

Projeto de controlador de ordem fixa via LMI com limitação da norma \mathcal{H}_∞ e garantias de margens de estabilidade[★]

Rafael F. Q. Magossi* Rayza Araújo**** Leandro J. Elias**
Flávio A. Faria*** Vilma A. Oliveira****

* *Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET em Nova Friburgo, RJ, Brasil (e-mail: rafael.magossi@cefet-rj.br)*

** *Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia São Paulo, IFSP em Araraquara, SP, Brasil (e-mail: leandro.elias@ifsp.edu.br)*

*** *Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade de São Paulo (USP) em São Carlos, SP, Brasil (e-mail: rafael.magossi@usp.br, rayza.araujo@usp.br, voliveira@usp.br)*

**** *Departamento de Matemática, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista (UNESP), SP, Brasil (e-mail: flavio.faria@unesp.br)*

Abstract: Fixed-order controllers, such as Proportional+Integral+Derivative (PID) controllers, are widely used in industry and the \mathcal{H}_∞ norm can be used to assess controller robustness and performance criteria. In this work, a tuning strategy for fixed order controllers using an upper bound on norm \mathcal{H}_∞ and stability margin guarantee is proposed. The tuning strategy uses a representation of the product of polynomials in the matrix form solved via linear matrix inequalities (LMI) without iterative search or the need to use linear geometric methods. Numerical examples are presented to validate the proposed tuning method.

Resumo: Controladores de ordem fixa, como os controladores Proporcional+Integral+Derivativo (PID), são amplamente utilizados na indústria e a norma \mathcal{H}_∞ pode ser utilizada para avaliar critérios de robustez e desempenho do controlador. Neste trabalho é proposta uma estratégia de ajuste para controladores de ordem fixa usando um limite superior na norma \mathcal{H}_∞ e garantia da margem de estabilidade. A estratégia de sintonia utiliza uma representação do produto de polinômios na forma matricial e obtém os ganhos do controlador através de desigualdades matriciais lineares, sem busca iterativa ou necessidade de utilizar métodos geométricos. Exemplos numéricos são apresentados para validar o método de sintonia proposto.

Keywords: PID controller; Toeplitz matrix; Sensitivity function; Phase Margin; Gain Margin.

Palavras-chaves: Controlador PID; Matriz de Toeplitz; Função de sensibilidade; Margem de fase; Margem de ganho.

1. INTRODUÇÃO

Os controladores de ordem fixa são amplamente utilizados na indústria, sendo o mais popular o controlador PID devido à sua simplicidade e desempenho Yu et al. (2020); Ionescu et al. (2020). A parte crítica para projetar um controlador PID é realizar o ajuste dos ganhos para manter a estabilidade enquanto atende aos requisitos de desempenho Shankar P. Bhattacharyya and Keel (2009); Datta et al. (2013); Verma and Padhy (2018). Em Ho et al. (1999), os autores desenvolveram um método para determinar o conjunto estabilizante para controladores

PID utilizando o conceito de assinatura de Hurwitz. Posteriormente, este método foi usado em Díaz-Rodríguez and Bhattacharyya (2016) em conjunto com uma abordagem geométrica para obter garantias de margem de fase. Em geral, as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 são usadas para avaliar a robustez do controlador e os critérios de desempenho em níveis de atenuação de perturbações para várias classes de perturbações determinísticas e estocásticas Balandin and Kogan (2019); Díaz-Rodríguez et al. (2019). Em consonância com os trabalhos apresentados em Ho et al. (1999) e Díaz-Rodríguez and Bhattacharyya (2016), em Han et al. (2018) os autores desenvolveram uma abordagem geométrica para limitar a norma \mathcal{H}_∞ e conseqüentemente fornecer garantias de estabilidade relativa.

Desigualdades matriciais lineares (LMIs, da sigla em inglês) são úteis no projeto de controle, visto que é possível

* Este trabalho foi apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), sob a concessão 305892/2017-7, e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), sob projetos 2016/21120-2 e 2016/25017-1.

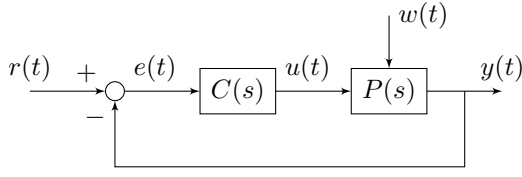


Figura 1. Sistema em malha fechada sob ação de distúrbio.

