

# CONTROLE EXTREMAL PARA CASCATAS E INTERCONEXÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

TIAGO ROUX OLIVEIRA \* FILIPE SACCHI \*\*

\* *Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro - RJ, Brasil (e-mail: tiagoroux@uerj.br)*

\*\* *Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro - RJ, Brasil (e-mail: sacchifilipe@gmail.com)*

**Abstract:** In this article, starting from the presentation of a gradient extremum seeking scheme for compensation of a wave partial differential equation (PDE) in the actuator dynamics in cascade with static maps to be optimized, the application is expanded to actuation dynamics governed by PDE cascades specifically represented by: (a) an antistable wave PDE as an interconnection of two transports (delay) PDEs, and (b) antistable wave with input delay. The control laws for the the corresponding closed-loop systems are proposed by employing backstepping transformations and formulations using Neumann and Dirichlet conditions. Numerical simulations illustrate the theoretical results.

**Resumo:** Neste artigo, a partir da apresentação de um esquema de busca extremal baseada no método do gradiente para compensação da equação diferencial parcial (EDP) da onda, associada a um mapeamento estático a ser otimizado, estende-se a dinâmica de atuação para cascatas de EDPs, especificamente para: (a) uma EDP anti-estável da onda como uma interconexão de duas EDPs de transporte (atraso), e (b) uma EDP anti-estável da onda com entrada atrasada. As leis de controle dos sistemas em malha fechada são propostas a partir da aplicação de transformações do tipo *backstepping* e da formulação usando condições de Neumann e Dirichlet. Simulações numéricas ilustram os resultados teóricos.

*Keywords:* Extremum seeking; Adaptive control; Wave PDEs; PDE-PDE cascades; Backstepping

*Palavras-chaves:* Busca extremal; Controle adaptativo; EDP da onda; Cascata de EDPs; Backstepping

## 1. INTRODUÇÃO

A técnica de busca extremal (*Extremum Seeking - ES*) tem recebido grande atenção por estudiosos na área de controle, sendo reconhecida como uma das mais poderosas metodologias de sistemas adaptativos, capaz de ser aplicada em problemas onde a planta possui modelagem indeterminada, ou seu modelo é dotado de incertezas ou dinâmicas desconhecidas (Krstić and Wang, 2000).

Apesar da busca extremal já ter sido empregada com sucesso em muitas aplicações de engenharia, conforme observado em Ghods and Krstic (2011); Scheinker and Krstić (2014); Frihauf et al. (2014); Bagheri et al. (2018), os autores em Oliveira et al. (2017) e Rušiti et al. (2018) apontam a presença de atrasos como um dos fatores limitantes para aplicação da busca extremal em situações práticas. Estas publicações apresentam uma análise completa e detalhada para compensação de atrasos no projeto do controlador por busca extremal para mapas estáticos e dinâmicos, e observam também uma descrição sistemática e efetiva para os métodos de Newton e do gradiente. Em Oliveira et al. (2017), apenas equações diferenciais parciais (EDPs) hiperbólicas de primeira ordem são usadas para repre-

sentar os atrasos. Esta idéia chave possibilita a extensão para outras classes de EDPs, como aquelas que descrevem fenômenos de difusão, conforme estudado em Feiling et al. (2018) e Oliveira et al. (2018), e também aquelas relacionadas às EDPs parabólicas de reação-advecção-difusão, visto em Oliveira et al. (2019). Apesar da existência de várias publicações teóricas e práticas referentes à estabilização de EDPs, e também à sistemas com atraso, conforme observado em Krstic (2011); Moura et al. (2014); Sezgin and Krstic (2015); Ghaffari et al. (2015); Wang et al. (2018); Siranosian et al. (2009); Gu and Niculescu (2003); Evesque et al. (2003); Olgac and Sipahi (2005); Asl and Ulsoy (2003), a aplicação do controle por busca extremal para sistemas baseados em equações diferenciais parciais ainda apresenta poucos resultados.

A contribuição deste artigo é estender a classe de EDPs para aplicação da busca extremal, considerando cascatas de EDPs que envolvam a equação diferencial parcial da onda, especificamente EDP anti-estável da onda como uma interconexão de duas EDPs de transporte (atraso), e EDP anti-estável da onda com entrada atrasada (Krstic, 2011). A equação da onda é particularmente desafiadora já que todos os seus autovalores (infinitos em quantidade)

encontram-se no eixo imaginário, e devido ao fato de que possui velocidade de propagação limitada (Krstic, 2009a).

Para ambas as cascatas de EDPs mencionadas anteriormente, são apresentados os passos para obtenção das leis de controle  $U(t)$ , onde emprega-se um compensador para dinâmica de atuação da onda através de uma transformação do tipo *backstepping*, e dos sinais de perturbação  $S(t)$  que resolvem o problema de geração de trajetórias (Krstic and Smyshlyaev, 2008, Capítulo 12).

### 1.1 Notações e terminologias

As derivadas parciais de uma função  $u(x, t)$  que são denotadas por:  $\partial_x u(x, t) = \partial u(x, t)/\partial x$ ,  $\partial_t u(x, t) = \partial u(x, t)/\partial t$ , são respectivamente usadas nas seguintes formas compactas:  $u_x(x, t)$  e  $u_t(x, t)$ . A norma-2 de um vetor de estado de dimensão finita de uma EDO (equação diferencial ordinária)  $\vartheta(t)$  é denotada por barras simples  $|\vartheta(t)|$ . Já normas de funções (de  $x$ ) são denotadas por barras duplas. A norma espacial  $\mathcal{L}_2[0, D]$  do estado  $u(x, t)$  de uma EDP é denotada como:  $\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2([0, D])}^2 := \int_0^D u^2(x, t) dx$ , onde na sequência, o índice  $\mathcal{L}_2([0, D])$  é retirado, consequentemente  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}_2([0, D])}$ , se não especificado. Como definido em Khalil and Grizzle (2002), a função vetorial  $f(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^n$  é dita ser de ordem  $\mathcal{O}(\epsilon)$  no intervalo  $[t_1, t_2]$ , se  $\exists k, \bar{\epsilon} : |f(t, \epsilon)| \leq k\epsilon, \forall \epsilon \in [0, \bar{\epsilon}]$  e  $\forall t \in [t_1, t_2]$ . Na maioria dos casos, não se fornece a estimação precisa para as constantes  $k$  e  $\bar{\epsilon}$ , então  $\mathcal{O}(\epsilon)$  pode ser interpretado como uma relação de ordem de grandeza para  $\epsilon$  suficientemente pequeno. O sobrescrito  $*$  denota a otimização de um valor, isto é  $y^*$  é o valor ótimo para a função:  $y = f(x)$ , quando  $x = x^*$ . Presume-se que a definição de estabilidade entrada-estado *Input-to-State* para EDP, bem como sistemas baseados em EDPs, são fornecidas em Khalil and Grizzle (2002) e Karafyllis and Krstic (2019) respectivamente.

