}^R \gamma^i(\mathbf{z}_k) \mathbf{x}_{k+1}^i; \quad \hat{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^R \gamma^i(\mathbf{z}_k) \mathbf{y}_k^i \quad (3)$$

onde, $\gamma^i(\mathbf{z}_k) = \prod_{j=1}^{p+m} \mu_{j,k}^i(z_{j,k}) \left(\sum_{i=1}^R \prod_{j=1}^{p+m} \mu_{j,k}^i(z_{j,k}) \right)^{-1}$ é o grau de ativação normalizado da i -ésima regra *fuzzy*.

2.1 Estimação Paramétrica do Antecedente

A utilização de um algoritmo de agrupamento evolutivo associado a um sistema *fuzzy* tem como objetivo a determinação do número de regras e a parametrização dos antecedentes, devido ao particionamento do conjunto de dados. Neste trabalho, é utilizado o algoritmo proposto em Angelov (2010), intitulado *Evolving Takagi-Sugeno+*

(eTS+). Esse algoritmo baseia-se na métrica chamada densidade, utilizada para avaliar a capacidade de um vetor de dados \mathbf{z}_k ser o ponto focal (centro) de um novo grupo, dada por:

$$\mathcal{D}_k(\mathbf{z}_k) = (k-1) \left[(k-1) \left(\sum_{j=1}^{p+m} z_{j,k}^2 + 1 \right) + b_k - \vee_k \right]^{-1} \quad (4)$$

em que, $\vee_k = 2 \sum_{i=1}^{p+m} z_{j,k} c_{j,k}$, $\mathcal{D}_1(\mathbf{z}_1) = 1$, $b_k = b_{k-1} + \sum_{i=1}^{p+m} (z_{j,(k-1)})^2$, $b_1 = 0$, $c_{j,k} = c_{j,(k-1)} + z_{j,(k-1)}$ e $c_{j,1} = 0$.

A condição utilizada para selecionar um vetor de dados como novo ponto focal, denominada de Condição A, é dada por:

$$\mathbf{SE} \mathcal{D}_k(\mathbf{z}_k) > \max_{i=1}^R \mathcal{D}_k(\mathbf{z}^i) \text{ ou } \mathcal{D}_k(\mathbf{z}_k) < \min_{i=1}^R \mathcal{D}_k(\mathbf{z}^i) \\ \text{ENTÃO } R = R + 1 \quad (5)$$

Quando \mathbf{z}_k é um novo ponto focal, a sua densidade na próxima amostra é atualizada de forma recursiva, como a seguir:

$$\mathcal{D}_k(\mathbf{z}^i) = \frac{k-1}{(k-1) + (k-2) \left(\frac{1}{\mathcal{D}_{k-1}(\mathbf{z}^i)} - 1 \right) + \psi_k} \quad (6)$$

em que, $\psi_k = \sum_{j=1}^{p+m} (z_{j,k} - z_{j,(k-1)})^2$.

Quando um novo grupo é criado uma nova regra é definida para representar uma nova dinâmica contida nos novos vetores de dados. Se os grupos anteriormente criados se sobrepõem ao grupo recém criado, é necessário que haja a mesclagem com o novo grupo, segundo a condição B:

$$\mathbf{SE} \mu_j^i(z_{j,k}) > 0,3, \quad i = [1, R] \text{ e } j = 1, 2, \dots, p+m \\ \text{ENTÃO } R = R - 1 \quad (7)$$

Visando assegurar que apenas as regras que possuem alguma contribuição (utilidade) sejam mantidas e, que assim sejam minimizados os efeitos de *outliers*, é utilizada a condição C, dada por:

$$\mathbf{SE} U_k^i < \eta \text{ ENTÃO } R = R - 1 \quad (8)$$

em que, $\eta \in [0, 01, 0, 3]$; U_k^i é a utilidade da i -ésima regra na amostra k , que é dada por $U_k^i = (k - I^i)^{-1} \sum_{j=1}^k \gamma_j^i(\mathbf{z}_k)$, onde I^i é a amostra em que a i -ésima regra foi criada. Por fim, o valor da variância $\varrho_{j,k}^i$, também denominada de zona de influência ou raio, é atualizada conforme a seguir:

$$\varrho_{j,k}^i = \sqrt{\zeta (\varrho_{j,(k-1)}^i)^2 + (1 - \xi) \frac{1}{S_k^i} (z_{j,k} - z_j^i)^2} \quad (9)$$

em que, ξ é a constante de aprendizagem e S_k^i é a quantidade de vetores de dados \mathbf{z}_k pertencentes ao grupo que define a i -ésima regra *fuzzy*.

2.2 Estimação Recursiva dos Parâmetros do Consequente

Para a obtenção das matrizes \mathbf{A}^i , \mathbf{B}^i , \mathbf{C}^i e \mathbf{D}^i são necessários os parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema, conforme

apresentado em Torres and de Oliveira Serra (2018). Esses parâmetros são obtidos diretamente do conjunto de dados, através da inclusão de um observador de estados Juang (1994). O algoritmo é inicializado pela adição e subtração do termo $\bar{\mathbf{G}}^i \mathbf{y}_k^i$ no lado direito em (3), obtendo-se:

$$\mathbf{x}_{k+1}^i = \bar{\mathbf{A}}^i \mathbf{x}_k^i + \bar{\mathbf{B}}^i \mathbf{v}_k \quad (10)$$

em que,

$$\bar{\mathbf{A}}^i = \mathbf{A}^i + \bar{\mathbf{G}}^i \mathbf{C}^i; \quad \bar{\mathbf{B}}^i = \mathbf{B}^i + \bar{\mathbf{G}}^i \mathbf{D}^i; \quad \mathbf{v}_k^i = [\mathbf{u}_k \ \mathbf{y}_k^i]^T \quad (11)$$

em que, $\bar{\mathbf{G}}^i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ é o ganho do observador de estados da i -ésima regra *fuzzy*. Devido a isso, a saída estimada na i -ésima regra é dada por:

$$\hat{\mathbf{Y}}_k = \sum_{i=1}^R \Theta_k^i \Phi_k^i \mathbf{X}_k^i \quad (12)$$

em que, $\mathbf{X}_k^i = \text{diag}[\gamma^i(\mathbf{z}_{q+1}), \gamma^i(\mathbf{z}_{q+2}), \dots, \gamma^i(\mathbf{z}_k)]$ é a matriz de ponderação *fuzzy* contendo os graus de ativações normalizados; $\Phi_k^i = [\phi_{q+1}^i \ \phi_{q+2}^i \ \dots \ \phi_k^i]$ é a matriz de regressores com $\phi_k^i = [\mathbf{u}_k^T, (\mathbf{v}^i)^T_{k-1}, \dots, (\mathbf{v}^i)^T_{k-q}]^T$; $\Theta_k^i = [\mathbf{D}_k^i, \bar{\mathbf{M}}_{k_1}^i, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{k_q}^i]$ é a matriz de parâmetros de Markov *fuzzy* do observador, q é a quantidade de parâmetros de Markov *fuzzy* do observador.