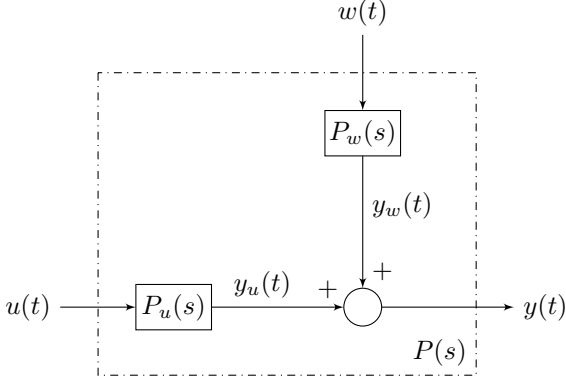


Figura 2. Detalhes da planta $P(s)$.

$$S_{yw}(s) \triangleq P_w(s) \frac{1}{1 + C(s)P_u(s)} \quad (4)$$

sendo

$$P_w(s) \triangleq \frac{N_w(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{n_w} a_k s^k}{\sum_{k=0}^{d_p} b_k s^k} \quad (5)$$

$$P_u(s) \triangleq \frac{N_u(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{n_u} g_k s^k}{\sum_{k=0}^{d_p} b_k s^k} \quad (6)$$

$$C(s) \triangleq \frac{N_c(s)}{s} = \frac{\sum_{k=0}^{n_c} c_k s^k}{s}, \quad (7)$$

em que $N_u(s), N_w(s)$ e $D(s)$ são coprimos e $C(s)$ não possui zeros na origem.

Defina $h_u = d_p - n_c + 1$, $h_w = d_p - 1$ e reescreva

$$N_u(s) = \sum_{k=0}^{h_u} g_k s^k, \quad N_w(s) = \sum_{k=0}^{h_w} a_k s^k. \quad (8)$$

Se $P_w(s)$ é estritamente própria e $D(s)$ é um polinômio mônico, então a realização canônica controlável de $S_{yw}(s)$ possui a forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{cl}x(t) + B_{cl}w(t) \\ y(t) &= C_{cl}x(t) \end{aligned} \quad (9)$$

em que

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -q^T & - & (JK)^T & & \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -q^T & \end{bmatrix}}_{\Gamma} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Psi} (JK)^T$$

$$B_{cl} = [0 \cdots 0 \ 1]^T, \quad C_{cl}^T = \mathcal{T}([a_0 \cdots a_{h_w}]) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

com

$$J = \mathcal{T}([g_0 \cdots g_{h_u}]), \quad K = [c_0 \cdots c_{n_c}]^T$$

e

$$q = \mathcal{T}([b_0 \cdots b_{d_p-1}]) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que $C(s)$ engloba as estruturas de controladores PID para

$$K = [k_i \ k_p \ k_d]^T. \quad (10)$$

O teorema a seguir fornece uma solução para sintonizar os ganhos do controlador $c_k, \forall k \in \{0, \dots, n_c\}$ de forma a limitar a norma \mathcal{H}_∞ de S_{yw} .

3.1 Projeto com limitação da norma \mathcal{H}_∞

Teorema 1. Considere $J = \mathcal{T}([g_0 \cdots g_{h_u}])$ não singular, $n_w < d_p, n_c < d_p - n_u + 1$ e $\rho \in \mathbb{R}$. Se existe Y e $S = S^T$ de dimensão apropriada (11), então o sistema (9) com o ganho PID, $K = -J^{-1}S^{-1}Y^T$, é assintoticamente estável e um limitante superior em $\|S_{yw}(s)\|_\infty$ é garantido.

$$\|S_{yw}(s)\|_\infty = \inf_{\rho > 0, S > 0} \{\rho : R < 0\} \quad (11)$$

em que

$$R = \begin{bmatrix} S\Gamma^T + \Gamma S + \Psi Y + Y^T \Psi^T & \Psi & S C_{cl}^T \\ \bullet & -\rho I & 0 \\ \bullet & \bullet & -\rho I \end{bmatrix}.$$