Considerando um sistema não linear genérico  $\dot{x} = f(t, x, \epsilon)$ , onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(t, x, \epsilon)$  seja periódica em  $t$  com período  $T$ , isto é  $f(t + T, x, \epsilon) = f(t, x, \epsilon)$ . Deste modo, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, pode-se obter seu sistema médio dado por  $\dot{x}_{av} = f_{av}(x_{av})$  com  $f_{av}(x_{av}) = 1/T \int_0^T f(\tau, x_{av}, 0) d\tau$ , onde  $x_{av}(t)$  denota a versão média do estado  $x(t)$ , conforme Khalil and Grizzle (2002).

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Esta seção serve como base para o desenvolvimento da aplicação da busca extremal para as cascatas de EDPs, apresentada na seção 4. Inicialmente recorda-se a aplicação básica do algoritmo de busca extremal usando o método do gradiente para otimização de mapas estáticos, sem considerar a presença de EDPs. Posteriormente a equação diferencial da onda é aplicada à entrada do mapa estático que se deseja otimizar e nesta abordagem é utilizada a condição de contorno de Neumann. Por fim são apresentados os sinais e sistema para controle por busca extremal para dinâmica governada pela EDP da onda.

### 2.1 Busca extremal básica para mapas estáticos

No caso mais simples da busca extremal para mapas estáticos, o objetivo é encontrar e manter o ponto ótimo

para o mapeamento estático não-linear desconhecido  $Q(\cdot)$ , com saída ótima desconhecida  $y^*$ , e otimizador ótimo também desconhecido  $\theta^*$ , tendo como sinais conhecidos a saída  $y$  e entrada  $\theta$  do sistema básico de busca extremal visto na Figura 1. Sem perda de generalidade, considera-se aqui problemas de maximização.

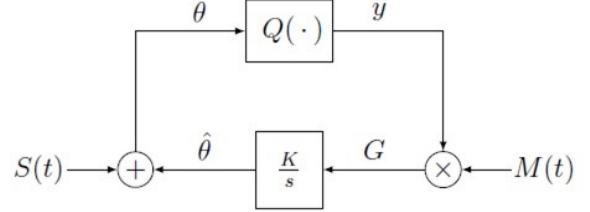


Figura 1. Esquema básico da busca extremal pelo método do gradiente

O método da perturbação senoidal (Krstić and Wang, 2000) varia o parâmetro de entrada  $\theta$  para obter a estimativa do gradiente  $G$  do mapa estático. Assim, o sinal de perturbação dado por:

$$S(t) = a \sin(\omega t), \quad (1)$$

com amplitude  $a$  e frequência  $\omega$  é adicionado à estimação  $\hat{\theta}$  do valor ótimo  $\theta^*$ . O sinal de perturbação, que multiplica o sinal de saída  $y$  do mapa estático, responsável pela estimação do gradiente é dado por:

$$M(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t). \quad (2)$$

(1) e (2) bem como a lei de adaptação como  $\dot{\hat{\theta}} = kG(t)$  são usados para se obter o sinal médio da estimação do gradiente, dado por  $G_{av}(t) = H\hat{\theta}_{av} = H(\hat{\theta}_{av} - \theta^*)$ , onde  $H$  é a hessiana negativa e desconhecida do mapa estático, e  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$  é a estimação do erro. Tem-se então como resultado que a dinâmica do erro médio  $\dot{\tilde{\theta}}_{av} = kH\tilde{\theta}_{av}$ , com  $k > 0$  é exponencialmente estável e pelo teorema da média (Khalil and Grizzle, 2002), a dinâmica original do erro também será.

### 2.2 EDP da onda sob condição de Neumann

Nesta subseção considera-se a dinâmica de atuação da onda como entrada do mapa estático a ser otimizado, conforme Figura 2. O atuador  $\theta(t)$  e o atuador de propagação  $\Theta(t)$  são dados por:

$$\Theta(t) = \partial_x \alpha(0, t) \quad (3)$$

$$\partial_{tt} \alpha(x, t) = \partial_{xx} \alpha(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (4)$$

$$\alpha(0, t) = 0 \quad (5)$$

$$\partial_x \alpha(D, t) = \theta(t), \quad (6)$$

com domínio  $D$  conhecido e arbitrário. A saída do mapa estático, dependerá então da entrada (3), e será dada por:

$$y(t) = Q(\Theta(t)). \quad (7)$$

Por questões de simplicidade, considera-se o seguinte

*Hipótese 1.* O mapa estático não linear e desconhecido é quadrático, isto é,

$$Q(\Theta) = y^* + \frac{H}{2} (\Theta - \Theta^*)^2, \quad (8)$$

onde além de  $\Theta^* \in \mathbb{R}$  e  $y^* \in \mathbb{R}$  começarem desconhecidos,  $H < 0$  escalar é a hessiana desconhecida do mapa estático.

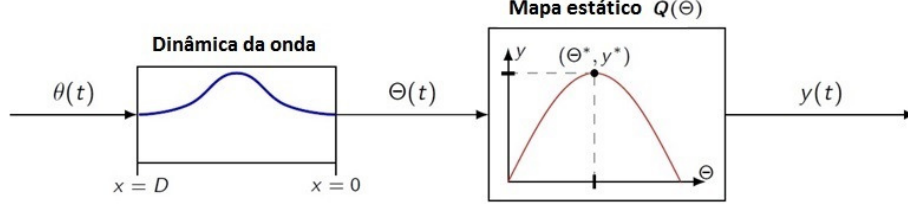


Figura 2. Cascata da equação diferencial parcial da onda com um mapa estático  $y(\Theta(t)) = Q(\Theta(t))$  a ser otimizado.

Desde modo, a saída do mapa estático é dada por:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta(t) - \Theta^*)^2. \quad (9)$$

Combinando a dinâmica de atuação acima, com o esquema básico de busca extremal, e expandindo o esquema proposto em Oliveira et al. (2017), o sistema em malha fechada por busca extremal para dinâmica de atuação governada pela equação diferencial parcial da onda, compensada por um controlador desconhecido, será conforme mostrado na Figura 3.