Utilizando-se o método de mínimos quadrados ponderados *fuzzy* em batelada, pode-se calcular a matriz de parâmetros de Markov *fuzzy* do observador, dada por:

$$\Theta_k^i = \hat{\mathbf{Y}}_k \mathbf{X}_k^i (\Phi_k^i)^T [\Phi_k^i \mathbf{X}_k^i (\Phi_k^i)^T]^{-1} \quad (13)$$

em que, o subíndice k indica, nesse caso, que Θ_k^i foi estimada em batelada para k amostras. De forma recursiva, os parâmetros de Markov *fuzzy* do observador podem ser obtidos como a seguir:

$$\mathbf{G}_{k+1}^i = \frac{(\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{F}_k^i}{(\gamma^i(\mathbf{z}_{k+1}))^{-1} + (\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{F}_k^i \phi_{k+1}^i} \quad (14)$$

$$\Theta_{k+1}^i = \Theta_k^i + [\mathbf{y}_{k+1} - \Theta_k^i \phi_{k+1}^i] \mathbf{G}_{k+1}^i \quad (15)$$

$$\mathbf{F}_{k+1}^i = \mathbf{F}_k^i [\mathbf{I} - \phi_{k+1}^i \mathbf{G}_{k+1}^i] \quad (16)$$

onde, o vetor de ganhos \mathbf{G}_k^i é inicialmente nulo e a matriz de covariância do erro \mathbf{F}_k^i é inicializada por $\delta \mathbf{I}$, com $\delta = [10^2, 10^4]$.

Uma vez obtida a matriz de parâmetros de Markov *fuzzy* do observador, seja em batelada ou de forma recursiva, o próximo passo é referente a obtenção dos parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema, dados por:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_j^i &= \mathbf{C}^i (\bar{\mathbf{A}}^i)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}^i \\ \bar{\mathbf{M}}_j^i &= [\mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i + \bar{\mathbf{G}}^i \mathbf{C}^i)^{k-1} (\mathbf{B}^i + \\ &+ \bar{\mathbf{G}}^i \mathbf{D}^i), -\mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i + \bar{\mathbf{G}}^i \mathbf{C}^i)^{k-1} \bar{\mathbf{G}}^i] \\ \bar{\mathbf{M}}_j^i &\approx [\bar{\mathbf{M}}_j^{i1}, -\bar{\mathbf{M}}_j^{i2}] \end{aligned} \quad (17)$$

É importante notar que a matriz \mathbf{D}^i é dada pelo primeiro bloco de ordem $m \times p$, para $j = 0$, de Θ_k^i , ou seja:

$$\mathbf{D}^i = \bar{\mathbf{M}}_0^i \quad (18)$$

Por fim, os parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema são dados por:

$$\mathbf{M}_j^i = \bar{\mathbf{M}}_j^{i1} - \sum_{k=1}^j \bar{\mathbf{M}}_k^{i2} \mathbf{M}_{j-k}^i, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, q \quad (19)$$

$$\mathbf{M}_j^i = -\sum_{k=1}^q \bar{\mathbf{M}}_k^{i2} \mathbf{M}_{j-k}^i, \quad \text{para } j > q \quad (20)$$

2.3 Algoritmo de Realização de Autossistemas Fuzzy

Após obtidos os parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema, o passo seguinte é a obtenção da matriz generalizada de Hankel:

$$\mathbf{H}_{j-1}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_j^i & \mathbf{M}_{j+1}^i & \dots & \mathbf{M}_{j+\tau-1}^i \\ \mathbf{M}_{j+1}^i & \mathbf{M}_{j+2}^i & \dots & \mathbf{M}_{j+\tau}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{j+\nu-1}^i & \mathbf{M}_{j+\nu}^i & \dots & \mathbf{M}_{j+\nu+\tau-2}^i \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde, ν (número total de linhas de \mathbf{H}_{j-1}^i) e τ (número total de colunas de \mathbf{H}_{j-1}^i) são valores inteiros tal que $\nu m \leq \tau p$. Se o sistema é controlável e observável, pode-se afirmar que o *rank* máximo de \mathbf{H}_0^i é igual ao número de valores singulares não nulos, ou seja, a ordem mínima n de um sistema realizável.

Uma outra maneira de reescrever a matriz \mathbf{H}_0^i é através da decomposição em valores singulares:

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{L}^i \boldsymbol{\Sigma}^i (\mathbf{S}^i)^T \quad (22)$$

no qual, pode-se definir \mathbf{L}_n^i e \mathbf{S}_n^i como matrizes formadas pelas n primeiras colunas de \mathbf{L}^i e \mathbf{S}^i , respectivamente; dessa forma, a matriz \mathbf{H}_0^i pode ser novamente reescrita como $\mathbf{H}_0^i = \mathbf{L}_n^i \boldsymbol{\Sigma}_n^i (\mathbf{S}_n^i)^T$. Por fim, as matrizes do modelo local linear da i -ésima regra *fuzzy* são dadas por:

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{E}_n^T \mathbf{H}_1^i [\mathbf{E}_n^T \mathbf{H}_0^i]^{-1} \quad (23)$$

$$\mathbf{B}^i = \text{o primeiro bloco } n \times p \text{ de } \mathbf{H}_0^i \quad (24)$$

$$\mathbf{C}^i = \mathbf{E}_n^T \mathbf{E}_m \quad (25)$$

onde, $\mathbf{E}_n^T = [\mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_n \ \dots \ \mathbf{0}_n]$ e $\mathbf{E}_m^T = [\mathbf{I}_m \ \mathbf{0}_m \ \dots \ \mathbf{0}_m]$