Demonstração. A partir da hipótese, $n_c < d_p - n_u + 1$, então de (4) segue que

$$S_{yw}(s) = P_w \frac{1}{1 + C P_u} = \frac{N_w \cdot s}{D \cdot s + N_u \cdot N_c} \quad (12)$$

em que $D \cdot s + N_u \cdot N_c$ é um polinômio mônico. Agora, para (9), a partir do BRL, $\|S_{yw}(s)\|_\infty < \rho$ se $R_1 < 0$, em que

$$R_1 \triangleq \begin{bmatrix} (\Gamma - \Psi K^T J^T)^T P + P(\Gamma - \Psi K^T J^T) & P\Psi & C_{cl}^T \\ \bullet & -\rho I & 0 \\ \bullet & \bullet & -\rho I \end{bmatrix}$$

com $P \in \mathbb{R}^{(d_p+1) \times (d_p+1)}$, $P = P^T$.

Pré e pós multiplicando R por $\text{diag}(P, I, I)$, a partir de (11) o BRL é satisfeito com $S = P^{-1}$, $Y = -(JK)^T P^{-1}$. Então, caso J seja não-singular

$$K = -J^{-1}S^{-1}Y^T. \quad (13)$$

O Teorema 1 propõe condições baseadas em LMIs para a estabilização de $S_{yw}(s)$ quando a matriz J é não singular. No entanto, existem casos onde a matriz é singular ou não quadrada e, portanto, não é possível obter o ganho estabilizante com a fórmula $K = -J^{-1}S^{-1}Y^T$. Nesse caso, pode-se usar as soluções Y e $S = S^T$ do Teorema 1 para obter uma solução aproximada para a minimização da norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência (4). O próximo teorema propõe condições baseadas em LMIs para a solução desse problema.

Teorema 2. Sejam Y , S e ρ soluções do Teorema 1, e $J = \mathcal{T}([g_0 \cdots g_{h_u}])$, uma matriz de dimensão apropriada. Se existir uma matriz K satisfazendo (14) e (15), então o sistema (9) é estabilizável com $\|S_{yw}(s)\|_\infty < \rho$.

$$\min_{\delta \geq 0} \delta : \begin{bmatrix} -I & S^{-1}Y^T + JK \\ \bullet & -\delta \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & S^{-1}\Psi & C_{cl}^T \\ \bullet & -\rho I & 0 \\ \bullet & \bullet & -\rho I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

com $\tilde{X} = (\Gamma - \Psi(JK)^T)^T S^{-1} + S^{-1}(\Gamma - \Psi(JK)^T)$.

Demonstração. Supondo que J não satisfaz a hipótese do Teorema 1 pode se encontrar uma solução aproximada para o sistema linear $JK = -S^{-1}Y^T$ resolvendo o seguinte problema de minimização

$$\min_{\delta \geq 0} \delta : \|S^{-1}Y^T + JK\|_2^2 < \delta.$$

Reescrevendo $\|S^{-1}Y^T + JK\|_2^2$ na forma matricial segue que

$$(S^{-1}Y^T + JK)^T(S^{-1}Y^T + JK) - \delta < 0$$

então, aplicando o complemento de Schur chega-se em

$$\begin{bmatrix} -I & S^{-1}Y^T + JK \\ \bullet & -\delta \end{bmatrix} < 0. \quad (16)$$

A solução K obtida em (16) é uma solução aproximada do sistema linear e a desigualdade (15) garante a estabilidade do sistema (9) com $\|S_{yw}(s)\|_\infty < \rho$.

Observação 1. É possível considerar ρ como um parâmetro de projeto fixo e resolver os Teoremas 1 e 2.

O Teorema 1 é válido para $P_w(s)$ estritamente própria. Quando $P_w(s)$ é própria a realização canônica controlável de $S_{yw}(s)$ possui a forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{cl}x(t) + B_{cl}w(t) \\ y(t) &= C_{cl}x(t) + D_{cl}w(t) \end{aligned} \quad (17)$$

em que

$$\begin{aligned} C_{cl} &= F - qD_{cl} - JKD_{cl}, \quad D = a_{n_w}, \\ F &= \mathcal{T}([a_0 \ \cdots \ a_{h_w-1}]) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e A_{cl} , B_{cl} , q , J e K já definidas em (9).

O teorema a seguir é uma solução para sintonizar os ganhos do controlador de forma a limitar a norma \mathcal{H}_∞ de S_{yw} para $P_w(s)$ própria.

