

Otimização de Trajetórias em Relação ao Tempo em Manipulador Hidráulico

Gabriel de Borba Luche* Eduardo André Perondi**

* Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS, (e-mail: deborbaluche@gmail.com)

** Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS, (e-mail: eduardo.perondi@ufrgs.br)

Abstract: This work deal with time-optimal trajectory planning strategy for a serial manipulator with linear hydraulic actuators. An conception of trajectories, allows an increase in the performance of robotic manipulators based on a determined specification, with this work being used or the aspect of reducing trajectory time, an approach that allows reduce the manipulator's work cycle and increase his productivity. The method used is based in convex optimization and on the premise of application in tasks with predefined paths applied in the workspace, which are the main ones mapped in the actuator space for the application of the planning algorithm. Generated trajectories have their third continuous time derivative, requirement necessary due to the characteristics of the controllers the use in inverse dynamics techniques, typically used in manipulators with hydraulic actuators. As the elaborated trajectories must be feasible with manipulator's particulars, avoid regions that exceed the physical limits. The results obtained from different geometric path and constraints values of kinematic and dynamic quantities are also compared, in order to analyze the influences of these limits in the trajectories.

Resumo: Este trabalho aborda uma estratégia de planejamento de trajetórias de tempo ótimo para um manipulador serial com atuadores hidráulicos lineares. A elaboração de trajetórias, permite acréscimo no desempenho de manipuladores robóticos a partir de um determinado critério, sendo utilizado neste trabalho o aspecto da redução do tempo de trajetória, enfoque que permite que o ciclo de trabalho do manipulador seja reduzido e, desta forma, aumente sua produtividade. O método utilizado baseia-se em otimização convexa e na premissa da aplicação em tarefas com caminhos previamente definidos no espaço de trabalho, os quais são mapeados no espaço de atuador para permitir a aplicação do algoritmo de planejamento. As trajetórias obtidas possuem sua terceira derivada temporal contínua, requisito necessário devido às características dos controladores baseados em técnicas de dinâmica inversa, tipicamente utilizados em manipuladores com atuadores hidráulicos. As trajetórias elaboradas devem ser adequadas às características do manipulador enfocado, evitando regiões em que ultrapassem os seus limites físicos. São comparados os resultados obtidos a partir de diferentes caminhos geométricos e diferentes valores limites das grandezas cinemática e dinâmicas, de modo a analisar a influências de restrições nas trajetórias obtidas.

Keywords: Trajectory Planning; Hydraulic Manipulator; Convex Optimization.

Palavras-chaves: Planejamento de Trajetória; Manipulador Hidráulico; Otimização Convexa.

1. INTRODUÇÃO

Manipuladores robóticos são máquinas programáveis com alto nível de automação e versatilidade. Estes podem substituir pessoas em locais perigosos ou insalubres, sendo aplicados em tarefas de soldagem, transferência de materiais, pinturas e montagens, dentre outras (Groover, 2011; Siciliano et al., 2008). A utilização de robôs em tarefas com caminhos predefinidos é algo recorrente em aplicações industriais, situação em que o tempo de trajetória está diretamente ligado ao ciclo de trabalho e, portanto, relacionado com a produtividade e ganhos econômicos, aspectos sempre relevantes nas atividades industriais. Nem sempre a utilização de atuadores de alta potência se justifica como forma de redução de ciclo de trabalho, visto que seu volume

e inércia também aumentam, além de resultar em incremento de custos e consumo de energia. Desta forma, desde a década de 1980, os estudos relacionados à otimização de trajetórias em relação ao tempo vêm crescendo, visto que possibilita que o mesmo dispositivo realize a mesma tarefa com menor tempo de duração (Bobrow et al., 1985; Muller et al., 2012).

A fim de obter soluções com maior aplicabilidade prática, visto que os métodos de Bobrow et al. (1985), e Shin and McKay (1985), apresentam problemas tanto para implementação de leis de controle quanto relacionadas às características físicas dos manipuladores robóticos. Pfeiffer and Johanni (1986), propõem a utilização de controle ótimo, programação dinâmica e adicionam critérios relacionados ao quadrado da velocidade e do torque para encontrar tra-

jetórias ótimas em relação ao tempo que apresentem maior suavidade. Shiller (1996), também utiliza parametrização do caminho para otimização de trajetórias em relação ao tempo através de *shooting methods* e princípios de controle ótimo. Ainda acrescenta à função objetivo uma parcela relacionada ao consumo energético, aumentando assim, o tempo de percurso, mas com trajetórias mais suaves, diminuindo as variações bruscas de torque.

A partir da proposta desenvolvida por Verscheure et al. (2009), métodos que envolvem parametrização de caminhos e otimização convexa têm sido aplicados pelas características desse tipo de problema em relação à garantia de solução ótima global e à existência de métodos consolidados de solução. Seguindo a mesma linha de otimização convexa e parametrização do caminho, Reynoso-Mora et al. (2016), utilizam *splines* normalizadas de grau dois para garantir continuidade de velocidade e aceleração em trajetórias de tempo ótimo. Utilizam variáveis de relaxação na função objetivo para reduzir o *jerk*, mas sem limitá-lo a valores específicos. Apresentam ainda a utilização de um modelo dinâmico com forças de atrito (Coulomb e viscoso) junto ao problema de otimização. Outros autores também seguem essa linha de pesquisa, como, Zhang et al. (2013) e Kong et al. (2013) que utilizam aproximações do *jerk* para imposição de restrições no planejamento de trajetórias. Palleschi et al. (2019) também utilizam os mesmos conceitos e, juntamente relaxação de McCorminck, propõem a imposição restrições puramente cinemáticas.

A aplicabilidade das trajetórias desejadas depende tanto da técnica de controle aplicada quanto da compatibilidade dessas com as características cinemática e dinâmicas do manipulador. É necessário, por exemplo, que o torque disponível nos atuadores seja suficiente seguir determinada trajetória, evitando dessa forma a ocorrência da saturação dos mesmos, ou que, para seguimento da referência não sejam necessárias variações bruscas de aceleração de modo a dinâmica do atuador seja suficientemente rápida para fornecer os torque e forças adequadamente.

Assim, enfocando manipuladores hidráulicos seriais, este trabalho propõe o planejamento de trajetórias que aumentem a produtividade através da redução do ciclo de trabalho em tarefas com caminho predeterminado. Para isso, considera-se os requisitos físicos do manipulador relacionados às suas limitações cinemáticas e dinâmicas, bem como, trajetórias compatíveis com os controladores tipicamente utilizados nesses sistemas, que requisitam que essas trajetórias tenham terceira derivada temporal contínua. A abordagem utilizada se diferencia das demais apresentadas pela utilização de otimização convexa junto à parametrização do caminho a partir de um modelo dinâmico que considera efeitos dissipativos para obtenção de trajetórias de *jerk* contínuo considerando restrições cinemáticas e dinâmicas.

