

Regulador Linear Quadrático com Ação Integral e Rejeição de Distúrbios para Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos^{*}

Yago de Castro Souza^{*,**} Thiago Pereira das Chagas^{*,**}
Gildson Queiroz de Jesus^{*,**}

^{*} Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em
Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual de Santa Cruz,
Ilhéus-Bahia, Brasil (e-mails: ycsouza@uesc.br, tpchagas@uesc.br,
gildsonj@gmail.com)

^{**} Laboratório de Mecatrônica, Departamento de Ciências Exatas e
Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-BA, Brasil

Abstract: This paper deals with the problem of linear quadratic regulation with integral action and disturbance rejection for linear systems subject to Markovian jumps. To solve this problem, a formulation based on augmented states and the restricted weighted least squares method was used. Numerical examples are presented that demonstrate the robustness of this technique in the sense of disturbance rejection.

Resumo: Este artigo trata do problema de regulação linear quadrática com ação integral e rejeição de distúrbios para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos. Para a solução deste problema foi utilizada uma formulação baseada em estados aumentados e no método dos mínimos quadrados ponderado restrito. Exemplos numéricos são apresentados que demonstram a robustez desta técnica no sentido de rejeição de distúrbios.

Keywords: Optimal control; MJLS; Disturbance Rejection; Integral Action; State Space.

Palavras-chaves: Controle Ótimo; SLSM; Rejeição de Distúrbio; Ação Integral; Espaço de Estados.

1. INTRODUÇÃO

Sistemas que possuem em sua dinâmica características que são sujeitas a mudanças abruptas de comportamento podem ser modelados por um conjunto de sistemas lineares chaveados entre si e cuja transição entre estes é dada por uma cadeia de Markov, tais sistemas são chamados Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos (MJLS - *Markovian Jump Linear Systems*) (Costa et al., 2005). Estes sistemas têm sido aplicados em diversas áreas como, por exemplo, robótica (Siqueira and Terra, 2004), (Vargas et al., 2013), (Mitschka et al., 2015), finanças (Blake and Zampolli, 2011) dentre outros.

A teoria de controle ótimo para MJLS tem sido abordada através de diversas técnicas como pode ser visto na literatura (Costa et al., 2005), (Blair and Sworner, 1975), (Chizeck et al., 1986) e (Abou-Kandil et al., 1995). Em particular, Cerri et al. (2017) desenvolveu um regulador linear quadrático (LQR - *Linear Quadratic Regulator*) para MJLS baseado no método de mínimos quadrados ponderado restrito de forma que foi possível encontrar o sinal de controle e o estado ótimos simultaneamente, porém esta abordagem não leva em consideração a ação de distúrbios externos no sistema.

Sabe-se que em problemas reais os efeitos de distúrbios externos afetam diretamente a dinâmica dos sistemas bem como o comportamento das variáveis de estado. Desenvolver controladores ótimos que sejam robustos com relação a ação de distúrbios externos no sistema torna-se então um problema muito importante a ser resolvido.

Portanto, neste trabalho, é proposto a solução de um regulador linear quadrático com ação integral e de distúrbios externos (LQIED - *Linear Quadratic Regulator with Integral Action and External Disturbance*) para MJLS baseado em estado aumentado e na formulação desenvolvida em Cerri et al. (2017). A ação integral é aplicada adicionalmente pela sua ação em reduzir o erro em regime permanente e aumentar a robustez à distúrbios.

Na Seção 2, será demonstrado a teoria para obtenção do LQIED para MJLS. Na Seção 3 será apresentado exemplos numéricos do desempenho do controlador proposto mediante a uma referência não nula e presença de distúrbio, e também será apresentado um exemplo comparativo entre o controlador desenvolvido e o regulador clássico da literatura, para demonstrar a eficácia da técnica desenvolvida.

2. LQIED PARA MJLS

Considere o seguinte sistema linear em tempo discreto sujeito a saltos Markovianos

^{*} Agradecimentos à FAPESB pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

$$x_{k+1} = F_{\theta_k,k}x_k + G_{\theta_k,k}u_k + E_{\theta_k,k}d_k, \quad (1)$$

$$y_k = H_{\theta_k,k}x_k, \quad (2)$$

sendo $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u_k \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada de controle, $d_k \in \mathbb{R}^q$ o vetor de distúrbio ou de entradas externas, $y_k \in \mathbb{R}^p$ o vetor de saídas, e $F_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $E_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ e $H_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ as matrizes de parâmetros, com x_0 conhecido.