Teorema 3. Considere $n_w = d_p$, $n_u = 0$, $n_c < d_p + 1$ e $J = \mathcal{T}([g_0 \ \cdots \ g_{h_u}])$, uma matriz não singular. Se existirem matrizes Y e $S = S^T$ de dimensões apropriadas satisfazendo (18), então o sistema (17) com o ganho PID, $K = -J^{-1}S^{-1}Y^T$, é assintoticamente estável e um limitante superior em $\|S_{yw}(s)\|_\infty$ é garantido.

$$\|S_{yw}(s)\|_\infty = \inf_{\rho > 0, S > 0} \{\rho : R < 0\} \quad (18)$$

sendo

$$R = \begin{bmatrix} S\Gamma^T + \Gamma S + \Psi Y + Y^T \Psi^T & \bullet & \bullet \\ & \Psi^T & -\rho I \\ F^T S^T - D_{cl}^T q^T S^T + D_{cl}^T Y & D_{cl}^T & -\rho I \end{bmatrix}$$

Demonstração. Segue diretamente da prova do Teorema 1.

Observação 2. No caso em que $\tilde{C}(s)$ é um PID com filtro

$$\tilde{C}(s) = \frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{s(s + \tau)}$$

para um valor fixo de τ , escreva

$$\begin{aligned} D(s) &= (s + \tau)D(s), \\ N_w(s) &= (s + \tau)N_w(s), \\ C(s) &= \frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{s}, \end{aligned}$$

e, como $D(s)$ é mônico, proceda como anteriormente.

A seguir são apresentados exemplos numéricos para mostrar a eficiência dos métodos propostos.

Exemplo 2. Considere o sistema da Figura 1 com

$$\begin{aligned} P_w(s) &= \frac{1}{s+5}, \quad P_u(s) = \frac{10}{s+5} \\ \tilde{C}(s) &= \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s(s+2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

O objetivo é determinar os ganhos k_d , k_p e k_i de forma que $\|S_{yw}(s)\|_\infty$ seja mínima.

Como trata-se de um PID com filtro, a partir da Observação 2 reescreve-se

$$\begin{aligned} D(s) &= (s+2)(s+5) = s^2 + 7s + 10, \\ N_w(s) &= s+2, \end{aligned}$$

e então a função de transferência (4), considerando (19), é dada por

$$\begin{aligned} P_w(s) &= \frac{s+2}{s^2 + 7s + 10}, \quad P_u(s) = \frac{10}{s^2 + 7s + 10}, \\ C(s) &= \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}. \end{aligned}$$

Note que $n_w = 1$, $n_u = 0$, $n_c = 2$ e $d_p = 2$. Assim, as condições $n_w < d_p$ e $n_c < d_p - n_u + 1$ do Teorema 1 são satisfeitas. As matrizes Toeplitz do sistema, obtidas a partir do Lema 1, são apresentadas a seguir.

$$\begin{aligned} q &= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 7 & 10 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{cl} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ J &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_i \\ k_p \\ k_d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema 1 com

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -7 \end{bmatrix} \text{ e } \Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

são obtidas as matrizes

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} 24253.0 & -2558.9 & 5117.6 \\ -2558.9 & 5117.8 & -10235.0 \\ 5117.6 & -10235.0 & 20471.0 \end{bmatrix} \\ Y &= [23140.0 \quad -46281.0 \quad -24785.0] \end{aligned}$$

com $\rho = 8.3653 \times 10^{-6}$ e como J é não singular, pode ser obtida a solução ótima

$$K = -J^{-1}S^{-1}Y^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 31974.7 \\ 15987.3 \end{bmatrix}$$

A partir de K , obtém-se a resposta freqüencial de

$$S_{yw}(s) = \frac{s+2}{s^2 + 1.599 \times 10^5 s + 3.198 \times 10^5}$$

como mostrado na Figura 3. Note que a limitação da norma é atendida.