3. METODOLOGIA DE CONTROLE LQRI FUZZY EVOLUTIVO

Seja um sistema de controle LQRI *fuzzy* TS evolutivo, descrito pela i -ésima regra *fuzzy*:

$$\mathcal{R}^i : \mathbf{SE}(\mathbf{z}_k \sim \mathbf{z}^i) \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}_k^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}_k^i \mathbf{u}_k^i \\ \mathbf{y}_k^i = \mathbf{C}_k^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}_k^i \mathbf{u}_k^i \\ \boldsymbol{\omega}_{k+1}^i = \boldsymbol{\omega}_k^i + \mathbf{r}_k - \mathbf{y}_k^i \end{cases} \quad (26)$$

onde, $\boldsymbol{\omega}_k^i$ é a variável de estado do integrador e \mathbf{r}_k é a saída desejada (referência). Considerando-se que o par $[\mathbf{A}^i \ \mathbf{B}^i]$ é controlável, então é possível obter uma função de controle (vetor de variáveis de controle) da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_k^i = \mathbf{K}_c^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{K}_I^i \boldsymbol{\omega}_k^i \quad (27)$$

no qual, a matriz de ganhos de realimentação de estados aumentada é dada por $\mathbf{K}^i = [\mathbf{K}_c^i \ \mathbf{K}_I^i]$, com \mathbf{K}_c^i que é o ganho do controlador e \mathbf{K}_I^i que é o ganho do integrador na amostra k . O objetivo da metodologia de controle LQRI *fuzzy* TS evolutivo proposta, descrita na Figura 1, é obter \mathbf{K}^i tal que, mutuamente, os autovalores em malha fechada sejam alocados em regiões circulares especificadas e que a função de controle \mathbf{u}_k^i seja o extremo do funcional de otimalidade do LQRI (28):

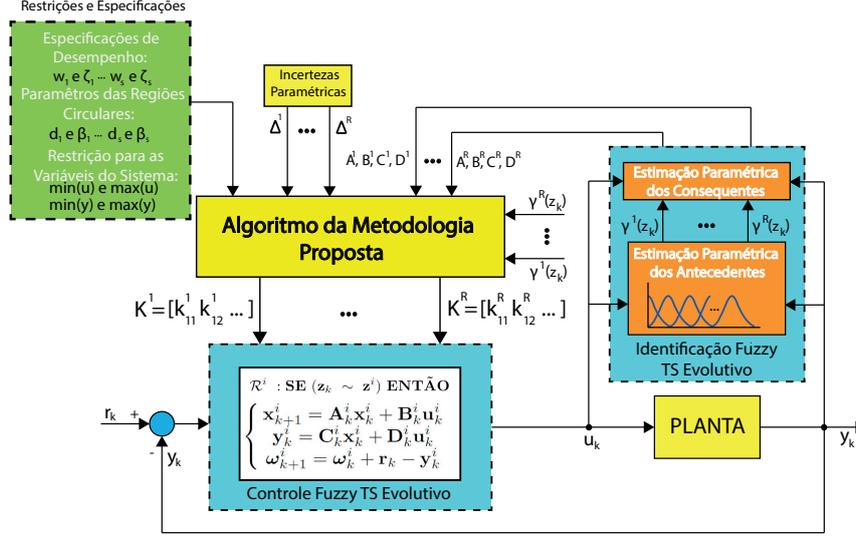


Figura 1. Diagrama de blocos da metodologia de controle proposta.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min/Max } J^i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(\varphi_k^i)^T \mathbf{Q}^i \varphi_k^i + (\mathbf{u}_k^i)^T \mathbf{R}^i \mathbf{u}_k^i] \\ \text{sujeito a :} \\ \varphi_{k+1}^i = f(\varphi_k^i, \mathbf{u}_k^i, k) \\ \min(\varphi) \leq \varphi_k^i \leq \max(\varphi) \\ \min(\mathbf{u}) \leq \mathbf{u}_k^i \leq \max(\mathbf{u}) \end{array} \right. \quad (28)$$

em que, φ_k^i é um vetor de variáveis de estados aumentado definido como $\varphi_k^i = [\mathbf{x}_k^i \ \boldsymbol{\omega}_k^i]^T$. As matrizes \mathbf{Q}^i e \mathbf{R}^i ponderam o vetor de variáveis de estados aumentado e de controle, respectivamente. A otimalidade do LQRI é garantida quando a matriz \mathbf{P}^i é definida positiva e consequentemente os autovalores em malha fechada estarão localizados no interior do círculo unitário. Devido a inclusão do integrador na malha de controle, a matriz \mathbf{A}^i e \mathbf{B}^i aumentadas são definidas como:

$$\mathbf{\Gamma}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^i & \mathbf{0}_{n \times m} \\ -\mathbf{C}^i & \mathbf{I}_{m \times m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Pi}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^i \\ -\mathbf{D}^i \end{bmatrix} \quad (29)$$

em que, $\mathbf{\Gamma}^i \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ é a matriz \mathbf{A}^i aumentada e $\mathbf{\Pi}^i \in \mathbb{R}^{(n+p) \times p}$ é a matriz \mathbf{B}^i aumentada. Dessa forma, os autovalores em malha fechada serão referentes à matriz $\mathbf{\Xi}^i = \mathbf{\Gamma}^i + \mathbf{\Pi}^i \mathbf{K}^i$.

De acordo com Noronha and Serra (2019), a matriz de ganhos de realimentação de estados aumentada que satisfaz o critério multiobjetivo da metodologia proposta é dada em função da matriz \mathbf{P}^i definida positiva, que é a solução da equação discreta algébrica matricial de Riccati:

$$\mathbf{P}^i = (\mathbf{\Gamma}^i)^T \mathbf{P}^i \mathbf{\Gamma}^i - (\mathbf{\Gamma}^i)^T \mathbf{P}^i \mathbf{\Pi}^i [\mathbf{R}^i + (\mathbf{\Pi}^i)^T \mathbf{P}^i \mathbf{\Pi}^i]^{-1} (\mathbf{\Pi}^i)^T \mathbf{P}^i \mathbf{\Gamma}^i + \mathbf{Q}^i \quad (30)$$

Seja $\mathbf{\Xi}^i = \mathbf{\Gamma}^i + \mathbf{\Pi}^i \mathbf{K}^i$, a matriz de estados aumentada em malha fechada. Substituindo-se $\mathbf{\Xi}^i$ em (30), obtém-se:

$$\mathbf{P}_{mf}^i = (\mathbf{\Xi}^i)^T \mathbf{P}_{mf}^i \mathbf{\Xi}^i - (\mathbf{K}^i)^T \mathbf{K}^i + \mathbf{Q}^i \quad (31)$$

que expressa (30) em função da matriz de estados aumentada em malha fechada. Por conveniência, nessa metodologia, definiu-se a matriz $\mathbf{R}^i = \mathbf{I}$. Com isso, a matriz de ganhos de realimentação de estados aumentada é reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^i = -(\mathbf{\Pi}^i)^T \mathbf{P}_{mf}^i \mathbf{\Xi}^i \quad (32)$$