### 2.3 Sinais e sistema

De acordo com o sistema básico por busca extremal, define-se a entrada ótima  $\theta^*$  de  $\theta$  com respeito ao mapa estático e ao processo da dinâmica da equação da onda com relação  $\Theta^* = \theta^*$ . Sendo o objetivo encontrar a entrada ótima desconhecida  $\theta^*$ , define-se o erro de estimação como:

$$\tilde{\theta}(t) := \hat{\theta}(t) - \theta^*, \quad (10)$$

onde  $\hat{\theta}(t)$  é o valor estimado de  $\theta^*$ . Para fazer (10) consistente com o otimizador do mapa estático  $\Theta^*$ , introduz-se o erro de estimação propagado  $\vartheta(t) := \hat{\Theta}(t) - \Theta^*$  através do domínio da EDP da onda:

$$\vartheta(t) := \partial_x \bar{\alpha}(0, t) \quad (11)$$

$$\partial_{tt} \bar{\alpha}(x, t) = \partial_{xx} \bar{\alpha}(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (12)$$

$$\bar{\alpha}(0, t) = 0 \quad (13)$$

$$\partial_x \bar{\alpha}(D, t) = \tilde{\theta}(t). \quad (14)$$

A partir da malha de controle observada na Figura 3, obtém-se

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = U(t). \quad (15)$$

A partir da aplicação da derivada temporal em (11)-(14) e com ajuda de (10) e (15), a dinâmica propagada do erro é descrita como uma cascata da EDP da onda com uma EDO (integrador) sob a condição de Neumann (Susto and Krstic, 2010):

$$\dot{\vartheta}(t) = \partial_x u(0, t), \quad (16)$$

$$\partial_{tt} u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (17)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (18)$$

$$\partial_x u(D, t) = U(t), \quad (19)$$

onde  $\dot{\hat{\theta}}(t) = \dot{\theta}(t)$ , uma vez que  $\theta^*$  é constante, e

$$u(x, t) = \partial_t \bar{\alpha}(x, t). \quad (20)$$

Na busca extremal sem atuação da dinâmica através do domínio da EDP da onda, o sinal de perturbação  $S(t)$  deve ser  $a \sin(\omega t)$  em  $\Theta(t)$ , e assim compensar a dinâmica da onda. Assim  $\sin(\omega t)$  com amplitude de perturbação  $a$  e frequência  $\omega$  é aplicado conforme mostrado,

$$S(t) := \partial_x \beta(D, t) \quad (21)$$

$$\partial_{tt} \beta(x, t) = \partial_{xx} \beta(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (22)$$

$$\beta(0, t) = 0 \quad (23)$$

$$\partial_x \beta(0, t) = a \sin(\omega t). \quad (24)$$

Equações (21)-(24) descrevem o problema de geração de trajetórias como visto em Krstic and Smyshlyaev (2008). A solução explícita de (21) é dada por:

$$S(t) = a \cos(\omega D) \sin(\omega t). \quad (25)$$

Sendo  $\beta(x, t) = \frac{a}{\omega} \sin(\omega x) \sin(\omega t)$ , a relação entre o erro de estimação propagado  $\vartheta(t)$ , a entrada propagada  $\Theta(t)$ , e o otimizador do mapa estático  $\Theta^*$ , é dada por:

$$\vartheta(t) + a \sin(\omega t) = \Theta(t) - \Theta^*, \quad (26)$$

o que pode ser comprovado, já que:

$$\bar{\alpha}(x, t) = \alpha(x, t) - \beta(x, t) - \Theta^*, \quad (27)$$

para  $x = D$ , e considerando  $\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t)$ , juntamente com as soluções de (3)-(6), (11)-(14) e (21)-(24). Em Ghaffari et al. (2012) derivam-se a estimativa da Hessiana e o sinal de perturbação  $N(t)$ :

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \quad \text{com} \quad N(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t). \quad (28)$$

Observa-se que o sinal de perturbação  $M(t)$  para estimar o gradiente é o mesmo que do algoritmo de busca extremal básico (ver (2)), tal que:

$$G(t) = M(t)y(t) \quad \text{com} \quad M(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t). \quad (29)$$

## 3. PROJETO DO CONTROLADOR E SISTEMA EM MALHA FECHADA

Nesta seção, dando continuidade ao já exposto anteriormente, apresenta-se o controle de fronteira (*boundary control*) que, através de estimativas (baseadas na média) para o gradiente e Hessiana, é usado para compensar a dinâmica da onda no esquema de busca extremal da Figura 3,

### 3.1 Compensação da dinâmica da onda com controle de fronteira e estimação da Hessiana

Considerando a cascata de EDP-EDO (16)-(19). Conforme Susto and Krstic (2010), usa-se a seguinte transformação do tipo *backstepping*:

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_0^x l(x, \sigma) u_t(\sigma, t) d\sigma - \gamma(x) \vartheta(t), \quad (30)$$

Com ganhos *kernel*:

$$l(x, \sigma) = \gamma(x - \sigma), \quad (31)$$

$$\gamma(x) = \bar{K} [0 \ I] e^{Ax} [I \ 0]^T, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

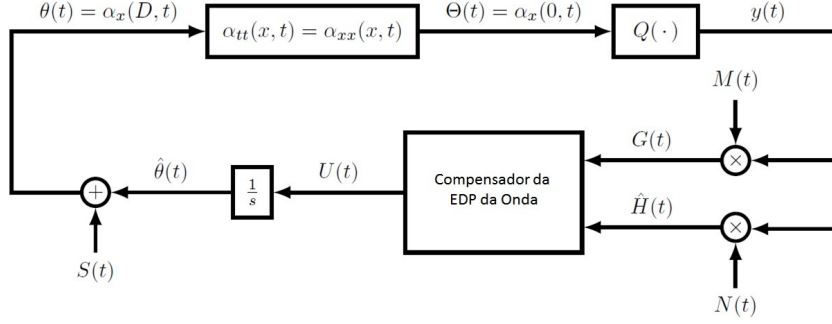


Figura 3. Busca extremal pelo método do gradiente, com compensação para dinâmica de atuação governada pela equação da onda.