Exemplo 3. Considere o sistema da Figura 1 com

$$\begin{aligned} P_w(s) &= \frac{2}{s^2 + 5s + 6}, \\ P_u(s) &= \frac{s-1}{s^2 + 5s + 6}, \\ C(s) &= \frac{k_p s + k_i}{s}. \end{aligned} \quad (21)$$

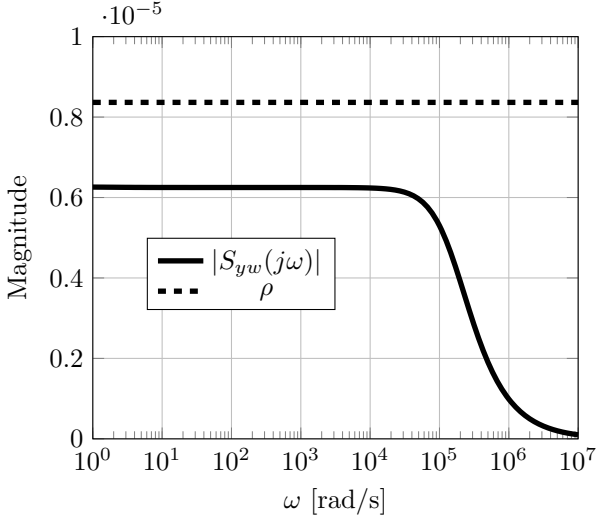


Figura 3. Resposta em frequência de S_{yw} mostrando que $\|S_{yw}(s)\|_\infty < \rho$.

Neste exemplo, o objetivo é determinar os ganhos k_p e k_i de forma que $\|S_{yw}(s)\|_\infty < 0.95$.

Note que $n_w = 0, n_u = 1, n_c = 1$ e $d_p = 2$, satisfazendo as condições $n_w < d_p$ e $n_c < d_p - n_u + 1$ do Teorema 1. Utilizando o Lema 1, as matrizes de Toeplitz do sistema são

$$q = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{cl} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_i \\ k_p \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Utilizando o Teorema 1 com a Observação 1, $\rho = 0.95$,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

são obtidas as matrizes

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7405 & 0.7441 & 0.1486 \\ 0.7441 & 6.42 & 1.103 \\ 0.1486 & 1.103 & 0.7463 \end{bmatrix}$$

$$Y = [-1.2075 \quad -1.6486 \quad 5.7846].$$

Como J não é quadrada, o Teorema 2 é utilizado, obtendo $\delta = 8.8635$ e

$$K = \begin{bmatrix} -0.75853 \\ -3.0105 \end{bmatrix}.$$

Assim, a resposta frequencial de

$$S_{yw}(s) = \frac{2s}{s^3 + 1.989s^2 + 8.252s + 0.7585}$$

é obtida e apresentada na Figura 4. Verifica-se que a limitação da norma é satisfeita.

3.2 Projeto com garantia de margens de estabilidade

Considere o sistema com realimentação unitária da Figura 1 sem distúrbio. A função de transferência do erro $e(t)$ em relação a referência $r(t)$ é definida como sendo

$$\mathcal{E}(s) \triangleq \frac{1}{1 + C(s)P_u(s)}.$$

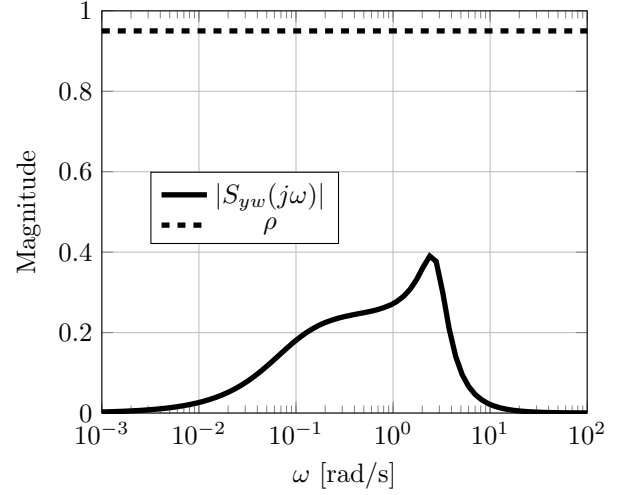


Figura 4. Resposta em frequência de S_{yw} mostrando que $\|S_{yw}(s)\|_\infty < \rho$.

Em Han et al. (2018) é demonstrado como é possível obter garantia de margem de fase e ganho para o sistema sem distúrbio mostrado na Figura 1 a partir da limitação da função de transferência do erro. Para fácil referência o resultado é apresentado a seguir.