Este trabalho é baseado no robô serial de 2 GDL utilizado por Valdiero (2005) e está organizado em seis seções: a Seção 2 apresenta o modelo matemático dos manipuladores hidráulicos, tanto da estrutura mecânica quanto dos atuadores presentes. Na Seção 3 são apresentados os métodos de obtenção dos valores limites de velocidade, aceleração, *jerk* e força que o manipulador pode alcançar. Na Seção 4 é apresentada a formulação do problema de otimização,

assim como, a adequação para a aplicação de solução que permita implementação computacional e a obtenção do ponto ótimo global. Na Seção 5 são apresentados os resultados para diferentes caminhos geométricos, assim como, para diferentes limitações cinemáticas e dinâmicas. Por último, na Seção 6 são apresentadas as conclusões.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Robôs hidráulicos apresentam uma dinâmica complexa devido ao acomplamento de duas dinâmicas não lineares, uma associada à estrutura mecânica do braço e outra aos atuadores hidráulicos. Visto que, o torque presente nos elos varia tanto conforme a força aplicada pelos atuadores quanto pela posição de junta dos elos (ou das hastes), ao mesmo que tempo o torque produzido tende a alterar essas mesmas posições e provocar mudanças de velocidades, fatores que influem também na dinâmica dos atuadores.

O método de Euler-Lagrange é baseado nas energias potenciais e cinéticas do manipulador, onde o modelo dinâmico resultante é dado pela variação de energia do sistema mecânico em relação às variáveis de atuador e da força dos cilindros hidráulicos. Desta forma, o modelo dinâmico de um manipulador obtido a partir do método de Euler-Lagrange pode ser expresso através da Equação (1) (Siciliano et al., 2008).

$$\mathbf{H}(\mathbf{y})\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{G}(\mathbf{y}) + \mathbf{F}_V(\dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{F}_c(\mathbf{y}) = \mathbf{F}_H \quad (1)$$

onde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de coordenadas generalizadas de atuador; $\mathbf{H}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica quadrada que representa a inércia do sistema; $\mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa os efeitos centrífugos e de coriolis; $\mathbf{G}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor que representa as forças gravitacionais; $\mathbf{F}_H \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de forças oriundas dos atuadores; $\mathbf{F}_V(\dot{\mathbf{y}}) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de forças de atrito que considera termos de atrito de Newton; $\mathbf{F}_c(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de forças de atrito que considera termos de atrito de Coulomb.

O atuadores hidráulicos são controlados através da aplicação de sinal elétrico (u) em uma bobina que, ao ser energizada, provoca deslocamento x_v no carretel da válvula através de forças eletromagnéticas. Não circulando corrente elétrica pela bobina, o carretel permanece centralizado na válvula, bloqueando os orifícios de controle e desta forma impedindo a passagem de fluido. Ao energizar a bobina, o fluxo magnético oriundo da corrente deslocará o carretel de controle, assim, por exemplo, quando este é movido, os orifícios de controle da válvula são abertos, ocorrendo, desta forma, a conexão entre a fonte de pressão (p_s) e a câmara A, proporcionando aumento de sua pressão interna e o surgimento de vazão do fluido hidráulico Q_a no sentido válvula-cilindro. Visto que a pressão na câmara A será maior que na câmara B, conectada ao reservatório também através da válvula, ocorre no êmbolo a ação de uma força hidráulica diferencial que tende a deslocar a haste do cilindro. Desta forma, há o retorno de óleo para o reservatório do fluido presente na câmara B, vazão Q_b , no sentido cilindro-reservatório. A diferença de pressão entre as câmaras sob as faces do êmbolo, faz surgir uma força hidráulica que altera a posição y do mesmo. Dentre as principais não linearidades presentes, destacam-se a relação

entre vazão e pressão nos pórticos, a saturação devido ao deslocamento máximo do carretel, o atrito no carretel e no pistão e a zona morta da válvula (Valdiero, 2005; Cunha, 2001).

A dinâmica do carretel da válvula é obtida através da aplicação da 2ª lei de Newton e pode ser reescrita através da Equação (2).

$$\ddot{x}_v + \omega_v^2 x_v + 2\zeta_v \omega_v \dot{x}_v = \frac{K_f}{K_v R_b} \omega_v^2 u \quad (2)$$

onde ω_v é a frequência natural da válvula; ζ_v é o fator de amortecimento; R_b é a resistência elétrica da bobina; K_v é a constante elástica da mola de realimentação; K_f é uma constante que relaciona a corrente do solenóide com a força aplicada no carretel; \dot{x}_v e \ddot{x}_v são velocidade e aceleração, respectivamente, do carretel da válvula.

Como descrito de forma qualitativa, as vazões das câmaras do cilindro são fenômenos importantes a serem modelados, sendo estas dependentes do deslocamento x_v , visto que este altera a área do orifício entre o carretel e o pósito. Além da área do orifício, a diferença de pressão entre a câmara do cilindro e o interior da válvula também influenciam a vazão. Para tal dedução, utiliza-se a Equação de Bernoulli para obter as vazões Q_a e Q_b , expressas pelas equações (3) e (4), respectivamente (Cunha, 2001).

$$Q_a(x_v, p_a) = k_{sa} x_v g_1(p_a, \text{sign}(x_v)) \quad (3)$$

$$Q_b(x_v, p_b) = -k_{sb} x_v g_2(p_b, \text{sign}(x_v)) \quad (4)$$

onde Q_a e Q_b correspondem às vazões das câmaras e p_a e p_b correspondem às respectivas pressões. A correspondência das variáveis com as câmaras feita através do subscrito das mesmas; k_{sa} e k_{sb} são coeficientes de vazão que variam em função do deslocamento x_v e das características geométricas da válvula. Por simplificação, Valdiero (2005) considera esses termos constantes. As funções g_1 e g_2 são definidas através das equações (5) e (6), respectivamente.

$$g_1(p_a, \text{sign}(x_v)) = \sqrt{\Delta p} = \begin{cases} \sqrt{p_s - p_a}, & x_v \geq 0 \\ \sqrt{p_a - p_r}, & x_v < 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$g_2(p_b, \text{sign}(x_v)) = \sqrt{\Delta p} = \begin{cases} \sqrt{p_b - p_r}, & x_v \geq 0 \\ \sqrt{p_s - p_b}, & x_v < 0 \end{cases} \quad (6)$$

onde p_s é a pressão de suprimento; p_r é a pressão de reservatório; Δp corresponde à queda de pressão no orifício da válvula.