que transformam (16)-(19) no seguinte sistema:

$$\dot{\vartheta}(t) = \bar{K}\vartheta(t) + w_x(0, t), \quad \bar{K} < 0, \quad (33)$$

$$\partial_{tt}w(x, t) = \partial_{xx}w(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (34)$$

$$w(0, t) = 0, \quad (35)$$

$$w_x(D, t) = -\bar{c}w_t(D, t), \quad \bar{c} > 0. \quad (36)$$

Como o sistema (33)-(36) é exponencialmente estável, o controlador que compensa a dinâmica da onda pode ser obtido avaliando a transformação do tipo *backstepping* (30) para  $x = D$ , conforme segue

$$U(t) = \bar{c}[\bar{K}u(D, t) - \partial_t u(D, t)] + \rho(D)\vartheta(t) + \int_0^D \rho(D - \sigma)\partial_t u(\sigma, t)d\sigma, \quad (37)$$

onde  $\rho(s) = \bar{K}[0 \ I]e^{As}[0 \ I]^T$ . No entanto, a lei de controle proposta em (37) não pode ser diretamente aplicada, uma vez que o sinal  $\vartheta(t)$  não pode ser medido. Deste modo, introduz-se um importante resultado de Ghaffari et al. (2012): a versão média do gradiente (29) e a estimativa da hessiana (28) dados por:

$$G_{av}(t) = H\vartheta_{av}(t), \quad \hat{H}_{av}(t) = H, \quad (38)$$

se um mapa quadrático como em (8) for considerado. Para a prova de (38), ver Ghaffari et al. (2012). Considerando (38), tira-se a média de (37) e escolhe-se  $\bar{K} = KH$  com  $K > 0$ , tal que:

$$U_{av}(t) = \bar{c}[KHu_{av}(D, t) - \partial_t u_{av}(D, t)] + \bar{\rho}(D)KH\vartheta_{av}(t) + KH \int_0^D \bar{\rho}(D - \sigma)\partial_t u_{av}(\sigma, t)d\sigma, \quad (39)$$

com

$$\bar{\rho}(s) = [0 \ I]e^{As}[0 \ I]^T, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Assim, aplicando a estimativa da média (38) em (39), obtém-se:

$$U_{av}(t) = \bar{c}[KHu_{av}(D, t) - \partial_t u_{av}(D, t)] + \bar{\rho}(D)KG_{av}(t) + KH \int_0^D \bar{\rho}(D - \sigma)\partial_t u_{av}(\sigma, t)d\sigma, \quad (41)$$

Devido à razões técnicas para aplicação do teorema da média para sistemas de dimensão infinita (Hale and Lunel, 1990), no que diz respeito a sua prova de estabilidade, introduz-se um filtro passa-baixa no controlador, assim  $U(t)$  pode ser tratado como uma variável de estado. Por

fim, obtém-se a lei de controle média de dimensão infinita para compensar a dinâmica da onda:

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ \bar{c} [K\hat{H}(t)u(D, t) - \partial_t u(D, t)] + \bar{\rho}(D)KG(t) + K\hat{H}(t) \int_0^D \bar{\rho}(D - \sigma)\partial_t u(\sigma, t)d\sigma \right\}, \quad (42)$$

onde  $c > 0$  é posteriormente escolhido. Por conveniência de notação em (42), mistura-se o domínio do tempo e frequência, onde o filtro passa-baixa atua como um operador no termo dentro das chaves.

### 3.2 Sistema em malha fechada

Substituindo (42) em (19), pode-se escrever o sistema em malha fechada (16)–(19) como:

$$\dot{\vartheta}(t) = \partial_x u(0, t), \quad (43)$$

$$\partial_{tt}u(x, t) = \partial_{xx}u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (44)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (45)$$

$$\partial_x u(D, t) = \frac{c}{s+c} \left\{ \bar{c} [K\hat{H}(t)u(D, t) - \partial_t u(D, t)] + \bar{\rho}(D)KG(t) + K\hat{H}(t) \int_0^D \bar{\rho}(D - \sigma)\partial_t u(\sigma, t)d\sigma \right\}. \quad (46)$$

Apesar de não apresentado aqui, a existência de funções de Lyapunov via transformações *backstepping* (Krstic and Smyshlyaev, 2008) permite a análise de estabilidade para o sistema (43)–(46).

## 4. BUSCA EXTREMAL PARA CASCATAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Nesta seção, a partir dos conceitos e desenvolvimentos anteriormente expostos, expande-se a aplicação da busca extremal e considera-se cascatas de EDPs envolvendo a equação diferencial parcial da onda. Observa-se que este texto restringe-se a derivar a lei de controle  $U(t)$ , obter o sinal de perturbação  $S(t)$  que resolve o problema de geração de trajetórias e realizar alguns comentários sobre o sistema em malha fechada.

### 4.1 EDP anti-estável da onda como uma interconexão de duas equações diferenciais parciais de transporte (atraso)

Nesta subseção, considera-se a EDP anti-estável da onda com condição de anti-amortecimento:

$$\Theta(t) = \alpha(0, t) \quad (47)$$

$$\partial_{tt}\alpha(x, t) = \partial_{xx}\alpha(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (48)$$

$$\partial_x\alpha(0, t) = -q\partial_t\alpha(0, t), \quad |q| \neq 1, \quad (49)$$

$$\partial_x\alpha(D, t) = \theta(t), \quad (50)$$

onde  $\theta$  é a entrada que aparece na forma da atuação de Neumann e a saída  $\Theta$  está na forma do atuador de propagação de Dirichlet. Considera-se conhecido o coeficiente de amortecimento  $q \geq 0$ . Como discutido em (Krstic, 2009b, Capítulo 19), quando  $q = 1$ , a parte real dos autovalores (infinitos) da planta é  $+\infty$ , enquanto que para  $q \neq 1$  e  $q \geq 0$ , a parte real é positiva, no entanto finita. Consequentemente, pode-se escrever (11)–(14) como:

$$\vartheta(t) := \bar{\alpha}(0, t) \quad (51)$$

$$\partial_{tt}\bar{\alpha}(x, t) = \partial_{xx}\bar{\alpha}(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (52)$$

$$\partial_x\bar{\alpha}(0, t) = -q\partial_t\bar{\alpha}(0, t), \quad |q| \neq 1, \quad (53)$$

$$\partial_x\bar{\alpha}(D, t) = \tilde{\theta}(t) \quad (54)$$

e, relembrando que  $u(x, t) = \partial_t\bar{\alpha}(x, t)$ , as equações (16)–(19) podem ser escritas como:

$$\dot{\vartheta}(t) = u(0, t), \quad (55)$$

$$\partial_{tt}u(x, t) = \partial_{xx}u(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (56)$$