Teorema 4. (Han et al. (2018)). Considere o sistema realimentado mostrado na Figura 1. Se

$$\|\mathcal{E}(s)\|_\infty < \rho, \quad (25)$$

então a margem de fase, denotada por ϕ , será

$$\phi > 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{2\rho} \right) \quad (26)$$

e a margem de ganho, denotada por g_m , é dada por

$$g_m \notin \left[\frac{\rho}{\rho+1}, \frac{\rho}{\rho-1} \right], \quad \text{para } \rho > 1 \quad (27)$$

$$g_m \in \left[\frac{\rho}{\rho+1}, \infty \right), \quad \text{para } \rho \leq 1$$

A robustez e o desempenho na regulação podem ser especificados impondo um limitante para a função de transferência do erro no domínio da frequência. Se a função de transferência do erro permanece dentro dos limites impostos, os objetivos de controle são atingidos. Esses modelos podem ser usados para análise e/ou projeto. Neste último, considera-se uma função de transferência de ponderação $\mathcal{O}(s)$ que limite $\mathcal{E}(s)$.

A partir do Teorema 3 e do Teorema 4 é possível obter o resultado a seguir para garantir margens de fase e ganho no projeto do controlador.

Teorema 5. Seja $N_o(s)$ um polinômio com coeficientes reais de ordem d_p e defina

$$\mathcal{O}(s) \triangleq \frac{N_o(s)}{D(s)} \quad (28)$$

uma função de transferência de ponderação da função de transferência do erro sem zeros no eixo imaginário. Assim, definindo

$$\tilde{S}(s) = \mathcal{O}(s)\mathcal{E}(s)$$

resolva o Teorema 3 com

$$S_{yw}(s) \triangleq \tilde{S}(s).$$

Se as LMIs do Teorema 3 são factíveis, então $C(s)$ garante que o sistema representado pela Figura 1 possui no mínimo

$$\phi = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{2\tilde{\rho}} \right) \quad (29)$$

e

$$g_m \notin \left[\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}+1}, \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}-1} \right], \quad \text{para } \tilde{\rho} > 1 \quad (30)$$

$$g_m \in \left[\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}+1}, \infty \right), \quad \text{para } \tilde{\rho} \leq 1$$

em que

$$\mathcal{A}(s) = \frac{\rho}{\mathcal{O}(s)}, \quad \tilde{\rho} = \|\mathcal{A}(s)\|_\infty. \quad (31)$$

Demonstração. A prova deste teorema é direta. A partir do Teorema 3, caso as LMIs sejam factíveis e definindo $S_{yw}(s) \triangleq \tilde{S}(s)$, obtém-se

$$\|\tilde{S}(s)\|_\infty < \rho$$

isso é,

$$\|\mathcal{O}(s)\mathcal{E}(s)\|_\infty < \rho$$

que é satisfeita se somente se

$$|\mathcal{E}(j\omega)| < \frac{\rho}{|\mathcal{O}(j\omega)|}, \quad \forall \omega \geq 0$$

portanto,

$$\|\mathcal{E}(s)\|_\infty < \left\| \frac{\rho}{\mathcal{O}(s)} \right\|_\infty = \|\mathcal{A}(s)\|_\infty = \tilde{\rho}$$

o que implica que

$$\phi > 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{2\tilde{\rho}} \right) \quad (32)$$

e

$$g_m \notin \left[\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}+1}, \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}-1} \right], \quad \text{para } \tilde{\rho} > 1 \quad (33)$$

$$g_m \in \left[\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}+1}, \infty \right), \quad \text{para } \tilde{\rho} \leq 1$$

O próximo exemplo ilustra o projeto com garantias de margens de estabilidade.

Exemplo 4. Considere o sistema da Figura 1 sem distúrbio com

$$\mathcal{O}(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 5s + 6}, \quad (34)$$

$$P_u(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 5s + 6}, \quad (35)$$

$$C(s) = \frac{k_p s + k_i}{s}, \quad (36)$$

e determine os ganhos k_p e k_i de forma que $\|\tilde{S}(s)\|_\infty < 1$. A partir do Teorema 5, caso o problema tenha solução tem-se que

$$\tilde{\rho} = \left\| \frac{\rho}{\mathcal{O}(s)} \right\|_\infty = 2$$

ou seja, $\phi > 28.95^\circ$ e $g_m \notin [-3.5218, 6.0206]$ dB. De fato, usando o Teorema 3, obtém-se