Considerando-se que a matriz $\mathbf{\Xi}^i$ possa ser substituída por $\mathbf{U}^i \boldsymbol{\Lambda}^i (\mathbf{U}^i)^{-1}$, onde $\boldsymbol{\Lambda}^i$ é a matriz diagonal de autovalores desejados em malha fechada e \mathbf{U}^i é a matriz de autovetores associados. Substituindo-se $\mathbf{\Xi}^i$ em (31) e multiplicando-a a esquerda por $(\mathbf{U}^i)^T$ e a direita por \mathbf{U}^i , obtém-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}^i)^T \mathbf{P}_{mf}^i \mathbf{U}^i - \boldsymbol{\Lambda}^i (\mathbf{U}^i)^T \mathbf{P}_{mf}^i \mathbf{U}^i \boldsymbol{\Lambda}^i = \\ (\mathbf{U}^i)^T [\mathbf{Q}^i - (\mathbf{K}^i)^T \mathbf{K}^i] \mathbf{U}^i \end{aligned} \quad (33)$$

Fazendo-se $\mathbf{Q}^i - (\mathbf{K}^i)^T \mathbf{K}^i = (\mathbf{U}^i)^{-T} (\mathbf{U}^i)^{-1}$ e substituindo em (33), obtém-se:

$$(\mathbf{U}^i)^T \mathbf{P}_{mf}^i \mathbf{U}^i = \boldsymbol{\Lambda} (\mathbf{U}^i)^T \mathbf{P}_{mf}^i \mathbf{U}^i \boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I} \quad (34)$$

Como $\boldsymbol{\Lambda}$ e \mathbf{P}_{mf}^i são matrizes simétricas, então o termo $\boldsymbol{\Lambda} (\mathbf{U}^i)^T \mathbf{P}_{mf}^i \mathbf{U}^i \boldsymbol{\Lambda}$ em (34) pode ser reescrito como:

$$(\mathbf{U}^i)^T \mathbf{P}_{mf}^i \mathbf{U}^i \boldsymbol{\Lambda}^2 \quad (35)$$

portanto, (34) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(\mathbf{U}^i)^T \mathbf{P}_{mf}^i \mathbf{U}^i - (\mathbf{U}^i)^T \mathbf{P}_{mf}^i \mathbf{U}^i \boldsymbol{\Lambda}^2 = \mathbf{I} \quad (36)$$

Após manipulações algébricas em (36), a matriz \mathbf{P}_{mf}^i é obtida como a seguir:

$$\mathbf{P}_{mf}^i = (\mathbf{U}^i)^{-T} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda}^2)^{-1} (\mathbf{U}^i)^{-1} \quad (37)$$

Com a obtenção de \mathbf{P}_{mf}^i , a matriz \mathbf{K}^i é obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^i = -(\mathbf{\Pi}^i)^T (\mathbf{U}^i)^{-T} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda}^2)^{-1} \boldsymbol{\Lambda} (\mathbf{U}^i)^{-1} \quad (38)$$

Com a obtenção de \mathbf{K}^i , define-se a matriz \mathbf{Q}^i da seguinte forma:

$$\mathbf{Q}^i = \mathbf{P}_{mf}^i \mathbf{U}^i (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda}^2) (\mathbf{U}^i)^{-1} - (\mathbf{K}^i)^T \mathbf{K}^i \quad (39)$$

A continuação da metodologia é dada pela obtenção de \mathbf{U}^i . Seja a relação entre $\boldsymbol{\Lambda}$ e \mathbf{U}^i dada por $[\mathbf{\Gamma}^i + \mathbf{\Pi}^i \mathbf{K}^i] \mathbf{u}_j^i = \lambda_j^i \mathbf{u}_j^i$. Seja ainda $\boldsymbol{\psi}_j^i = \mathbf{k}^i \mathbf{u}_j^i$, então pode-se definir que:

$$\mathbf{K}^i = \boldsymbol{\Psi}^i (\mathbf{U}^i)^{-1} \quad (40)$$

em que,

$$\Psi^i = -(\Pi^i)^T (\mathbf{U}^i)^{-T} (\mathbf{I} - \Lambda^2)^{-1} \Lambda \quad (41)$$

Seja \mathbf{V}_j^i a matriz que define o autoespaço generalizado associado a cada λ_j^i , através da expressão $\mathbf{V}_j^i = (\lambda_j^i \mathbf{I} - \Gamma^i)^{-1} \Pi^i$. Então, utilizando a relação acima, chega-se a:

$$\mathbf{U}^i = [\mathbf{V}_1^i \psi_1^i, \mathbf{V}_2^i \psi_2^i, \dots, \mathbf{V}_{n+m}^i \psi_{n+m}^i] \quad (42)$$

em que, ψ_j^i pode ser definido como um vetor unitário.

3.1 Alocação Ótima Robusta de Autoestruturas em Regiões Circulares

Considerando-se que a metodologia de controle proposta seja realizada em uma união de regiões circulares $\Omega = \bigcup_{h=1}^s \Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$ para $h = 1, 2, \dots, s$. Os parâmetros de $\Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$ são definidos como: $d_h < 1$ que é a distância do eixo imaginário à borda da região circular, ρ_h é o raio da região circular e $\sigma_h = (\alpha_h, \pm\beta_h)$ é o centro da região circular, onde $\alpha_h = (\rho_h + d_h)$ para a região circular localizada no semicírculo direito e $\alpha_h = -(\rho_h + d_h)$ para a região circular localizada no semicírculo esquerdo.

Seja $\Delta^i \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ uma matriz de incertezas paramétricas. Considerando que o sistema esteja sujeito a presença de Δ^i , dessa forma, a matriz de estados aumentada em malha fechada é reescrita como $\Xi^i = \Gamma^i + \Pi^i \mathbf{K}^i + \Delta^i$. A condição para que n autovalores pertencentes à $\Xi^i = \Gamma^i + \Pi^i \mathbf{K}^i + \Delta^i$ permaneçam alocados na região h é dada por:

$$\Upsilon_h(\rho_h, d_h, \beta_h) \cap \bigcup_{j=1}^n \lambda_j(\Gamma^i + \Pi^i \mathbf{K}^i + \Delta^i) = \emptyset \quad (43)$$

se

$$\|\Delta^i\| < \min J_h^i = \frac{\min |\rho_h - g_j|}{\kappa(\mathbf{U}^i)} \quad (44)$$

onde, por definição, $\Upsilon_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$ é a borda da região circular h ; $g_j = |\sigma_h - \lambda_j|$; $\kappa(\mathbf{U}^i) = \|\mathbf{U}^i\| \|\mathbf{U}^i\|^{-1}$, J_h^i é a medida de robustez obtida na amostral k . A prova da condição de robustez pode ser vista em Zhai et al. (2015).