A análise da variação das pressões nas câmaras do cilindro pode ser obtida a partir da aplicação do princípio de continuidade. Segundo Valdiero (2005), as variações de pressão nas câmaras do cilindro são expressas pelas equações (7) e (8), respectivamente.

$$\frac{dp_a}{dt} = f_a(y)(Q_a(x_v, p_a) - A_a \dot{y}) \quad (7)$$

$$\frac{dp_b}{dt} = f_b(y)(Q_b(x_v, p_b) - A_b \dot{y}) \quad (8)$$

onde A_a e A_b são as áreas dos êmbolos das câmaras do cilindro; $f_a(y)$ e $f_b(y)$ são funções expressas pelas equações (9) e (10):

$$f_a(y) = \frac{\beta}{V_a(y)} = \frac{\beta}{V_{a0} + A_a y} \quad (9)$$

$$f_b(y) = \frac{\beta}{V_b(y)} = \frac{\beta}{V_{b0} + A_b y} \quad (10)$$

onde β é o módulo de elasticidade do fluido; $V_a(y)$ e $V_b(y)$ são os volumes das câmaras A e B , respectivamente, e V_{a0} e V_{b0} são os respectivos volumes iniciais das câmaras A e B acrescidos volumes das tubulações.

F_H é a força hidráulica produzida pelos atuadores e é dada pela Equação (11).

$$F_H = A_a p_a - A_b p_b \quad (11)$$

3. RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS E DINÂMICAS

Levando em conta as características de um manipulador serial de 2 GDL com atuadores hidráulicos lineares e os parâmetros físicos obtidos por Valdiero (2005), as restrições relacionadas à velocidade e à força são facilmente identificadas. A primeira restrição é especificada pelo fabricante do atuador (± 0.5 m/s). Já, a restrição de força pode ser obtida a partir da condição em que uma das câmaras do atuador se encontra na pressão de suprimento (p_s) e a outra na pressão atmosférica do reservatório (p_r) (0 bar manométrico). Desta forma, utilizando a Equação (11), os vetores de forma máxima ($\overline{\mathbf{f}_H}$) e mínima ($\underline{\mathbf{f}_H}$) são dados, respectivamente, pelas equações (12) e (13).

$$\overline{\mathbf{f}_H} = \begin{bmatrix} A_{a1} p_{sup} - A_{b1} 0 \\ A_{a2} p_{sup} - A_{b2} 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{\mathbf{f}_H} = \begin{bmatrix} A_{a1} 0 - A_{b1} p_{sup} \\ A_{a2} 0 - A_{b2} p_{sup} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Para determinar o limite de aceleração do manipulador, é aplicado o conceito de massa equivalente. A massa equivalente de um elo refere-se à massa concentrada do elo em um único ponto, com vista de fornecer um valor de momento de inércia, conforme o teorema de Steiner, semelhante à relação existente entre a estrutura do elo com seu eixo de rotação. Devido ao movimento rotacional de junta do robô em estudo, a posição do êmbolo do atuador acaba alterando a massa equivalente acoplada à haste, visto que, também altera o momento de inércia em relação a mesma.

Dessa forma, para cálculo de aceleração máxima ($\overline{\mathbf{Acc}}$) e mínima ($\underline{\mathbf{Acc}}$) são utilizadas todas posições possíveis de \mathbf{y} , variando tanto y_1 quanto y_2 , posição dos atuadores 1 e 2, respectivamente, do seu curso mínimo até o seu curso máximo, conforme a Equação (14). Repete-se o mesmo processo para velocidade, conforme Equação (15), fazendo com que neste caso $\dot{\mathbf{y}}$ assumam todos os valores possíveis.

Evidentemente, a varredura numérica é feita a partir de incrementos discretos das variáveis independentes. Feitas essas considerações, isola-se $\ddot{\mathbf{y}}$ da Equação (1), substituindo \mathbf{y} por $\mathbf{y}_{i,j}$ e $\dot{\mathbf{y}}$ por $\dot{\mathbf{y}}_{m,n}$, resultando nas equações (16) e (17) que determinam, respectivamente, as acelerações máximas e mínimas.

$$\mathbf{y}_{i,j} = \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2j} \end{bmatrix}; \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, N; \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_{m,n} = \begin{bmatrix} \dot{y}_{1m} \\ \dot{y}_{2n} \end{bmatrix}; \quad m = 1, \dots, M; \quad n = 1, \dots, M; \quad (15)$$

$$\overline{\mathbf{Acc}} = \max(\mathbf{H}(\mathbf{y}_{i,j})^{-1}[\overline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}} - \mathbf{C}(\mathbf{y}_{i,j}, \dot{\mathbf{y}}_{m,n})\mathbf{v}_{max} - \mathbf{G}(\mathbf{y}_{i,j}) - \mathbf{F}_c(\mathbf{y}_{i,j}) - \mathbf{F}_V(\dot{\mathbf{y}}_{m,n})]) \quad (16)$$

$$\underline{\mathbf{Acc}} = \min(\mathbf{H}(\mathbf{y}_{i,j})^{-1}[\underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}} - \mathbf{C}(\mathbf{y}_{i,j}, \dot{\mathbf{y}}_{m,n})\dot{\mathbf{y}}_{m,n} - \mathbf{G}(\mathbf{y}_{i,j}) - \mathbf{F}_c(\mathbf{y}_{i,j}) - \mathbf{F}_V(\dot{\mathbf{y}}_{m,n})]) \quad (17)$$

onde N é o número de pontos nos quais deseja-se discretizar o curso dos atuadores; onde M é o número de pontos que se deseja discretizar a velocidade; sendo y_{11} e y_{1N} os valores mínimos e máximos de posição do atuador 1 e $y_{1i} - y_{1(i+1)}$ um valor constante; sendo y_{21} e y_{2N} os valores mínimos e máximos de posição do atuador 2 e $y_{2j} - y_{1(2+1)}$ um valor constante; sendo \dot{y}_{11} e \dot{y}_{1M} , os valores mínimos e máximos de velocidade do atuador 1 e $\dot{y}_{1m} - \dot{y}_{1(m+1)}$ um valor constante; sendo \dot{y}_{21} e \dot{y}_{2M} os valores mínimos e máximos de velocidade do atuador 2 e $\dot{y}_{2n} - \dot{y}_{2(n+1)}$ um valor constante.