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.559 & 0.665 & 0.263 \\ 0.665 & 3.74 & 2.45 \\ 0.263 & 2.45 & 3.5 \end{bmatrix}, \quad Y = [-1.46 \quad 1.48 \quad -1.64]$$

e como J não é quadrada, usa-se o Teorema 2 para encontrar uma solução aproximada para o ganho estabilizante, obtendo $\delta = 2.1264$ e

$$K = \begin{bmatrix} -0.093 \\ 1.43 \end{bmatrix}.$$

A partir de K , obtém-se

$$\mathcal{E}(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 6s}{s^3 + 6.435s^2 + 4.472s + 0.09295}$$

e a resposta frequencial de $\mathcal{E}(s)$ é mostrado na Figura 5 evidenciando que $\|\mathcal{E}(s)\|_\infty < \tilde{\rho}$. Na Figura 6 mostra-se a garantia das margens de estabilidade com $\phi = 74.5^\circ > 28.95^\circ$ e $g_m = 11.8 \notin [-3.5218, 6.0206]$ dB.

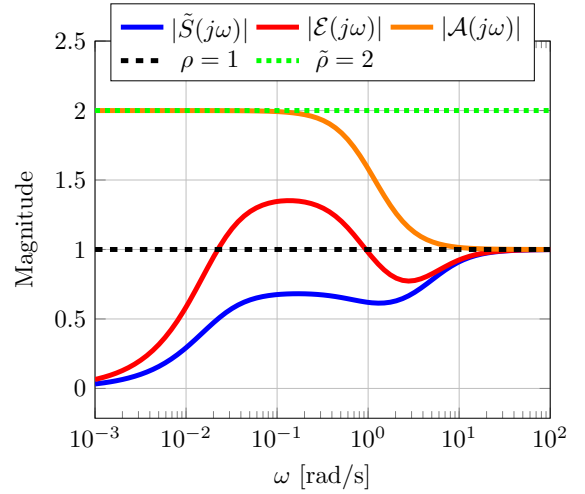


Figura 5. Resposta em frequência mostrando o atendimento de $\|\tilde{S}(s)\|_\infty < \rho$.

4. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado a sintonia de controladores de ordem fixa com limitação da norma \mathcal{H}_∞ e garantias de margem de estabilidade utilizando LMIs sem busca iterativa ou métodos geométricos. A utilização da realização canônica controlável em conjunto com a representação do produto de polinômios de forma matricial pela matriz de Toeplitz permite que o problema seja formulado similar ao problema clássico de realimentação da saída permitindo resolução via LMI com troca de variáveis. Os resultados mostraram a eficiência do método de sintonia proposto e trabalhos futuros incluem estender o método para uma classe mais geral de controladores de ordem fixa, além de considerar a norma \mathcal{H}_2 para critério de desempenho.