Para que os $n + m$ autovalores permaneçam em suas respectivas regiões circulares, é condição necessária que $\|\Delta^i\|$ seja inferior ao valor de J_h^i obtido para a região circular com menor medida de robustez, ou seja, $\min J_h^i$. Se a condição for satisfeita, é garantida a permanência dos autovalores alocados na região com menor valor de J_h^i assim como para os autovalores alocados nas regiões com maiores valores de J_h^i .

A função objetivo descrita em (44) é dada através da medida de sensibilidade da matriz de autovetores $\kappa(\mathbf{U}^i) = \|\mathbf{U}^i\| \|\mathbf{U}^i\|^{-1}$. Uma vez que $\kappa(\mathbf{U}^i)$ torna a função objetivo não-convexa, não é possível utilizar métodos tradicionais de otimização para maximizá-la. Como solução, nessa metodologia, é utilizado o algoritmo genético para maximizar o valor mínimo de J_h^i , ou seja, $\min J_h^i$, a cada atualização do modelo local linear da i -ésima regra fuzzy.

3.2 Regiões Circulares Parametrizadas em função de Especificações de Desempenho

Considerando-se que a região circular $\Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$ não seja parametrizada de forma arbitrária, mas que ρ_h , d_h e β_h sejam determinados de tal forma que os autovalores em malha fechada de $\Xi^i = \Gamma^i + \Pi^i \mathbf{K}^i$ tenham frequência

natural $w_j^i \geq w_h$ e fator de amortecimento $\zeta_j^i \geq \zeta_h$. Os parâmetros w_h e ζ_h são, respectivamente, os valores especificados para a frequência natural e fator de amortecimento utilizados, nessa metodologia, para parametrizar a região circular $\Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$. Dessa forma, $\Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$ é a região circular de factibilidade que garante as especificações de desempenho desejadas para autovalores alocados em seu interior.

As especificações ζ_h e w_h definem $z_h = x_h + jy_h \in C_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$, que é um autovalor definido pertencente à borda da região $\Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$. O autovalor z_h é localizado na interseção entre as duas regiões destacadas na Figura 2. Como o mapeamento de autovalores do tempo contínuo para o discreto é dado por $z = e^{T_a s}$, onde T_a é o período de amostragem e s é uma variável complexa no tempo contínuo, então $z_h = e^{T_a(-\zeta_h w_h \pm j w_h \sqrt{1 - \zeta_h^2})}$. Dessa forma, z_h pode ser determinado em função das especificações de desempenho w_h e ζ_h , com $|z_h| = e^{-T_a \zeta_h w_h}$ e $\theta_h = T_a w_h \sqrt{1 - \zeta_h^2}$, onde $w_h = \|\mathbf{T}_a^{-1} \ln(z_h)\|$ e $\zeta_h = \cos(\angle \mathbf{T}_a^{-1} \ln(z_h))$. Supondo-se que a região circular $\Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$ factível tenha o centro localizado no eixo real $\sigma_h = (\alpha_h, 0)$, onde $\beta_h = 0$. Nessa metodologia, a região de factibilidade $\Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$ é parametrizada considerando-se d_h e β_h constantes, sendo necessário determinar apenas o raio ρ_h . Dessa forma, a região circular $\Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$ factível pode ser representada na Figura 2, para ζ_h e w_h especificados.

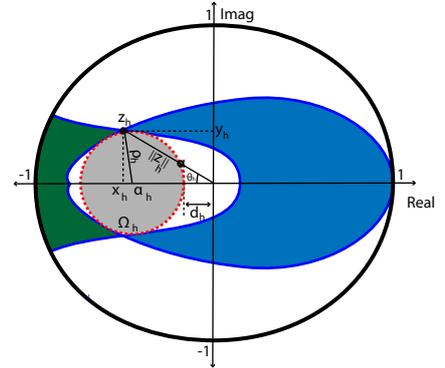


Figura 2. Região $\Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$ factível com $\sigma_h = (\alpha_h, 0)$ representada pela cor cinza para $\zeta_j \geq \zeta_h$ e $w_j \geq w_h$.

Por meio da Figura 2, supõe-se que para autovalores alocados no interior da região em azul há garantia que $\zeta_j^i \geq \zeta_h$, porém não se pode afirmar que $w_j^i \geq w_h$. Já para autovalores alocados no interior da região em verde supõe-se que há garantia que $w_j^i \geq w_h$, porém não se pode afirmar que $\zeta_j^i \geq \zeta_h$. O formato geométrico das regiões destacadas em verde e em azul é devido as especificações de desempenho ζ_h e w_h serem dadas em função do logaritmo natural Ogata et al. (1995). A região em branco formada pela interseção das regiões em verde e em azul é uma região de factibilidade, todavia determiná-la não é algo trivial. Nessa metodologia, é utilizada uma aproximação da região formada pela interseção das regiões em verde e em azul, que é dada por $\Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$. A parametrização de $\Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$ com $\sigma_h = (\alpha_h, 0)$ é iniciada pelo traçado da reta secante à região em cinza, com referência a origem

e z_h . A obtenção de ρ_h , é dada pela distância euclidiana entre z_h e σ_h :

$$\rho_h = \sqrt{(x_h - \alpha_h)^2 + (y_h)^2} \quad (45)$$

como $\alpha_h = d_h + \rho_h$, então:

$$\begin{aligned} (\rho_h)^2 &= \left[\sqrt{(x_h - d_h - \rho_h)^2 + (y_h)^2} \right]^2 \\ \rho_h &= (-x_h^2 - d_h^2 + 2x_h d_h - y_h^2)(-2x_h + 2d_h)^{-1} \end{aligned} \quad (46)$$

fazendo $y_h = x_h \operatorname{tg}(\theta_h)$, chega-se a:

$$\rho_h = [x_h(-x_h + 2d_h) - d_h^2 - x_h^2 \operatorname{tg}^2(\theta_h)](-2x_h + 2d_h)^{-1} \quad (47)$$