Considerando a complexa dinâmica do robô de enfoque deste trabalho, utiliza-se dois critérios alternativos para obter os limites de *jerk* , sendo utilizados os valores mais conservadores obtidos por intermédio desses dois métodos (o menor valor entre os dois valor máximos e maior valor entre os limites mínimos de *jerk*).

No primeiro critério para estabelecer as limitações de *jerk* , em função das mesmas razões ligadas às variações da massa equivalente em relação à posição da haste do atuador e variação de velocidade, utiliza-se as equações (7) e (8) em conjunto com a derivada temporal da Equação 11 para obter a variação da força do atuador e, desta forma, estimar os limites de *jerk* máximos e mínimos, \overline{jerk}_α e \underline{jerk}_α , respectivamente, através da Equação (18), onde são usados valores entre máxima e mínima velocidade ($\dot{\mathbf{y}}_{m,n}$) e valores de máxima e mínima tensão de controle das válvulas (u).

$$\begin{aligned} \frac{dp_{ak}}{dt} &= f_a(y_{i,j})(Q_a(u_{max}, p_{sup}) - A_a \dot{y}_{kM}) \\ \frac{dp_{bk}}{dt} &= f_b(y_{i,j})(Q_b(u_{max}, p_{sup}) - A_b \dot{y}_{kM}) \\ \overline{jerk}_\alpha &= \max \left(H_{k,k}(\mathbf{y}_{i,j})^{-1} \left(A_{ak} \frac{dp_{ak}}{dt} - A_{bk} \frac{dp_{bk}}{dt} \right) \right) \\ \underline{jerk}_\alpha &= \min \left(H_{k,k}(\mathbf{y}_{i,j})^{-1} \left(A_{ak} \frac{dp_{ak}}{dt} - A_{bk} \frac{dp_{bk}}{dt} \right) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Na Equação 18, $k = 1, 2$; u_{max} é a tensão máxima da válvula; u_{min} é a tensão mínima da válvula.

O segundo critério utilizado para limitação de *jerk* envolve a dinâmica da válvula, expressa na Equação (2), a qual pode ser interpretada como um filtro passa-baixas de segunda ordem com frequência de corte igual à frequência natural da válvula (ω_n). Portanto, considerando um sinal de controle harmônico e desprezando efeitos ressonantes amplificadores dos atuadores e da estrutura do braço, pode-se estimar que a frequência que causará maiores *jerk* será igual ou menor à frequência natural da válvula. Dessa forma, pode-se estimar as restrições de *jerk* a partir das restrições da aceleração, visto que, para sinais estacionários e harmônicos, é fácil a obtenção da primeira derivada temporal. Os limites de *jerk* máximos e mínimos, \overline{jerk}_β e \underline{jerk}_β , respectivamente, podem ser expressos por meio da Equação (19).

$$\begin{aligned} \overline{jerk}_\beta &= \omega_n \overline{\mathbf{Acc}} \\ \underline{jerk}_\beta &= \omega_n \underline{\mathbf{Acc}} \end{aligned} \quad (19)$$

Desta forma, a partir dos parâmetros físicos utilizados por Valdiero (2005) e dos procedimentos apresentados, as restrições impostas no planejamento de trajetórias são obtidas. Estes resultados estão apresentados a seguir, na Tabela 1.

Tabela 1. Limites cinemáticos e dinâmicos do manipulador com atuadores lineares.

| | Atuador 1 | Atuador 2 |
|------------------------|--|--|
| Velocidade Máxima | 0,5 m/s | 0,5 m/s |
| Velocidade Mínima | -0,5 m/s | -0,5 m/s |
| Aceleração Máxima | 11,55 m/s ² | 57,87 m/s ² |
| Aceleração Mínima | -10,21 m/s ² | -32,38 m/s ² |
| Jerk Máximo Critério 1 | 6,31 10 ⁵ m/s ³ | 2,40 10 ⁶ m/s ³ |
| Jerk Mínimo Critério 1 | -1,19 10 ⁵ m/s ³ | -4,69 10 ⁵ m/s ³ |
| Jerk Máximo Critério 2 | 788,12 m/s ³ | 36361 m/s ³ |
| Jerk Mínimo Critério 2 | -696,38 m/s ³ | -2208 m/s ³ |
| Força Máxima | 1473 N | 1473 N |
| Força Mínima | -762 N | -762 N |

Ressalta-se que, a partir dos resultados dos critérios 1 e 2 para limite de *jerk* , são utilizados os valores mais conservadores. Neste caso, os limites apresentados na Tabela 1 são os obtidos a partir do segundo critério, através da Equação 19.

4. PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA

Baseado na metodologia de otimização convexa de trajetórias em relação ao tempo desenvolvida Verscheure et al. (2009), e nos trabalhos de Reynoso-Mora et al. (2016) e Kong et al. (2013) que o seguiram, são propostas modificações nessas metodologias de modo que se obtenha trajetórias de tempo ótimo com restrições cinemáticas e dinâmicas e *jerk* contínuos.

4.1 Parametrização do Caminho

Dado um caminho geométrico mapeado no espaço de atuador $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$, é possível parametrizá-lo através de uma função escalar normalizada e monótona s , ou seja, $s(t) \in [0, 1]$ e $\dot{s}(t) > 0 \forall 0 < t < tf$, propriedades que

garantem uma transformação injectiva entre s e t , ou seja, s possui uma única correspondência em t e vice-versa. Assim, pressupondo que \mathbf{y} possui terceira derivada contínua em relação a s , pode-se obter velocidade, aceleração e *jerk* no espaço de atuador em função de s através da regra da cadeia, conforme mostra a Equação (20).

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{y}(s)' \dot{s} \\ \ddot{\mathbf{y}} &= \mathbf{y}(s)' \ddot{s} + \mathbf{y}(s)'' \dot{s}^2 \\ \dddot{\mathbf{y}} &= \mathbf{y}(s)' \dddot{s} + 3\mathbf{y}(s)'' \ddot{s} \dot{s} + \mathbf{y}(s)''' \dot{s}^3\end{aligned}\quad (20)$$

onde $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$; $\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$; $\dddot{s} = \frac{d^3s}{dt^3}$; $(\)' = \frac{\partial(\)}{\partial s}$;
 $(\)'' = \frac{\partial^2(\)}{\partial s^2}$; $(\)''' = \frac{\partial^3(\)}{\partial s^3}$.

A partir da Equação (20), utilizando o modelo dinâmico em função das variáveis de atuador, expresso por meio da Equação (1), obtém-se a Equação (21), a qual fornece o modelo dinâmico em função de s .