$$\partial_xu(0, t) = -q\partial_tu(0, t), \quad |q| \neq 1, \quad (57)$$

$$\partial_xu(D, t) = U(t). \quad (58)$$

Aplicando as transformações de Riemann (Bekiaris-Liberis and Krstic, 2014), mas agora para o sistema (47)–(50), redefine-se:

$$\bar{\zeta}(x, t) = \frac{1}{1-q}[u_t(x, t) + u_x(x, t)] \quad (59)$$

$$\bar{\omega}(x, t) = \frac{1}{1+q}[u_t(x, t) - u_x(x, t)] \quad (60)$$

com seu correspondente inverso dado por:

$$u_t(x, t) = \frac{(1-q)\bar{\zeta}(x, t) + (1+q)\bar{\omega}(x, t)}{2}, \quad (61)$$

$$u_x(x, t) = \frac{(1-q)\bar{\zeta}(x, t) - (1+q)\bar{\omega}(x, t)}{2}. \quad (62)$$

Assim, (55)–(58) é redefinido como:

$$\mathbf{EDO:} \quad \dot{\vartheta}(t) = \bar{\zeta}(0, t), \quad (63)$$

$$\mathbf{EDP 1:} \quad \begin{cases} \bar{\zeta}(x, t) = \bar{\zeta}_x(x, t), & x \in [0, D], \\ \bar{\zeta}(D, t) = \frac{1}{1-q}[U(t) + u_t(D, t)], \end{cases} \quad (64)$$

$$\mathbf{EDP 2:} \quad \begin{cases} \bar{\omega}_t(x, t) = -\bar{\omega}_x(x, t), & x \in [0, D], \\ \bar{\omega}(0, t) = \bar{\zeta}(0, t). \end{cases} \quad (65)$$

Aplicando transformação de *backstepping* (Bekiaris-Liberis and Krstic, 2014)

$$w(x, t) = \bar{\zeta}(x, t) - KH \int_0^x \bar{\zeta}(\sigma, t) d\sigma - KH\vartheta(t), \quad (66)$$

$$\varpi(x, t) = \bar{\omega}(x, t) + KH \int_0^x \bar{\omega}(\sigma, t) d\sigma - KH\vartheta(t), \quad (67)$$

O sistema médio alvo resultante para (63)–(65) é

$$\dot{\vartheta}_{\text{av}}(t) = KH\vartheta_{\text{av}}(t) + w_{\text{av}}(0, t), \quad (68)$$

$$\partial_t w_{\text{av}}(x, t) = \partial_x w_{\text{av}}(x, t), \quad w_{\text{av}}(0, t) = \varpi_{\text{av}}(0, t), \quad (69)$$

$$\partial_t \varpi_{\text{av}}(x, t) = -\partial_x \varpi_{\text{av}}(x, t), \quad (70)$$

$$w_{\text{av}}(D, t) = -\frac{1}{c}\partial_t \partial_x u_{\text{av}}(D, t), \quad (71)$$

que é exponencialmente estável para  $c > 0$  suficiente grande. Este resultado não é difícil de provar, uma vez que (68) é ISS (*Input-to-State Stability*) (Karafyllis and Krstic, 2019) com respeito a  $w_{\text{av}}(0, t)$ . Por outro lado,  $w_{\text{av}}(x, t)$  é estável em tempo finito com respeito a  $\varpi_{\text{av}}(0, t)$  e  $\varpi_{\text{av}}(x, t)$  é assintoticamente estável para  $c \rightarrow +\infty$  (ou  $w_{\text{av}}(D, t) \rightarrow 0$ ) (Bekiaris-Liberis and Krstic, 2014).

Introduzindo (66) com  $x = D$  em (71), pode-se escrever  $\dot{U}_{\text{av}}(t) = -cw_{\text{av}}(D, t)$  de acordo com (58) como

$$\dot{U}_{\text{av}}(t) = -c\bar{\zeta}_{\text{av}}(D, t) + cK \left[ H\vartheta_{\text{av}}(t) + H \int_0^D \bar{\zeta}_{\text{av}}(x, t) dx \right]. \quad (72)$$

Introduzindo a versão média de (64) e (59) em (72) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{av}}(t) = & -\frac{c}{1-q}[U_{\text{av}}(t) + \partial_t u_{\text{av}}(D, t)] \\ & + cK \left[ H\vartheta_{\text{av}}(t) + H \int_0^D \frac{1}{1-q} [\partial_t u_{\text{av}}(x, t) + \partial_x u_{\text{av}}(x, t)] dx \right], \end{aligned} \quad (73)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{av}}(t) = & -\bar{c}U_{\text{av}}(t) - \bar{c}\partial_t u_{\text{av}}(D, t) \\ & + \bar{c}K \left[ (1-q)H\vartheta_{\text{av}}(t) + H \int_0^D [\partial_t u_{\text{av}}(x, t) + \partial_x u_{\text{av}}(x, t)] dx \right], \end{aligned} \quad (74)$$

ou, equivalentemente

$$\begin{aligned} U_{\text{av}}(t) = & \frac{\bar{c}}{s + \bar{c}} \left\{ -\partial_t u_{\text{av}}(D, t) + K \left[ (1-q)H\vartheta_{\text{av}}(t) \right. \right. \\ & \left. \left. + H \int_0^D [\partial_t u_{\text{av}}(x, t) + \partial_x u_{\text{av}}(x, t)] dx \right] \right\}, \end{aligned} \quad (75)$$

onde  $\bar{c} = \frac{c}{1-q}$ . Lembrando que  $G_{\text{av}}(t) = H\vartheta_{\text{av}}(t)$  e  $\hat{H}_{\text{av}}(t) = H$  a partir de (38), pode-se finalmente obter a lei de controle implementável

$$\begin{aligned} U(t) = & \frac{\bar{c}}{s + \bar{c}} \left\{ -u_t(D, t) + K \left[ (1-q)G(t) \right. \right. \\ & \left. \left. + \hat{H}(t) \int_0^D [u_t(x, t) + u_x(x, t)] dx \right] \right\}, \end{aligned} \quad (76)$$

com  $\hat{H}(t)$  e  $G(t)$  definido por (29) e (28), respectivamente.