Para que se possa alocar autovalores com $\zeta_j^i \geq \zeta_h$ e $w_j^i \geq w_h$ no interior da região $\Omega_h(\rho_h, d_h, \beta_h)$, com $\sigma_h = (\alpha_h, 0)$, ρ_h deve satisfazer: $0 < \rho_h < 1$. Abaixo são apresentados os principais passos para a realização da metodologia de controle proposta:

Etapa de Treinamento:

- **Passo 1:** Realizar o algoritmo de agrupamento evolutivo, para o vetor de dados \mathbf{z}_k , referente às N_t amostras de treinamento.
- **Passo 2:** Obter as matrizes \mathbf{A}^i , \mathbf{B}^i , \mathbf{C}^i e \mathbf{D}^i , referentes ao modelo local linear de treinamento em batelada, da i -ésima regra *fuzzy*;
- **Passo 3:** Determinar ζ_h , w_h , d_h e β_h . Calcular ρ_h , utilizando (47);

Etapa Evolutiva:

- **Passo 4:** Inicializar a matriz $\mathbf{\Lambda}^i$ de autovalores, da seguinte forma:
$$\lambda_j = L_h \cos(\theta) + \alpha_h \quad (48)$$
 onde, $L_h = [0, \rho_h]$, $\theta = [0, 2\pi]$ e $j = 1, 2, \dots, n + m$.
- **Passo 5:** Obter o autoespaço generalizado \mathbf{V}_j^i . Obter a matriz de autovetores \mathbf{U}^i , utilizando (42);
- **Passo 6:** Obter \mathbf{P}_{mf}^i , utilizando (37). Obter \mathbf{K}^i , utilizando (39). Obter \mathbf{Q}^i , utilizando (40);
- **Passo 7:** Maximizar a função objetivo descrita em (44);
- **Passo 8:** Realizar o algoritmo de agrupamento evolutivo, para o vetor de dados \mathbf{z}_k ;
- **Passo 9:** Atualizar recursivamente as matrizes \mathbf{A}^i , \mathbf{B}^i , \mathbf{C}^i e \mathbf{D}^i referentes ao modelo local linear da i -ésima regra *fuzzy*.

4. RESULTADOS

Nesta seção, a metodologia de controle proposta é avaliada no sistema dinâmico Quanser servo rotativo monovariável¹, explorado em diversos trabalhos como, por exemplo, em Sendrescu and Bujgoi (2019). O sistema servo rotativo (Figura 3) é composto por um módulo de junta flexível rotativa com um braço rígido anexado ao eixo de um servomotor de corrente contínua. Além de anexado ao eixo do servomotor, o braço rígido é fixado à estrutura do sistema por meio de duas molas para permitir flexibilidade ao movimento de rotação, assemelhando-se a um braço robótico. A entrada do sistema é a tensão $u \in [-5 \text{ V}, 5 \text{ V}]$ aplicada no servomotor e a saída é o ângulo $\gamma \in [-10^\circ, 10^\circ]$ do braço rígido. O sistema servo rotativo é composto

pela plataforma de controle Quanser QUARC, o sistema de aquisição de dados Quanser Q2-USB, amplificador Quanser VoltPAQ-X1, planta Quanser SRV02, módulo de junta flexível Quanser e o *software* Quanser QUARC 2.5.

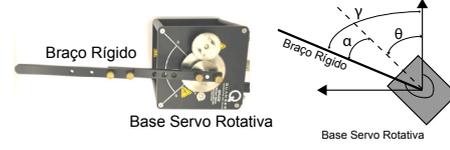


Figura 3. Vista superior e diagrama angular do sistema servo rotativo.

O modelo que descreve o comportamento dinâmico do sistema servo rotativo no contexto de estados no tempo contínuo é apresentado em Sendrescu and Bujgoi (2019), dado por: $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4]$ com $\mathbf{a}_1 = [0 \ 0 \ -61,63 \ 61,63]^T$, $\mathbf{a}_2 = [0 \ 0 \ 623,7 \ -1020]^T$, $\mathbf{a}_3 = [1 \ 0 \ -40,32 \ 40,32]^T$ e $\mathbf{a}_4 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$; $\mathbf{B} = [0 \ 0 \ -61,63 \ 61,63]^T$, $\mathbf{C} = [1 \ 1 \ 0 \ 0]$. Através do modelo no tempo contínuo do sistema servo rotativo pode-se obter o conjunto de dados de entrada e saída para identificação do modelo *fuzzy* TS monovariável de treinamento. O conjunto de dados de treinamento utilizado consiste em 400 amostras obtido com período de amostragem de 10 *ms*. Após obtido o conjunto de dados de treinamento é iniciada a etapa de treinamento com a execução do passo 1, que consiste na determinação das R regras e estimação paramétrica dos antecedentes para o vetor de dados $\mathbf{z}_k = [u_{k-1} \ y_{k-1}]^T$.

Os parâmetros definidos, por tentativa e erro, para o eTS+ foram: $\rho_{j,k}^i = 0,1$, $\eta = 0,25$ e $\xi = 0,5$. Após a determinação do número de regras (Figura 4) e parametrização dos antecedentes, é iniciado o passo 2 da etapa de treinamento; para identificação dos modelos locais lineares de treinamento das $R = 2$ regras, foram definidos os parâmetros, por tentativa e erro, para o algoritmo de realização de autossistemas: $q = 1$, $\nu = 40$ e $\tau = 50$. As métricas estatísticas obtidas para a saída estimada pela identificação do modelo *fuzzy* TS monovariável de treinamento são: NRMSE = 0,0212, VAF = 99,9671%, FIT = 98,1660%.

No passo 3, é feita a parametrização das regiões circulares em função de especificações de desempenho. Devido a ordem de $\mathbf{\Xi}^i$ ser igual a $n_{aum} = 3$, o posicionamento dos autovalores foi definido da seguinte forma: um autovalor real $\lambda_1 \in \Omega_1(\rho_1, d_1, \beta_1)$ com centro $\sigma_1 = (\alpha_1, j0)$, onde o autovalor z_1 é definido pelos parâmetros $d_1 = 0$, $\zeta_1 = 0,99$ e $w_1 = 140 \text{ rad/s}$, ou seja, $z_1 = 0,2452 + j0,0491$ e, através de (47) é obtido $\rho_1 = 0,1275$; um autovalor real $\lambda_2 \in \Omega_2(\rho_2, d_2, \beta_2)$ com centro $\sigma_2 = (\alpha_2, j0)$, onde o autovalor z_2 é definido pelos parâmetros $d_2 = 0,3$, $\zeta_2 = 0,99$ e $w_2 = 25 \text{ rad/s}$, ou seja, $z_2 = 0,7803 + j0,0275$ e, através de (47) é obtido $\rho_2 = 0,2409$; por fim, o último autovalor real $\lambda_3 \in \Omega_3(\rho_3, d_3, \beta_3)$ com centro $\sigma_3 = (\alpha_3, j0)$, onde o autovalor z_3 é definido pelos parâmetros $d_3 = 0,8$, $\zeta_3 = 0,99$ e $w_3 = 10 \text{ rad/s}$, ou seja, $z_3 = 0,9057 + j0,0128$ e, através de (47) é obtido $\rho_3 = 0,0536$.