O parâmetro de salto $\theta_k \in \Theta = \{1, \dots, s\}$ é conhecido a cada instante $k = 0, \dots, N$. A sequência $\{\theta_k\}_{k=0}^N$ obedece a propriedade de Markov, onde a matriz de probabilidade de transição dos estados, definida como $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s \times s}$, satisfaz

$$Prob[\theta_{k+1} = j | \theta_k = i] = p_{ij}, \quad Prob[\theta_0 = i] = \pi_i, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^s p_{ij} = 1, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad (4)$$

Onde π_i em (3) corresponde à probabilidade da distribuição inicial para $\theta_0 = i$.

O vetor de distúrbio d_k é considerado uma entrada exógena, não podendo ser removido do sistema e com magnitude que não pode ser alterada (Singh and Pal, 2017). Esta entrada para o presente trabalho é considerada limitada, sendo possível encontrar uma ação de controle que minimize (ou cancele) seus efeitos.

A ação integral ao sistema descrito em (1) e (2) é obtida ao se realizar

$$e_{k+1} = e_k + (r_k - y_k), \quad (5)$$

onde $e_{k+1} \in \mathbb{R}^p$ corresponde ao somatório (integral discreta) do erro entre a saída y_k e a referência $r_k \in \mathbb{R}^p$ para cada k , sendo a referência o valor desejado para a saída. Para todo k se conhece as matrizes de parâmetros, o vetor de referência r_k e o vetor de distúrbio d_k , bem como o parâmetro de salto.

Manipulando (1), (2) e (5), podemos reescrever o sistema na forma aumentada como

$$\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta_k,k}\mathcal{X}_k + \mathcal{G}_{\theta_k,k}u_k, \quad k = 0, \dots, N \quad (6)$$

$$y_k = \mathcal{H}_{\theta_k,k}\mathcal{X}_k, \quad (7)$$

sendo

$$\mathcal{X}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ e_k \\ r_k \\ d_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_{\theta_k,k} = \begin{bmatrix} F_{\theta_k,k} & 0 & 0 & E_{\theta_k,k} \\ -H_{\theta_k,k} & I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathcal{G}_{\theta_k,k} = \begin{bmatrix} G_{\theta_k,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_{\theta_k,k} = [H_{\theta_k,k} \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (9)$$

As linhas nulas em (8) e (9) refletem o fato que esta abordagem considera que a referência e o distúrbio no tempo $k+1$ não dependem do seu valor em k .

Define-se um termo quadrático auxiliar e o funcional custo quadrático

$$\mathcal{L}_{\theta_k,k}(\mathcal{X}_k, u_k) = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_k \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{\theta_k,k} & 0 \\ 0 & R_{\theta_k,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{X}_k \\ u_k \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathcal{J}(\theta, \mathcal{X}, u) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{L}_{\theta_k,k} + \mathcal{X}_N^T \mathcal{P}_{\theta_N,N} \mathcal{X}_N, \quad (11)$$

Onde $\mathcal{Q}_{\theta_k,k} = \text{diag}(Q_{\theta_k,k}^x, Q_{\theta_k,k}^e, Q_{\theta_k,k}^r, Q_{\theta_k,k}^d)$ e $R_{\theta_k,k}$ são matrizes positivas definidas simétricas de ponderação de estado (para o sistema estendido) e de entrada de controle, respectivamente. A integral do erro entre a referência r_k e a variável controlada y_k é ponderada pela matriz $Q_{\theta_k,k}^e$ presente no funcional. $\mathcal{P}_{\theta_k,k}$, matriz simétrica positiva definida $\forall k$, é a solução de uma equação recursiva de Riccati, com $\mathcal{P}_{\theta_N,N}$ conhecido. Considere que ela é descrita por:

$$\mathcal{P}_{\theta_k,k} = \begin{bmatrix} P_{\theta_k,k}^{xx} & P_{\theta_k,k}^{xe} & P_{\theta_k,k}^{xr} & P_{\theta_k,k}^{xd} \\ P_{\theta_k,k}^{ex} & P_{\theta_k,k}^{ee} & P_{\theta_k,k}^{er} & P_{\theta_k,k}^{ed} \\ P_{\theta_k,k}^{rx} & P_{\theta_k,k}^{re} & P_{\theta_k,k}^{rr} & P_{\theta_k,k}^{rd} \\ P_{\theta_k,k}^{dx} & P_{\theta_k,k}^{de} & P_{\theta_k,k}^{dr} & P_{\theta_k,k}^{dd} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Com essa estrutura, pode-se utilizar então a resolução clássica da literatura do LQR para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (Cerri et al., 2017), com a minimização do valor esperado do funcional dado uma sequência com propriedade de Markov.

$$\min_{\mathcal{X}_{k+1}, u_k} \mathbb{E}\{\mathcal{J}(\theta, \mathcal{X}, u) | O_k\} \quad (13)$$

$$s.a \quad \mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta_k,k}\mathcal{X}_k + \mathcal{G}_{\theta_k,k}u_k \quad (14)$$

Onde,

$$O_k = \{\theta_k, \mathcal{X}_k\}. \quad (15)$$

Esta estrutura permite chegar na solução ótima através da programação dinâmica e do princípio da otimalidade (Blair and Sworder, 1975). Define-se uma função valor

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k(\mathcal{X}_k, \theta_k = i) = \\ \min_{\mathcal{X}_{k+1}, u_k} \mathbb{E}\{\mathcal{L}_{\theta_k,k}(\mathcal{X}_k, u_k) + \mathcal{V}_{k+1}(\mathcal{X}_{k+1}, \theta_{k+1} = j) | O_k\}, \\ s.a \quad \mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta_k,k}\mathcal{X}_k + \mathcal{G}_{\theta_k,k}u_k. \end{aligned} \quad (16)$$

Onde a função valor também pode ser escrita como

$$\mathcal{V}_k(\mathcal{X}_k, \theta_k = i) = \mathcal{X}_k^T \mathcal{P}_{i,k} \mathcal{X}_k. \quad (17)$$

O valor esperado do termo quadrático auxiliar não depende de O_k , podendo rescrever como

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k(\mathcal{X}_k, \theta_k = i) = \\ \min_{\mathcal{X}_{k+1}, u_k} \{\mathcal{L}_{\theta_k,k}(\mathcal{X}_k, u_k) + \mathbb{E}[\mathcal{V}_{k+1}(\mathcal{X}_{k+1}, \theta_{k+1}) | O_k]\}, \\ s.a \quad \mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta_k,k}\mathcal{X}_k + \mathcal{G}_{\theta_k,k}u_k. \end{aligned} \quad (18)$$

Manipulando os estados aumentados da formulação proposta, pelo princípio da otimalidade, para $k+1$, podemos fazer

$$\mathcal{V}_k(\mathcal{X}_k, \theta_k = i) =$$

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X}_{k+1}, u_k} \{ & \mathcal{L}_{\theta_k}(\mathcal{X}_k, u_k) + \mathcal{X}_{k+1}^T \mathbb{E}[\mathcal{P}_{\theta_{k+1}, k+1} | O_k] \mathcal{X}_{k+1} \}, \\ \text{s.a. } & \mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta_k, k} \mathcal{X}_k + \mathcal{G}_{\theta_k, k} u_k. \end{aligned} \quad (19)$$

O valor esperado da $\mathcal{P}_{\theta_k, k}$ dado O_k reflete implicitamente em soluções de equações acopladas de Riccati, dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{P}_{\theta_{k+1}, k+1} | O_k] &= \mathbb{E}[\mathcal{P}_{\theta_{k+1}, k+1} | \theta_k = i] \\ &= \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_{j, k+1} \text{Prob}[\theta_{k+1} = j | \theta_k = i] = \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_{j, k+1} p_{ij} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^x p_{ij} & \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^{xe} p_{ij} & \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^{xr} p_{ij} & \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^{xd} p_{ij} \\ \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^{ex} p_{ij} & \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^e p_{ij} & \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^{er} p_{ij} & \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^{ed} p_{ij} \\ \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^{rx} p_{ij} & \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^{re} p_{ij} & \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^r p_{ij} & \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^{rd} p_{ij} \\ \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^{dx} p_{ij} & \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^{de} p_{ij} & \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^{dr} p_{ij} & \sum_{j=1}^s P_{j, k+1}^d p_{ij} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