A última etapa é obter o sinal de perturbação  $S(t)$  que resolve o seguinte problema de geração de trajetórias:

$$S(t) := \partial_x \beta(D, t) \quad (77)$$

$$\partial_{tt}\beta(x, t) = \partial_{xx}\beta(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (78)$$

$$\partial_x \beta(0, t) = -q\partial_t \beta(0, t), \quad |q| \neq 1, \quad (79)$$

$$\beta(0, t) = a \sin(\omega t). \quad (80)$$

A solução explícita de (77) é dada de acordo com (Krstic and Smyshlyaev, 2008, Capítulo 12)

$$S(t) = -a\omega \sin(\omega D) \cos(\omega t) - aq\omega \cos(\omega D) \cos(\omega t), \quad (81)$$

já que  $\beta(x, t) = a \cos(\omega x) \sin(\omega t) - aq \sin(\omega x) \cos(\omega t)$ .

**Observação 1.** Resultado similar pode ser obtido para atuador de Dirichlet  $\alpha(D, t) = \theta(t)$ ,  $\bar{\alpha}(D, t) = \tilde{\theta}(t)$  e  $u(D, t) = U(t)$  pela redefinição da transformação de Riemann (59) e (60) para:

$$\bar{\zeta}(x, t) = \frac{1}{1-q} [\bar{\alpha}_t(x, t) + \bar{\alpha}_x(x, t)] \quad (82)$$

$$\bar{\omega}(x, t) = \frac{1}{1+q} [\bar{\alpha}_t(x, t) - \bar{\alpha}_x(x, t)]. \quad (83)$$

Neste caso, a lei de controle pode ser expressa em termos de  $\bar{\alpha}(x, t)$  ao invés de  $u(x, t)$ , de acordo com:

$$U(t) = \frac{\bar{c}}{s + \bar{c}} \left\{ -\partial_x \bar{\alpha}(D, t) + K \left[ (1-q)G(t) + \hat{H}(t) \int_0^D [u(x, t) + \partial_x \bar{\alpha}(x, t)] dx \right] \right\}, \quad (84)$$

com  $\hat{H}(t)$  e  $G(t)$  definidos por (29) e (28), respectivamente. Relembrando (27), a lei de controle (84) é de fato implementável já que  $\partial_x \bar{\alpha}(x, t)$  podem ser escritos em termos dos sinais mensuráveis.

$$\partial_x \bar{\alpha}(x, t) = \partial_x \alpha(x, t) - \partial_x \beta(x, t). \quad (85)$$

A integral em (84)

$$\begin{aligned} \int_0^D \partial_x \bar{\alpha}(x, t) dx &= \bar{\alpha}(D, t) - \bar{\alpha}(0, t) \\ &= \alpha(D, t) - \beta(D, t) - \Theta^* - \alpha(0, t) + \beta(0, t) + \Theta^* \\ &= \theta(t) - \beta(D, t) - \Theta(t) + a \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (86)$$

O termo  $\beta(x, t)$  é definido como problema de geração de trajetórias (77)–(80), mas substituindo (77) por  $S(t) := \beta(D, t)$ , que resulta em (Krstic and Smyshlyaev, 2008, Chapter 12):

$$S(t) = a \cos(\omega D) \sin(\omega t) - aq \sin(\omega D) \cos(\omega t), \quad (87)$$

uma vez que  $\beta(x, t) = a \cos(\omega x) \sin(\omega t) - aq \sin(\omega x) \cos(\omega t)$ . Verifica-se que (87) corresponde exatamente (após algumas manipulações) à expressão abaixo, quando  $q=0$  é colocado em (87).

$$S(t) = \frac{a}{2} [\sin(\omega(t+D)) + \sin(\omega(t-D))]. \quad (88)$$

#### 4.2 EDP anti-estável da onda com entrada atrasada

Inspirado por Krstic (2011) discute-se a extensão da abordagem da busca extremal para mesma EDP anti-estável da onda, mas agora com a entrada em atraso. Este é um problema particularmente importante uma vez que Datko et al. (1986) mostrou que as leis de realimentação padrão para a equação da onda não têm margem de robustez para introdução de atrasos na malha fechada.

Considera-se o sistema em cascata atraso-equação da onda, visto na Figura 4, como sendo

$$\Theta(t) = \alpha(0, t) \quad (89)$$

$$\partial_{tt} \alpha(x, t) = \partial_{xx} \alpha(x, t), \quad x \in [0, 1] \quad (90)$$

$$\partial_x \alpha(0, t) = -q \partial_t \alpha(0, t), \quad |q| \neq 1, \quad (91)$$

$$\alpha(1, t) = \theta(t - D), \quad (92)$$

onde  $\alpha(x, t)$  é o estado de dimensão infinita da equação diferencial parcial anti-estável da onda, com domínio espacial definido sem perda de generalidade por  $x \in [0, 1]$ . A fronteira do atraso é denotada por  $D > 0$ , sendo qualquer constante arbitrária conhecida. O sistema atraso-equação da onda é escrito alternativamente como (Krstic, 2011):

$$\dot{\vartheta}(t) = u(0, t), \quad (93)$$

$$\partial_{tt} u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t), \quad x \in [0, 1] \quad (94)$$

$$\partial_x u(0, t) = -q \partial_t u(0, t), \quad |q| \neq 1, \quad (95)$$

$$u(1, t) = v(1, t), \quad (96)$$

$$\partial_t v(x, t) = \partial_x v(x, t), \quad x \in [1, 1 + D] \quad (97)$$

$$v(1 + D, t) = U(t), \quad (98)$$

onde  $U(t)$  é a entrada de controle do sistema geral e  $(\vartheta, u, v)$  é o estado da cascata EDO-EDP-EDO. A partir da forma de representação da EDP de transporte para entrada em atraso, sabe-se que (Krstic, 2009b):

$$v(x, t) = U(t + x - 1 - D), \quad x \in [1, 1 + D]. \quad (99)$$

Relembrando que (94)–(96) pode ser representada por (64)–(65), aplicando as transformações:

$$w(x, t) = \bar{\zeta}(x, t) - KH \int_0^x \bar{\zeta}(\sigma, t) d\sigma - kH\vartheta(t), \quad x \in [0, 1], \quad (100)$$

$$\varpi(x, t) = \bar{\omega}(x, t) + KH \int_0^x \bar{\omega}(\sigma, t) d\sigma - kH\vartheta(t), \quad x \in [0, 1], \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= v(x, t) - KH \int_1^x v(\sigma, t) d\sigma + \bar{\alpha}_x(1, t) \\ &\quad - KH \int_0^1 \bar{\zeta}(\sigma, t) d\sigma - KH\vartheta(t), \quad x \in [1, 1 + D], \end{aligned} \quad (102)$$