Os resultados apresentados referentes à etapa evolutiva, são devidos à aplicação da metodologia de controle proposta ao modelo *fuzzy* TS evolutivo monovariável contendo incertezas paramétricas aditivas na matriz de estados aumentada em malha fechada $\mathbf{\Xi}^i = \mathbf{\Gamma}^i + \mathbf{\Pi}^i \mathbf{K}^i + \mathbf{\Delta}^i$. São analisados dois casos: $\|\mathbf{\Delta}^i\|$ menor do que a medida de

¹ O sistema servo rotativo é fabricado pela Quanser Consulting Inc.

robustez $\min J_h^i$ e $\|\Delta^i\|$ maior do que a medida de robustez $\min J_h^i$ obtida a cada amostra k , conforme apresentada na Figura (5). São aplicadas 800 matrizes de incertezas paramétricas Δ^i geradas através da distribuição normal, no qual cada matriz de incertezas paraméricas é introduzida na matriz de estados aumentada em malha fechada a cada amostra k , ou seja, a cada atualização recursiva do modelo *fuzzy* TS evolutivo monovariável.

Os parâmetros definidos para o algoritmo genético são: taxa de *crossover* $\mu_c = 90\%$, taxa de mutação $\mu_m = 1\%$, população com $N_p = 20$ indivíduos e o número de iterações $N = 20$. Na Figura 4, é apresentada a evolução do número de regras devido ao particionamento do vetor de dados \mathbf{z}_k contendo 1200 amostras. A evolução do número de regras à esquerda da linha vertical tracejada em vermelho é referente à etapa de treinamento e a evolução do número de regras à direita da linha vertical tracejada em vermelho é referente à etapa evolutiva; percebe-se que ao fim da etapa evolutiva o número total de regras *fuzzy* é $R = 2$.

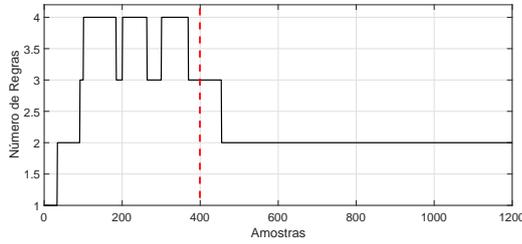


Figura 4. Evolução do número de regras *fuzzy*.

Nas Figuras 6 e 7, são apresentadas as evoluções temporais das variáveis controlada e de controle, respectivamente, para o caso em que $\|\Delta^i\| < \min J_h^i$. Através da Figura 8, percebe-se que os autovalores estão alocados no interior das regiões circulares especificadas, assim satisfazendo o critério multiobjetivo, conforme pode ser visto na Figura 9, no qual todos os autovalores obtiveram a frequência natural $w_j^i \geq w_h$. É importante notar que os valores referentes ao fator de amortecimento ζ_j^i não são apresentados, uma vez que todos os autovalores estão localizados no eixo real, de acordo com a Figura 8.

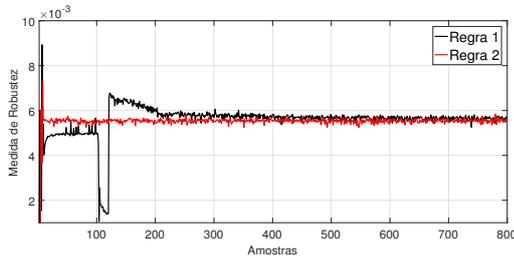


Figura 5. Medida de robustez $\min J_h^i$.

Nas Figuras 10 e 11, são apresentadas as evoluções temporais das variáveis controlada e de controle, respectivamente, para o caso em que $\|\Delta^i\| > \min J_h^i$. Através da Figura 12, nota-se que alguns autovalores não estão localizados no interior das regiões circulares. Dessa forma, embora a otimalidade do LQRI seja obtida, as especificações dos autovalores não foram satisfeitas, conforme se pode ver nas Figuras 13 e 14, no qual para alguns autovalores $w_j^i \leq w_h$ e/ou $\zeta_j^i \leq \zeta_h$, respectivamente.

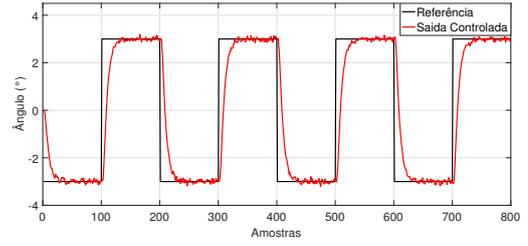


Figura 6. Comparação entre a variável controlada e a referência, para $\|\Delta^i\| < \min J_h^i$.

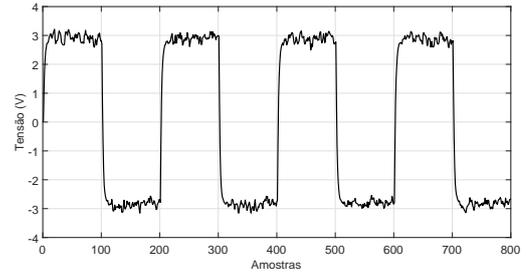


Figura 7. Variável de controle, para $\|\Delta^i\| < \min J_h^i$.

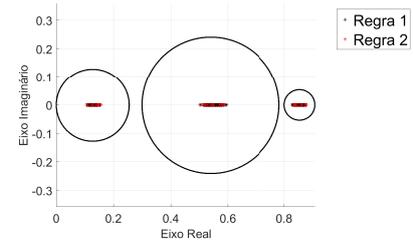


Figura 8. Autovalores da matriz de estados aumentada em malha fechada, para $\|\Delta^i\| < \min J_h^i$.