O somatório pode ser incluído na matriz aumentada, uma vez que é a multiplicação de uma matriz por um elemento. Pode-se definir um operador auxiliar das equações acopladas, para todo $i \in \Theta$, por

$$\Psi_{i, k+1} = \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_{j, k+1} p_{ij}. \quad (21)$$

Obtendo

$$\Psi_{\theta_k, k} = \begin{bmatrix} \psi_{\theta_k, k}^x & \psi_{\theta_k, k}^{xe} & \psi_{\theta_k, k}^{xr} & \psi_{\theta_k, k}^{xd} \\ \psi_{\theta_k, k}^{ex} & \psi_{\theta_k, k}^e & \psi_{\theta_k, k}^{er} & \psi_{\theta_k, k}^{ed} \\ \psi_{\theta_k, k}^{rx} & \psi_{\theta_k, k}^{re} & \psi_{\theta_k, k}^r & \psi_{\theta_k, k}^{rd} \\ \psi_{\theta_k, k}^{dx} & \psi_{\theta_k, k}^{de} & \psi_{\theta_k, k}^{dr} & \psi_{\theta_k, k}^d \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Assim pode se reescrever o problema como

$$\min_{\mathcal{X}_{k+1}, u_k} \{ \mathcal{X}_{k+1}^T \Psi_{i, k+1} \mathcal{X}_{k+1} + u_k^T R_{i, k} u_k + \mathcal{X}_k^T \mathcal{Q}_{i, k} \mathcal{X}_k \}, \quad (23)$$

$$\text{s.a. } \mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta_k, k} \mathcal{X}_k + \mathcal{G}_{\theta_k, k} u_k. \quad (24)$$

O funcional (23)-(24) é semelhante ao utilizado na resolução do LQR para MJLS através do método dos mínimos quadrados ponderado restrito em Cerri et al. (2017), cuja a solução é dada no seguinte Lema.

Lema 1. A solução ótima $(\mathcal{X}_{k+1}^*, u_k^*)$ para o problema de minimização (23) s.a. (24) é dada, para $k = 0, \dots, N-1$ e $\theta_k \in \Theta$, por

$$\mathcal{X}_{k+1}^* = \mathcal{L}_{\theta_k, k} \mathcal{X}_k^* \quad \text{e} \quad u_k^* = \mathcal{K}_{\theta_k, k} \mathcal{X}_k^* \quad (25)$$

Sendo para cada $i \in \Theta$ e $k = N-1, \dots, 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i, k} &= (\mathcal{F}_{i, k} + \mathcal{G}_{i, k} \mathcal{K}_{i, k}) \\ &= (\mathcal{F}_{i, k} - \mathcal{G}_{i, k} (R_{i, k} + \mathcal{G}_{i, k}^T \Psi_{i, k+1} \mathcal{G}_{i, k})^{-1} \mathcal{G}_{i, k}^T \Psi_{i, k+1} \mathcal{F}_{i, k}) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\mathcal{K}_{i, k} = -(R_{i, k} + \mathcal{G}_{i, k}^T \Psi_{i, k+1} \mathcal{G}_{i, k})^{-1} \mathcal{G}_{i, k}^T \Psi_{i, k+1} \mathcal{F}_{i, k} \quad (27)$$

Com

$$\mathcal{P}_{i, k} = \mathcal{F}_{i, k}^T \left(\Psi_{i, k+1} - \Psi_{i, k+1} \mathcal{G}_{i, k} (R_{i, k} + \mathcal{G}_{i, k}^T \Psi_{i, k+1} \mathcal{G}_{i, k})^{-1} \mathcal{G}_{i, k}^T \Psi_{i, k+1} \right) \mathcal{F}_{i, k} + \mathcal{Q}_{i, k}. \quad (28)$$

No próximo Teorema será apresentado o LQIED para MJLS baseado no Lema 1.