o sistema médio resultante para (93)–(98) será:

$$\dot{\vartheta}_{av}(t) = KH\vartheta_{av}(t) + w_{av}(0, t), \quad (103)$$

$$\partial_t w_{av}(x, t) = \partial_x w_{av}(x, t), \quad w_{av}(0, t) = \varpi_{av}(0, t) \quad (104)$$

$$\partial_t \varpi_{av}(x, t) = -\partial_x \varpi_{av}(x, t), \quad (105)$$

$$w_{av}(1, t) = \zeta_{av}(1, t), \quad (106)$$

$$\partial_t \zeta_{av}(x, t) = \partial_x \zeta_{av}(x, t), \quad x \in [1, 1 + D] \quad (107)$$

$$\zeta_{av}(1 + D, t) = -\frac{1}{c} \partial_t v_{av}(1 + D, t). \quad (108)$$

A partir de (102) e (108), pode-se obter a expressão para  $\dot{U}_{av}(t) = -c\zeta_{av}(1 + D, t)$ , como:

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{\bar{c}}{s + \bar{c}} \left\{ -\bar{\alpha}_x(1, t) + K \left[ (1-q)G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{H}(t) \int_0^1 \frac{1}{1-q} [u(x, t) + \bar{\alpha}_x(x, t)] dx \right] \right\}, \end{aligned} \quad (109)$$

para  $\bar{c} = \frac{c}{1-q}$ ,  $c > 0$  suficientemente grande,  $u(x, t) = \bar{\alpha}_t(x, t)$  e  $\bar{\alpha}_x(x, t)$  satisfazendo (85)–(86).

De acordo com Oliveira et al. (2017), a solução explícita para o problema de geração de trajetórias (Krstic and Smyshlyaev, 2008) com atraso poderia ser resolvido a partir de (87) com  $S(t - D) = a \cos(\omega D) \sin(\omega t) - aq \sin(\omega D) \cos(\omega t)$ , levando a

$$S(t) = a \cos(\omega D) \sin(\omega(t+D)) - aq \sin(\omega D) \cos(\omega(t+D)). \quad (110)$$

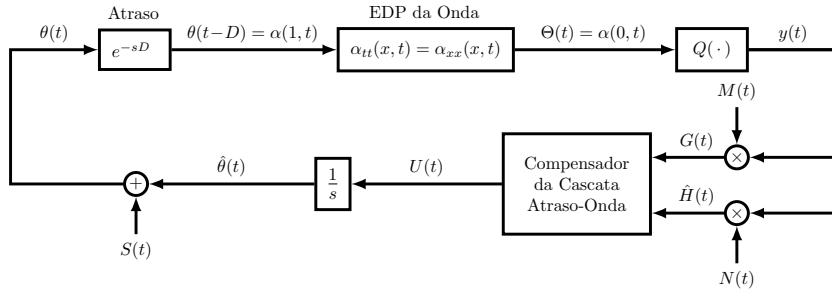
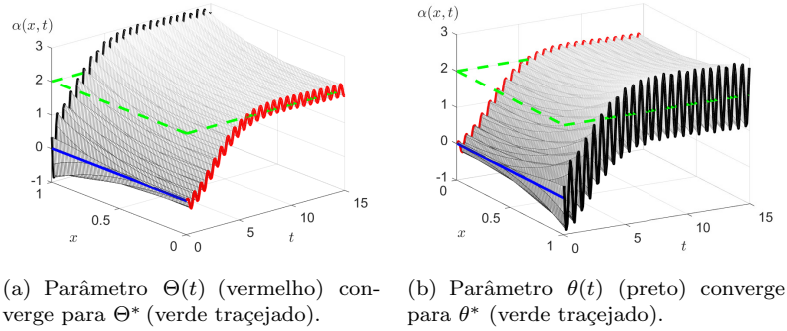
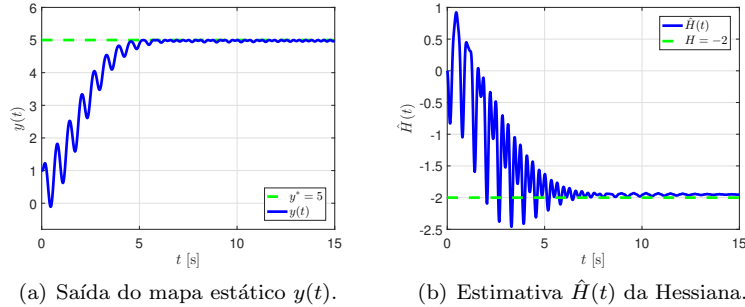


Figura 4. Busca extremal pelo método do gradiente, com compensação para dinâmica de atuação governada pela equação da onda com entrada atrasada



(a) Parâmetro  $\Theta(t)$  (vermelho) converge para  $\Theta^*$  (verde tracejado). (b) Parâmetro  $\theta(t)$  (preto) converge para  $\theta^*$  (verde tracejado).

Figura 5. Compensação da EDP anti-estável da onda para controle em malha fechada por busca extremal com condição de atuação de Dirichlet:  $\alpha(0, t) = \Theta(t)$  e  $\alpha(D, t) = \theta(t)$ , e  $D = 1$ ,  $q = 5$ , e  $\Theta^* = \theta^* = 2$ .



(a) Saída do mapa estático  $y(t)$ . (b) Estimativa  $\hat{H}(t)$  da Hessiana.

Figura 6. Compensação da EDP anti-estável da onda para controle em malha fechada por busca extremal com condição de atuação de Dirichlet: tempo de resposta de  $y(t)$  convergindo para o extremo  $y^* = 5$  e Hessiana estimada  $\hat{H}(t)$  convergindo para  $H = -2$ .

## 5. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Devido às restrições de espaço, limita-se aqui a mostrar as simulações numéricas apenas para o controle por busca extremal aplicado à equação anti-estável da onda com condição de Dirichlet (Seção 4.1, Observação 1).

Neste contexto, considera-se um mapa estático como em (8) e com Hessiana  $H = -0,2$ , otimizador  $\Theta^* = \theta^* = 2$  e valor ótimo  $y^* = 5$ . O comprimento do domínio para a EDP da onda e o coeficiente de amortecimento são definidos como  $D = 1$  e  $q = 5$ , respectivamente. Os parâmetros para a busca extremal proposta são os seguintes:  $\omega = 10$ ,  $a = 0,2$ ,  $c = 10$ ,  $\bar{c} = 0,5$ , e  $k = 0,4$ .