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{y}(s))[\mathbf{y}''(s)\dot{s}^2 + \mathbf{y}'\ddot{s}] + \mathbf{C}(\mathbf{y}(s), \mathbf{y}'(s)\dot{s})\mathbf{y}'(s)\dot{s} + \\ \mathbf{G}(\mathbf{y}(s)) + \mathbf{F}_{c\text{sign}}(\mathbf{y}'\dot{s}) + \mathbf{F}_V \mathbf{y}'\dot{s} = \mathbf{f}_H\end{aligned}\quad (21)$$

Como $\dot{s} > 0$, então $\mathbf{F}_{c\text{sign}}(\mathbf{y}'\dot{s}) = \mathbf{F}_{c\text{sign}}(\mathbf{y}')$, a partir da álgebra linear é possível mostrar que $\mathbf{C}(\mathbf{y}(s), \mathbf{y}'(s)\dot{s})\mathbf{y}'(s)\dot{s} = \mathbf{C}(\mathbf{y}(s), \mathbf{y}'(s))\mathbf{y}'(s)\dot{s}^2$, conforme Verscheure et al. (2009).

As expressões \ddot{s} , \dot{s} , \dot{s}^2 e $\mathbf{f}_H(s)$ são funções de s e devem ser otimizadas de modo a reduzir o tempo de percurso do caminho geométrico $\mathbf{y}(s)$.

Utilizando as seguintes definições $a(s) := \ddot{s}$, $b(s) := \dot{s}^2$, $c(s) := \dot{s}$, escreve-se (22) a partir de (21). Desta forma, $b(s) > 0$, $\dot{b}(s) = b'(s)\dot{s} = 2\dot{s}\ddot{s}$, $b'(s) = 2a(s)$ e $c(s) = \sqrt{b(s)}$.

$$\mathbf{X}(s)a(s) + \mathbf{Y}(s)b(s) + \mathbf{Z}(s)c(s) + \mathbf{W}(s) = \mathbf{f}_H\quad (22)$$

onde $\mathbf{X}(s) = \mathbf{H}(\mathbf{y}(s))\mathbf{y}'$; $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(\mathbf{y}(s))\mathbf{y}''(s) + \mathbf{C}(\mathbf{y}(s), \mathbf{y}'(s))\mathbf{y}'$; $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{F}_V \mathbf{y}'$; $\mathbf{W}(s) = \mathbf{F}_{c\text{sign}}(\mathbf{y}') + \mathbf{G}(\mathbf{y}(s))$.

De modo que, devido ao caminho ser predefinido, $\mathbf{y}(s)$, $\mathbf{y}'(s)$, $\mathbf{y}''(s)$ e $\mathbf{y}'''(s)$ já são conhecidos e, portanto, podem ser calculados $\mathbf{X}(s)$, $\mathbf{Y}(s)$, $\mathbf{Z}(s)$ e $\mathbf{W}(s)$. Como o método de parametrização aplicado é genérico, pode-se substituir um modelo dinâmico multi-estado, como, por exemplo, de um robô de 6 GDL, por um sistema com apenas dois estados (s , \dot{s}).

4.2 Problema de Otimização

A partir da propriedade de s ser monótona, na Equação (23) escreve-se o tempo de trajetória (tf) em função de s .

$$tf = \int_0^{tf} dt = \int_0^1 \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} ds = \int_0^1 \frac{1}{c(s)} ds\quad (23)$$

Para que o tempo de trajetória seja reduzido, $c(s)$ deve ser assumir valores elevados, e, para evitar singularidades,

$c(s) \neq 0$. Visando à obtenção de trajetórias que tenham velocidade nula nos seus instantes inicial e final, o que implica em $c(0) = c(1) = 0$, o tempo total de trajetória é reescrito, onde é considerado que $c(s) \neq 0 \forall 0 < s < 1$. Desta forma, os limites de integração inferior e superior são substituídos por 0_+ e 1_- , respectivamente.

A partir das necessidades do uso de limites para velocidade, aceleração, *jerk* e força para planejamento de trajetórias factíveis e da utilização de uma função objetivo que vise a diminuir o tempo de percurso do manipulador, utiliza-se as equações (20), (22) e (23) para formular o problema de trajetórias de tempo ótimo em relação ao tempo através da Equação (24) (Kong et al., 2013).

$$\min \left(\int_{0_+}^{1_-} \frac{1}{c(s)} ds \right) \quad \text{então}$$

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{f}}_H \leq \mathbf{X}(s)a(s) + \mathbf{Y}(s)b(s) + \mathbf{Z}(s)c(s) + \mathbf{W}(s) \leq \overline{\mathbf{f}}_H \\ (\mathbf{y}(s)')^2 b(s) \leq \overline{\mathbf{y}}^2 \\ \underline{\ddot{\mathbf{y}}} \leq \mathbf{y}(s)'a(s) + \mathbf{y}(s)''b(s) \leq \overline{\ddot{\mathbf{y}}} \\ (*) \mathbf{y}(s)'f(s)c(s) + 3\mathbf{y}(s)''a(s)c(s) + \mathbf{y}(s)'''b(s)c(s) \leq \overline{\ddot{\mathbf{y}}} \\ (**) \underline{\ddot{\mathbf{y}}} \leq \mathbf{y}(s)'f(s)c(s) + 3\mathbf{y}(s)''a(s)c(s) + \mathbf{y}(s)'''b(s)c(s) \\ (***) c(s) = \sqrt{b(s)} \\ \forall s \in [0_+, 1_-] \\ (24)\end{aligned}$$

onde $f(s) := \ddot{s}/\dot{s}$; $b''(s) = 2f(s)$; $\overline{(\)}$ e $\underline{(\)}$ representam os respectivos limites máximos e mínimos de uma grandeza.

O problema descrito por meio da Equação (24) apresenta os equacionamentos necessários para a obtenção de trajetórias de tempo ótimo. O problema apresenta função objetivo convexa, restrições lineares e pode ser escrito a partir de funções afim de s . No entanto, não é possível a aplicação de métodos de otimização convexa visto que o problema não é convexo devido à presença de equacionamentos não lineares que comprometem a convexidade nos termos (*),(**) e (***) da Equação (24). Objetivando que o equacionamento aumente o espaço de soluções possíveis, mas possua convexidade, é possível reescrever o termo (***) como $c(s)^2 \leq b(s) \leq c(s)^2$. Desse modo, a igualdade tem equivalência a duas inequações, visto que para esse caso a única solução possível é $b(s) = c(s)^2$. A primeira inequidade ($c(s)^2 \leq b(s)$) é convexa e a segunda ($b(s) \leq c(s)^2$) é côncava. Dessa forma, é desprezada a parcela côncava da igualdade para que o equacionamento seja convexo. Resultando na restrição hiperbólica relaxada $c(s)^2 \leq b(s)$.