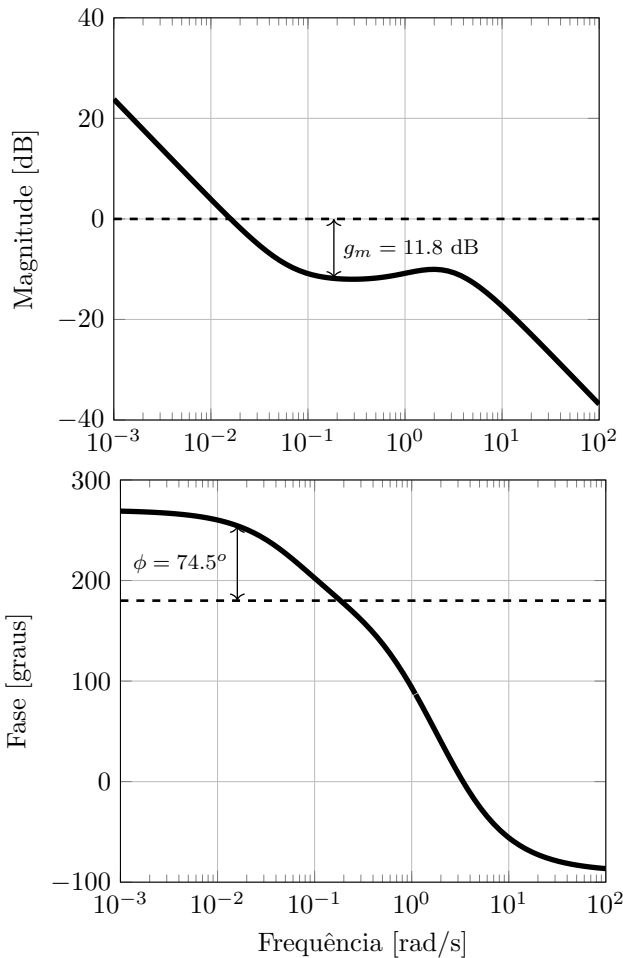


Figura 6. Diagrama de Bode de $P_u(s)C(s)$ mostrando margens de estabilidade sendo atendidas de forma que $\phi = 74.5^\circ > 28.95^\circ$ e $g_m = 11.8 \in [-3.5218, \infty]$ dB.

REFERÊNCIAS

- Balandin, D.V. and Kogan, M.M. (2019). Multi-objective generalized \mathcal{H}_2 control. *Automatica*, 99, 317–322.
- Bevrani, H. and Hiyama, T. (2007). Multiobjective PI/PID control design using an iterative linear matrix inequalities algorithm. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 5(2), 117–127.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA.
- Chen, Z., Zha, H., Peng, K., Yang, J., and Yan, J. (2020). A design method of optimal PID-based repetitive control systems. *IEEE Access*, 8, 139625–139633.
- Datta, A., Ho, M.T., and Bhattacharyya, S.P. (2013). *Structure and synthesis of PID controllers*. Springer Science & Business Media.
- Díaz-Rodríguez, I.D. and Bhattacharyya, S.P. (2016). PI controller design in the achievable gain-phase margin plane. In *IEEE 55th Conference on Decision and Control*, 4919–4924. IEEE, Las Vegas.
- Díaz-Rodríguez, I.D., Han, S., and Bhattacharyya, S.P. (2019). *Analytical Design of PID Controllers*. Springer.
- Gahinet, P. and Apkarian, P. (1994). A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(4), 421–448.
- Gonçalves, E., Palhares, R., and Takahashi, R. (2008). A novel approach for $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ robust PID synthesis for uncertain systems. *Journal of Process Control*, 18, 19–26.
- Han, S., Keel, L.H., and Bhattacharyya, S.P. (2018). PID controller design with an \mathcal{H}_∞ criterion. In *3rd IFAC Conference on Advances in Proportional-Integral-Derivative Control PID*, 400–405. IFAC, Belgium.
- Ho, M.T., Datta, A., and Bhattacharyya, S. (1999). Generalizations of the Hermite-Biehler Theorem. *Linear Algebra and Its Applications*, 302, 135–153.
- Ionescu, C.M., Dulf, E.H., Ghita, M., and Muresan, C.I. (2020). Robust controller design: Recent emerging concepts for control of mechatronic systems. *Journal of the Franklin Institute*.
- Magossi, R.F.Q., Bezerra, R.A., Leme, P.V., and Oliveira, V.A. (2017). PID controller design based on \mathcal{H}_∞ performance. In *2017 Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI*. SBA, Porto Alegre.
- Musch, H.E. and Steiner, M. (1997). Tuning advanced PID controllers via direct \mathcal{H}_∞ norm minimization. In *1997 European Control Conference (ECC)*, 646–651. ECC, Brussels, Belgium.
- Saeki, M. (2006). Fixed structure PID controller design for standard \mathcal{H}_∞ control problem. *Automatica*, 42(1), 93–100.
- Shankar P. Bhattacharyya, A.D. and Keel, L.H. (2009). *Linear Control Theory: Structure, Robustness, and Optimization*. Automation and Control Engineering. CRC Press, Boca Raton, 1 edition.
- Shimizu, K. (2016). Dynamic output feedback control and dynamic PID control for linear MIMO systems via LMI. In *2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, 978–983. IEEE, Buenos Aires, Argentina.
- Verma, B. and Padhy, P.K. (2018). Optimal PID controller design with adjustable maximum sensitivity. *IET Control Theory Applications*, 12(8), 1156–1165.
- Yu, H., Guan, Z., Chen, T., and Yamamoto, T. (2020). Design of data-driven PID controllers with adaptive updating rules. *Automatica*, 121, 109185.