Os resultados da simulação para o sistema em malha fechada são mostrados na Figura 5(a) and Figura 5(b). Observa-se que as variáveis  $\Theta$  e  $\theta$  convergem para vizinhança dos valores ótimos  $\Theta^*$  e  $\theta^*$ , respectivamente.

Figura 6(a) e Figura 6(b) apresentam as variáveis relevantes para a busca extremal. Observando estas figuras, nota-se claramente a evolução do sinal de saída  $y(t)$  e da Hessiana estimada  $\hat{H}(t)$  finalmente atingindo o valor extremo  $y^* = 5$ , e o valor correto da Hessiana dado por  $H = -2$ , mesmo na presença da EDP da onda.

## 6. CONCLUSÕES

Este artigo apresentou uma análise detalhada para aplicação da busca extremal para compensação de dinâmicas de atuação para cascatas de EDPs envolvendo a equação da onda.

Inicialmente considerou-se apenas a dinâmica de atuação da onda, sem a presença de outras EDPs, como entrada do mapa estático a ser otimizado, e a partir da estimação da Hessiana e do gradiente, do teorema da média, e de

uma transformação apropriada do tipo *backstepping*, foi possível obter a lei de controle em malha fechada para o esquema de busca extremal proposto. Posteriormente expandiu-se sua aplicação, considerando cascatas de EDPs na dinâmica de atuação, neste caso, uma EDP anti-estável da onda como uma interconexão de duas EDPs de transporte (atraso), e também uma EDP anti-estável da onda com entrada atrasada. A partir das ferramentas previamente mencionadas, derivou-se as leis de controle em malha fechada e os sinais de perturbação que resolvem o problema de geração de trajetórias. Simulações numéricas realizadas para um dos casos estudados mostraram que tanto o sinal de saída do mapa estático, quanto a Hessiana estimada atingiram os valores esperados.

## REFERÊNCIAS

- Asl, F.M. and Ulsoy, A.G. (2003). Analysis of a system of linear delay differential equations. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, 125(2), 215–223.
- Bagheri, M., Krstić, M., and Naseradinmousavi, P. (2018). Multivariable extremum seeking for joint-space trajectory optimization of a high-degrees-of-freedom robot. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 140(11), 1–13.
- Bekiaris-Liberis, N. and Krstic, M. (2014). Compensation of wave actuator dynamics for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(6), 1555–1570.
- Datko, R., Lagnese, J., and Polis, M. (1986). An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. *SIAM journal on control and optimization*, 24(1), 152–156.
- Evesque, S., Annaswamy, A., Niculescu, S., and Dowling, A. (2003). Adaptive control of a class of time-delay systems. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, 125(2), 186–193.
- Feiling, J., Koga, S., Krstić, M., and Oliveira, T.R. (2018). Gradient extremum seeking for static maps with actuation dynamics governed by diffusion PDEs. *Automatica*, 95, 197–206.
- Frihauf, P., Liu, S.J., and Krstic, M. (2014). A single forward-velocity control signal for stochastic source seeking with multiple nonholonomic vehicles. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 136(5), 1–9.
- Ghaffari, A., Krstić, M., and Nešić, D. (2012). Multivariable newton-based extremum seeking. *Automatica*, 48(8), 1759–1767.
- Ghaffari, A., Moura, S., and Krstic, M. (2015). PDE-based modeling, control, and stability analysis of heterogeneous thermostatically controlled load populations. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 137(10), 1–9.
- Ghods, N. and Krstic, M. (2011). Source seeking with very slow or drifting sensors. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 133(4), 1–8.
- Gu, K. and Niculescu, S.I. (2003). Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, 125(2), 158–165.
- Hale, J. and Lunel, S.V. (1990). Averaging in infinite dimensions. *The Journal of integral equations and applications*, 463–494.
- Karafyllis, I. and Krstic, M. (2019). *Input-to-state stability for PDEs*. Springer.
- Khalil, H.K. and Grizzle, J.W. (2002). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ.
- Krstic, M. (2009a). Compensating a string PDE in the actuation or sensing path of an unstable ODE. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(6), 1362–1368.
- Krstic, M. (2009b). *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems*. Springer.
- Krstic, M. (2011). Dead-time compensation for wave/string PDEs. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 133(3), 1–13.
- Krstic, M. and Smyshlyaev, A. (2008). *Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs*, volume 16. Siam.
- Krstić, M. and Wang, H.H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 36(4), 595–601.
- Moura, S.J., Chaturvedi, N.A., and Krstić, M. (2014). Adaptive partial differential equation observer for battery state-of-charge/state-of-health estimation via an electrochemical model. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 136(1), 1–11.
- Olgac, N. and Sipahi, R. (2005). The cluster treatment of characteristic roots and the neutral type time-delayed systems. *ASME J.Dyn Syst., Meas., Control*, (127), 215–223.
- Oliveira, T.R., Feiling, J., Koga, S., and Krstic, M. (2018). Scalar newton-based extremum seeking for a class of diffusion PDEs. In *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2926–2931. IEEE.
- Oliveira, T.R., Feiling, J., and Krstic, M. (2019). Extremum seeking for maximizing higher derivatives of unknown maps in cascade with reaction-advection-diffusion PDEs. *IFAC-PapersOnLine*, 52(29), 210–215.
- Oliveira, T.R., Krstić, M., and Tsubakino, D. (2017). Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(4), 1911–1926.
- Rušiti, D., Evangelisti, G., Oliveira, T.R., Gerds, M., and Krstić, M. (2018). Stochastic extremum seeking for dynamic maps with delays. *IEEE control systems letters*, 3(1), 61–66.
- Scheinker, A. and Krstić, M. (2014). Non-c2 lie bracket averaging for nonsmooth extremum seekers. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 136(1), 1–11.
- Sezgin, A. and Krstic, M. (2015). Boundary backstepping control of flow-induced vibrations of a membrane at high mach numbers. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 137(8), 1–8.
- Siranosian, A.A., Krstic, M., Smyshlyaev, A., and Bement, M. (2009). Motion planning and tracking for tip displacement and deflection angle for flexible beams. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 131(3), 1–10.
- Susto, G.A. and Krstic, M. (2010). Control of PDE-ODE cascades with neumann interconnections. *Journal of the Franklin Institute*, 347(1), 284–314.
- Wang, J., Koga, S., Pi, Y., and Krstic, M. (2018). Axial vibration suppression in a partial differential equation model of ascending mining cable elevator. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 140(11), 1–13.