Com o intuito de linearizar as restrições e tornar convexo o problema de otimização, utiliza-se a igualdade $d(s) := 1/c(s)$, onde $d(s)$ é uma nova variável de otimização. De forma análoga à realizada com o termo $c(s) = \sqrt{b(s)}$, também é feita a equivalência da igualdade a partir da transformação desta em duas inequidades $d(s) \leq 1/c(s)$ e $d(s) \leq 1/c(s)$, cuja intersecção, apresenta correspondência à respectiva igualdade. Do mesmo modo, é desprezado o termo côncavo.

A partir da inserção da variável $d(s)$ e das relaxações apresentadas, o problema de otimização (24) pode ser reescrito. Isto resulta em um problema contínuo com função objetivo e restrições lineares, escrito a partir das variáveis de caminho (s, \dot{s} e \ddot{s}) com limitações de torque, velocidade, aceleração e *jerk*. No entanto, para sua aplicação numérica, deve-se modificá-lo adequadamente para implementação computacional. Dessa forma, sendo $b(s), c(s) \geq 0$, reescreve-se as restrições hiperbólicas $c(s)^2 \leq b(s)$ e $1 \leq c(s)d(s)$ como restrições cônicas de segunda ordem. Isto permite sua aplicação em ferramentas para *Second-order Cone Program* (SOCP), conforme Boyd and Vandenberghe (2004), viabilizando a utilização de pacotes específicos para essa classe de problemas, como, por exemplo, através do *software MATLAB*.

4.3 Discretização Numérica

Outra etapa importante no processo de solução é a discretização do problema para implementação computacional. Dessa forma, divide-se um caminho geométrico pertencente ao plano de trabalho do robô em N pontos e, a partir da cinemática inversa, é determinado o mapeamento desses no espaço de atuador. Assim, são obtidos os pontos $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N$ e feita sua parametrização através de $s^1 = 0, s^2, \dots, s^{N-1}, s^N = 1$. A partir destes, são realizadas as derivadas discretas de \mathbf{y} em relação a s utilizando diferenças finitas. Dessa forma, são introduzidas no problema um número finito de as variáveis de otimização discretizadas, a^k, b^k, c^k, d^k, f^k e \mathbf{f}_H^k , onde $k = 1, \dots, N$, $a^k = a(s^k)$, $b^k = b(s^k)$, $c^k = c(s^k)$, $d^k = d(s^k)$, $f^k = f(s^k)$ e $\mathbf{f}_H^k = \mathbf{f}_H(s^k)$. Para os casos extremos, pontos inicial e final, $c^1 = c(0_+)$, $c^N = c(1_-)$, $d^1 = d(0_+)$, $d^N = d(1_-)$.

De acordo com a Equação (20), para que a trajetória planejada tenha terceira derivada temporal ($\dddot{\mathbf{y}}$) contínua é necessário que $\mathbf{y}(s)', \mathbf{y}(s)'', \mathbf{y}(s)''', \dot{s}, \ddot{s}$ e \ddot{s} também sejam contínuos. Desta forma, a continuidade da derivadas de $\mathbf{y}(s)$ em relação a s ($\mathbf{y}(s)', \mathbf{y}(s)''$ e $\mathbf{y}(s)'''$) é um requisito para aplicação do método presente.

Com o objetivo de garantir a continuidade necessária das derivadas temporais de s , utiliza-se $b(s)$ (\dot{s}^2) descrito a partir de *splines* normalizadas de terceira ordem com coeficientes $\alpha_{k,m}$ para os segmentos intermediários de trajetória, compreendidos entre o segundo e penúltimo ponto ($k = 2, \dots, N - 2$), de acordo com a Equação (25), implicando em $p = 3$, garantindo que as suas duas primeiras derivadas em relação a s sejam contínuas. Isto garante que \dot{s}, \ddot{s} e \ddot{s} são também contínuos visto que $s(t) > 0$, $\dot{s} > 0$ e as relações $b(s) = \dot{s}^2$, $b(s)' = 2a(s) = 2\dot{s}$, $b(s)'' = 2f(s) = 2\ddot{s}/\dot{s}$. Sendo possível, deste modo, também obter-se $a(s)$ e $f(s)$ nesses trechos a partir das derivadas do polinômio que forma cada trecho das *splines*.

$$b(s) = \sum_{m=0}^p \alpha_{k,m} \left(\frac{s - s_k}{\Delta s_k} \right)^m, \quad s \in [s_k, s_{k+1}] \quad (25)$$

onde $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$.

De modo similar ao realizado com os segmentos intermediários de trajetória, utiliza-se a Equação (25) para descrever $b(s)$ (\dot{s}^2) como *splines* de quinta ordem, implicando em $p = 5$, para o primeiro e o último segmento

de trajetória, compreendendo os trechos entre o primeiro e segundo ponto (1 e 2) e entre o penúltimo e último ponto ($N - 1$ e N), respectivamente. Essa escolha é feita a partir da inclusão das restrições impostas nesses segmentos devido à necessidade de que velocidade, aceleração e *jerk* sejam nulas no primeiro e último pontos de trajetória.

É necessário que os segmentos formados pela Equação (25), assim como suas duas primeiras derivadas, formem curvas contínuas, sendo necessário que os pontos intermediários apresentem mesmo valor tanto em aproximação à esquerda quanto à direita, $b(s_{k+}) = b(s_{k-})$, e que a mesma relação seja válida para suas duas primeiras derivadas, $a(s_{k+}) = a(s_{k-})$ e $f(s_{k+}) = f(s_{k-})$ (Biagiotti and Melchiorri, 2008).