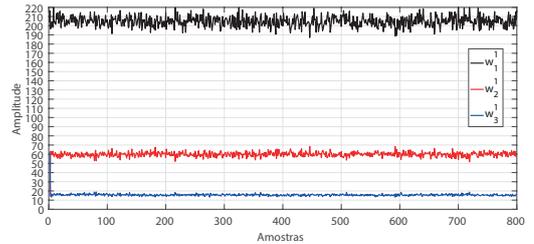


Figura 9. Frequência natural w_j^1 referente à primeira regra *fuzzy*, para $\|\Delta^1\| < \min J_h^1$.

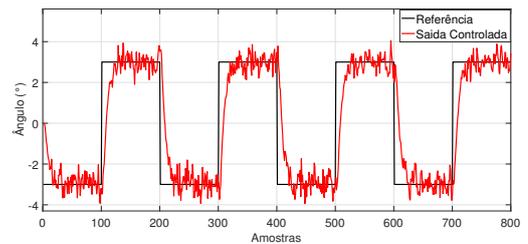


Figura 10. Comparação entre a variável controlada e a referência, para $\|\Delta^i\| > \min J_h^i$.

Na Figura 12, nota-se que existem autovalores que continuam alocados no interior das regiões circulares para o caso em que $\|\Delta^i\| > \min J_h^i$. Isso ocorreu devido a matriz de incertezas paramétricas $\|\Delta\|$, introduzida a cada amostra na matriz de estados aumentada em malha fechada, ser definida tendo como referência a medida J_h^i da região com menor robustez; para regiões circulares com valor de medida de robustez maior do que $\min J_h^i$ e com $\|\Delta^i\| < J_h^i$, é garantido que os autovalores continuem alocados nessas regiões.

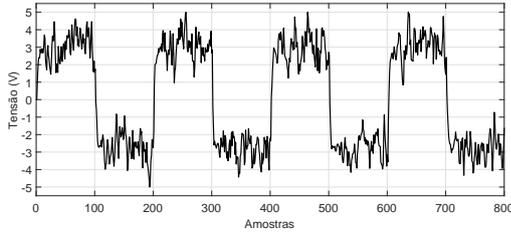


Figura 11. Variável de controle, para $\|\Delta^i\| > \min J_h^i$.

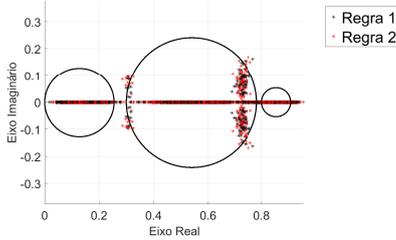


Figura 12. Autovalores da matriz de estados aumentada em malha fechada, para $\|\Delta^i\| > \min J_h^i$.

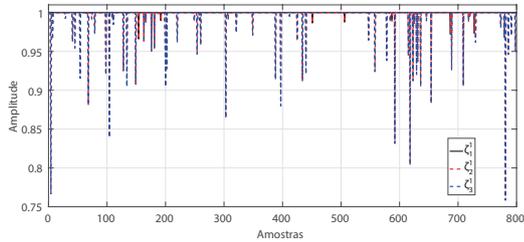


Figura 13. Fator de amortecimento ζ_j^1 referente à primeira regra fuzzy, para $\|\Delta^1\| > \min J_h^1$.

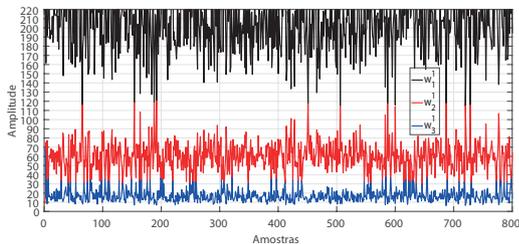


Figura 14. Frequência natural w_j^1 referente à primeira regra fuzzy, para $\|\Delta^1\| > \min J_h^1$.

5. CONCLUSÃO

A metodologia de controle proposta apresenta um promissor avanço para a teoria de controle, uma vez que o

projeto é realizado de forma autônoma, inteligente, flexível e robusta. A metodologia de controle mostrou-se eficiente em satisfazer mutuamente as condições de otimalidade para o problema do LQRI e a alocação de autovalores em regiões circulares robustas parametrizadas em função de especificações de desempenho. Pode-se notar, na seção de resultados, que a robustez associada a cada região circular permite que o critério multiobjetivo seja satisfeita de forma flexível. Nota-se ainda que, mesmo que os autovalores estejam alocados no interior do círculo unitário e satisfazendo as condições de otimalidade para o problema do LQRI, se a norma da matriz de incertezas paramétricas $\|\Delta^i\|$ for superior ao valor de $\min J_h^i$, o critério multiobjetivo não será satisfeito.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelo suporte financeiro, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade (PPGEE-UFMA) e ao IFMA.

REFERÊNCIAS

- Angelov, P. (2010). Evolving takagi-sugeno fuzzy systems from streaming data (ets+). *Evolving intelligent systems: methodology and applications*, 21–50.
- dos Santos, J.F.S., Pellanda, P.C., and Simoes, A.M. (2018). Robust pole placement under structural constraints. *Systems & Control Letters*, 116, 8–14.
- Juang, J.N. (1994). Applied system identification.
- Maamri, N., Bachelier, O., and Mehdi, D. (2006). Pole placement in a union of regions with prespecified subregion allocation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 72(1), 38–46.
- Mahmoud, M.S. and Oyedeji, M.O. (2018). Convex optimization design of multi-model controller for pitch-regulated wind turbine systems. In *IECON 2018-44th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 1735–1740. IEEE.
- Mansouri, B., Manamanni, N., Guelton, K., and Djemai, M. (2008). Robust pole placement controller design in lmi region for uncertain and disturbed switched systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2(4), 1136–1143.
- Murari, A., Rodrigues, L., Altuna, J., Potts, A.S., Almeida, L., and Sguarezi Filho, A. (2019). A lqri power control for dfig tuned by a weighted-pso. *Control Engineering Practice*, 85, 41–49.
- Noronha, R. and Serra, G. (2019). Controle fuzzy evolutivo com alocação ótima robusta de autoestruturas. In *Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 1(2019-108667). doi:10.17648/sbai-2019-111625.
- Ogata, K. et al. (1995). *Discrete-time control systems*, volume 2. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Sendrescu, D. and Bujgoi, G. (2019). Iterative learning control for a rotary flexible joint experiment. In *2019 20th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, 1–5. IEEE.
- Torres, L.M.M. and de Oliveira Serra, G.L. (2018). State-space recursive fuzzy modeling approach based on evolving data clustering. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 1–15.
- Zhai, J., Gao, L., and Li, S. (2015). Robust pole assignment in a specified union region using harmony search algorithm. *Neurocomputing*, 155, 12–21.