A partir da Equação (25), é possível formar um sistema linear de equações e encontrar os coeficientes ($\alpha_{k,m}$) que descrevem a *spline*. Como forma de simplificar a representação do problema de otimização, utiliza-se a Equação (26), que representa as funções *splines* descritas pela Equação (25).

$$[b^{k+1} \ a^{k+1} \ f^{k+1}] = S(s^k) \quad (26)$$

A partir das relaxações e considerações feitas para a discretização e de que o manipulador possui uma trajetória que as velocidades, acelerações e *jerk* iniciais e finais iguais à zero, define-se que $a^1 = a^N = 0$, $b^1 = b^N = 0$ e $f^1 = f^N = 0$. Assim como os demais termos de restrição do problema de otimização, a integração presente na função objetivo da Equação (24) também é discretizada, sendo realizada sua aproximação através do método de integração de quadratura numérica. Assim, a partir da Equação (24) e da transformação das restrições cônicas e hiperbólicas, é obtida uma solução para o problema discretizado passível de implementação computacional, conforme descrito pela Equação (27).

$$\begin{aligned} & \min \left(\sum_{k=1}^N d^k \Delta s_k \right) \\ & \text{então :} \\ & [b^{k+1} \ a^{k+1} \ f^{k+1}]^T = S(s^k) \\ & \underline{\mathbf{f}}_H \leq \mathbf{X}(s^k)a^k + \mathbf{Y}(s^k)b^k + \mathbf{Z}(s^k)c^k + \mathbf{W}(s^k) \leq \overline{\mathbf{f}}_H \\ & (\mathbf{y}(s^k)')^2 b^k \leq (\overline{\mathbf{y}})^2 \\ & \underline{\ddot{\mathbf{y}}} \leq \mathbf{y}(s^k)' a^k + \mathbf{y}(s^k)'' b^k \leq \overline{\ddot{\mathbf{y}}} \\ & d^k \underline{\ddot{\mathbf{y}}} \leq \mathbf{y}(s^k)' f^k + 3\mathbf{y}(s^k)'' a^k + \mathbf{y}(s^k)''' b^k \leq d^k \overline{\ddot{\mathbf{y}}} \\ & \left\| \begin{array}{c} 2c^k \\ b^k - 1 \end{array} \right\|_2 \leq b^k + 1 \\ & \left\| \begin{array}{c} 2 \\ c^k - d^k \end{array} \right\|_2 \leq c^k + d^k \\ & b^{k'} = 2 a^k \\ & b^{k''} = 2 f^k \\ & c^k, b^k > 0 \\ & \forall k = 2, \dots, N - 1 \\ & a^1 = a^N = 0, \quad b^1 = b^N = 0, \quad f^1 = f^N = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Após a formulação e discretização do problema de otimização de trajetórias, conforme a estratégia apresentada na Seção 4, é possível escrever o problema em um formato padrão, como, por exemplo, no formato *SOCP* (Second-order Cone Program), que permite obter a solução por meio da utilização de programas dedicados para este fim (*solvers*). Assim, no presente caso, utiliza-se, juntamente com o *software MATLAB*, a ferramenta *CVX* (Grant and Boyd (2008, 2014)), que possui autoria comum com a publicação Boyd and Vandenberghe (2004), a qual funciona como interface para utilização do *solver SDPT3*.

5. RESULTADOS

Nesta Seção, serão apresentados os resultados numéricos obtidos a partir do problema de otimização de trajetórias formulado na Seção 4. As análises foram realizadas a partir dos parâmetros do manipulador de 2 GDL com atuadores lineares, presentes em Valdiero (2005). São utilizados três diferentes caminhos predefinidos no espaço cartesiano para avaliação do problema, sendo estes mapeados no espaço de atuador para aplicação do método. Além disso, como forma de avaliar a influência no tempo de trajetória, são testadas situações com diferentes valores limites de restrições cinemáticas e dinâmicas. Os três caminhos geométricos: o Caminho Geométrico 1 é formado por uma elipse; o Caminho Geométrico 2, é composto por uma espiral; o Caminho 3, composto por um segmento de reta.

A partir dos valores nominais dos limites cinemáticos e dinâmicos presentes na Tabela 1, obtidos através dos métodos apresentados na Seção 3, é aplicada a metodologia apresentada na Seção 4 para os três caminhos geométricos predefinidos (elipse, espiral e reta), formando o chamado Teste A.

Para o teste B, com o intuito de analisar as mudanças no tempo de trajetória causadas pelas alterações nos limites de operação do manipulador, propõe-se inicialmente uma mudança em alguns aspectos operacionais do robô, alterando a pressão de suprimento, que, de forma direta, não é uma das restrições utilizadas no problema de planejamento. Alterando p_r de 30 bar para 60 bar.

Como forma de análise a influência do limite de velocidade comportamento do tempo de trajetória, realiza-se o Teste C com o aumento da restrição de velocidade em 50% ($\pm 0,75m/s$) e, apesar da influência desta em outras restrições, os demais limites presentes na Tabela 1 são mantidos.

Os atuadores hidráulicos possuem a capacidade de prover variações elevadas de torque e, conseqüentemente, também de *jerk*, de acordo com os valores apresentados na Tabela 1. Buscando o planejamento trajetórias com valores reduzidos de *jerk* e, por consequência, mais suaves, o valor de restrição dessa grandeza é reduzido. Nos testes D e E, visando ilustrar este comportamento, mostra-se os resultados com uma redução de, respectivamente, 10% e 30% do seu valor original.

Baseado nos resultados prévios, com intuito de obter trajetórias mais suaves e rápidas, realiza-se o Teste F, onde ocorre aumento de 50% da velocidade limite e redução de 70% do valor do limite de *jerk* (quando comparado com a Tabela 1).

O compilado dos resultados dos todos os testes em todos os caminhos estão disponíveis na Tabela 2.

Tabela 2. Compilado dos tempos de trajetória para cada teste e caminho geométrico.

| Teste | Caminho Geométrico 1 | Caminho Geométrico 2 | Caminho Geométrico 3 |
|---------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Teste A | 1,295 s | 1,481 s | 0,4247 s |
| Teste B | 1,259 s | 1,427 s | 0,4068 s |
| Teste C | 0,9827 s | 1,183 s | 0,3179 s |
| Teste D | 1,489 s | 1,755 s | 0,5249 s |
| Teste E | 1,344 s | 1,556 s | 0,4608 s |
| Teste F | 1,036 s | 1,260 s | 0,3197 s |

Como exemplo, demonstra-se a continuidade das curvas de *jerk* obtidas através da aplicação da metodologia proposta no Teste A aplicada ao Caminho Geométrico 1, resultando na Figura 1.

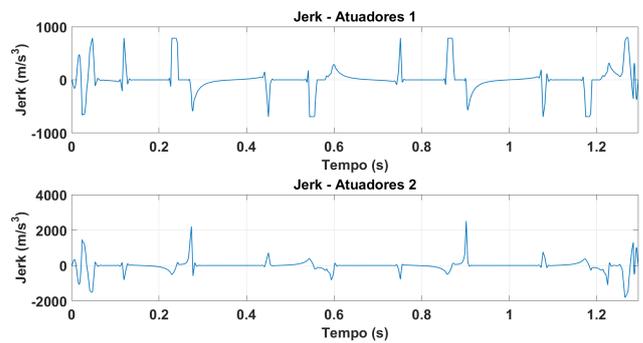


Figura 1. Caminho Geométrico 1 - *Jerk* dos atuadores.

A partir dos tempos de trajetória dos testes aplicados aos três caminhos geométricos utilizados, compilados na Tabela 2, notou-se que, as alterações relacionadas à pressão de suprimento não apresentam resultado significativo na redução do tempo de trajetória. Assim, o principal gargalo para diminuição do tempo de percurso dos caminhos geométricos está vinculado ao limite de velocidade dos atuadores. A redução do limite de *jerk* acrescenta suavidade às trajetórias obtidas mas, tomando como critério a redução do tempo, obtém-se um aumento significativo, a partir da utilização de 10 % do valor nominal de *jerk* e um pequeno aumento para valores de 30 %. Por último, foi realizado o teste para valores de restrição aumentados para velocidade e reduzidos para *jerk*, demonstrando, dessa forma, tempos mais rápidos e suaves quando comparados com os obtidos a partir dos valores nominais de restrição.

6. CONCLUSÃO

O presente trabalho aborda uma análise sobre a aplicação de um método convexo de otimização em relação ao tempo para trajetórias de um robô serial de 2GDL com atuadores hidráulicos lineares. Baseado nos resultados de simulação apresentados na Seção 5, é possível afirmar que o objetivo principal foi atingido, sendo possível realizar o planejamento de trajetórias adequadas às características físicas e aos controladores usualmente utilizados para esses dispositivos, *jerk* contínuo conforme a Figura 1.

Testes com diferentes limites de restrição foram realizados visando a determinar como seus valores afetam o tempo

de trajetória. Por exemplo, o incremento da pressão de suprimentos, resultou no aumento dos valores das restrições de aceleração, força hidráulica e *jerk*, mas representou uma redução pequena nos tempos de trajetória. Por outro lado, um aumento na velocidade limite dos atuadores representou uma redução significativa na duração de trajetória, o que é explicado por dois fatores, o primeiro consiste no conceito que é necessário a utilização de velocidades mais altas para redução do tempo de percurso. O segundo fator está vinculado com a saturação das curvas de velocidade obtidas a partir dos valores iniciais de restrição. Desta forma, para o manipulador utilizado, as limitações para alcançar tempos menores de trajetória está relacionadas mais diretamente aos limites máximo e mínimos de velocidade. Outro aspecto analisado foi o de redução dos limites de *jerk*, o que aumentou o tempo de duração de trajetória, fornecendo, porém, trajetórias mais suaves.

Ressalta-se ainda que a utilização dos métodos de definição dos valores cinemáticos e dinâmicos limites, juntamente com o métodos de otimização de trajetória, pode servir como base para o desenvolvimento de manipuladores, caso um dos aspectos de interesse seja a construção de manipuladores com ciclo de trabalho reduzidos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Laboratório de Mecatrônica e Controle (LA-MECC) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela viabilização do desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Biagiotti, L. and Melchiorri, C. (2008). *Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots*. Springer Berlin Heidelberg. URL <https://books.google.com.br/books?id=FiX1ceRT5zoC>.
- Bobrow, J., Dubowsky, S., and Gibson, J. (1985). Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths. *The International Journal of Robotics Research*, 4(3), 3–17. doi:10.1177/027836498500400301. URL <https://doi.org/10.1177/027836498500400301>.
- Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
- Cunha, M.A.B. (2001). Controle em cascata de um atuador hidráulico: Contribuições teóricas e experimentais. Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Grant, M. and Boyd, S. (2008). Graph implementations for nonsmooth convex programs. In V. Blondel, S. Boyd, and H. Kimura (eds.), *Recent Advances in Learning and Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 95–110. Springer-Verlag Limited. http://stanford.edu/~boyd/graph_dcp.html.
- Grant, M. and Boyd, S. (2014). CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1. <http://cvxr.com/cvx>.
- Groover, M.P. (2011). *Automação industrial e sistemas de manufatura*. Pearson Education do Brasil.
- Kong, M., Ji, C., sheng Chen, Z., and feng Li, R. (2013). Smooth and near time-optimal trajectory planning of robotic manipulator with smooth constraint based on cubic b-spline. In *2013 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. IEEE. doi:10.1109/robio.2013.6739817. URL <https://doi.org/10.1109/robio.2013.6739817>.
- Muller, P.A., Boucherit, R., and Liu, S. (2012). Smooth and time-optimal trajectory planning for robot manipulators. In *2012 American Control Conference (ACC)*. IEEE. doi:10.1109/acc.2012.6315261. URL <https://doi.org/10.1109/acc.2012.6315261>.
- Palleschi, A., Garabini, M., Caporale, D., and Pallottino, L. (2019). Time-optimal path tracking for jerk controlled robots. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 4(4), 3932–3939. doi:10.1109/lra.2019.2929979. URL <https://doi.org/10.1109/lra.2019.2929979>.
- Pfeiffer, F. and Johanni, R. (1986). A concept for manipulator trajectory planning. In *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Institute of Electrical and Electronics Engineers. doi:10.1109/robot.1986.1087500. URL <https://doi.org/10.1109/robot.1986.1087500>.
- Reynos-Mora, P., Chen, W., and Tomizuka, M. (2016). A convex relaxation for the time-optimal trajectory planning of robotic manipulators along predetermined geometric paths. *Optimal Control Applications and Methods*, 37(6), 1263–1281. doi:10.1002/oca.2234. URL <https://doi.org/10.1002/oca.2234>.
- Shiller, Z. (1996). Time-energy optimal control of articulated systems with geometric path constraints. In *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE Comput. Soc. Press. doi:10.1109/robot.1994.350931. URL <https://doi.org/10.1109/robot.1994.350931>.
- Shin, K. and McKay, N. (1985). Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(6), 531–541. doi:10.1109/tac.1985.1104009. URL <https://doi.org/10.1109/tac.1985.1104009>.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., and Oriolo, G. (2008). *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition.
- Valdiero, A.C. (2005). Controle de robôs hidráulicos com compensação de atrito. Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Verscheure, D., Demeulenaere, B., Swevers, J., Schutter, J.D., and Diehl, M. (2009). Time-optimal path tracking for robots: A convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(10), 2318–2327. doi:10.1109/tac.2009.2028959. URL <https://doi.org/10.1109/tac.2009.2028959>.
- Zhang, Q., Li, S.R., and Gao, X.S. (2013). Practical smooth minimum time trajectory planning for path following robotic manipulators. In *2013 American Control Conference*. IEEE. doi:10.1109/acc.2013.6580255. URL <https://doi.org/10.1109/acc.2013.6580255>.