Teorema 2. A minimização de (23) sujeito a (24), com relação a \mathcal{X}_k e u_k usando as identificações apresentadas em (8), (9) e (22), fornece a seguinte solução ótima

$$\begin{aligned} x_{k+1}^* &= (F_{i, k} - \Phi_{i, k} (\psi_{\theta_k, k}^x - \psi_{\theta_k, k}^{xe} H_{i, k})) x_k \\ &\quad - \Phi_{i, k} \psi_{\theta_k, k}^{xe} e_k - \Phi_{i, k} \psi_{\theta_k, k}^{xr} r_k \\ &\quad + (E_{i, k} - \Phi_{i, k} \psi_{\theta_k, k}^x E_{i, k}) d_k \end{aligned} \quad (29)$$

$$e_{k+1}^* = e_k + r_k - H_{i, k} x_k, \quad (30)$$

e

$$u_k^* = -(K_k^x x_k + K_k^e e_k + K_k^r r_k + K_k^d d_k). \quad (31)$$

Com

$$K_k^x = -(R_{i, k} + G_{i, k}^T \psi_{i, k+1}^x G_{i, k})^{-1} G_{i, k}^T (\psi_{\theta_k, k}^x F_{i, k} - \psi_{\theta_k, k}^{xe} H_{i, k}) \quad (32)$$

$$K_k^e = -(R_{i, k} + G_{i, k}^T \psi_{i, k+1}^x G_{i, k})^{-1} G_{i, k}^T \psi_{\theta_k, k}^{xe} \quad (33)$$

$$K_k^r = -(R_{i, k} + G_{i, k}^T \psi_{i, k+1}^x G_{i, k})^{-1} G_{i, k}^T \psi_{\theta_k, k}^{xr} \quad (34)$$

$$K_k^d = -(R_{i, k} + G_{i, k}^T \psi_{i, k+1}^x G_{i, k})^{-1} G_{i, k}^T \psi_{\theta_k, k}^x E_{i, k} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} P_{i, k}^x &= (F_{i, k}^T (\psi_{i, k+1}^x - \psi_{i, k+1}^x \Phi_{i, k} \psi_{i, k+1}^x) \\ &\quad - H_{i, k}^T (\psi_{i, k+1}^{ex} - \psi_{i, k+1}^{ex} \Phi_{i, k} \psi_{i, k+1}^x)) F_{i, k} \\ &\quad - (F_{i, k}^T (\psi_{i, k+1}^{xe} - \psi_{i, k+1}^x \Phi_{i, k} \psi_{i, k+1}^{xe}) \\ &\quad - H_{i, k}^T (\psi_{i, k+1}^e - \psi_{i, k+1}^{ex} \Phi_{i, k} \psi_{i, k+1}^x)) H_{i, k} + Q_{i, k}^x \end{aligned} \quad (36)$$

$$P_{i, k}^e = (\psi_{i, k+1}^e - \psi_{i, k+1}^{ex} \Phi_{i, k} \psi_{i, k+1}^{xe}) + Q_{i, k}^e \quad (37)$$

$$\begin{aligned} P_{i, k}^{ex} &= (\psi_{i, k+1}^{ex} - \psi_{i, k+1}^{ex} \Phi_{i, k} \psi_{i, k+1}^x) F_{i, k} \\ &\quad - (\psi_{i, k+1}^e - \psi_{i, k+1}^{ex} \Phi_{i, k} \psi_{i, k+1}^{xe}) H_{i, k} \end{aligned} \quad (38)$$

$$P_{i, k}^{xr} = P_{i, k}^{xe} = (P_{i, k}^{ex})^T \quad (39)$$

Com

$$\Phi_{i, k} = G_{i, k} (R_{i, k} + G_{i, k}^T \psi_{i, k+1}^x G_{i, k})^{-1} G_{i, k}^T \quad (40)$$

Prova. Considere as matrizes aumentadas $\mathcal{P}_{\theta_k, k}$, definida em (12), e $\mathcal{Q}_{\theta_k, k}$ e $R_{\theta_k, k}$ definidas previamente.

Para cada $i \in \Theta$ temos que o operador $\Psi_{i, k+1}$ dado por (21) e (22) é descrito por

$$\Psi_{i, k+1} = \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_{j, k+1} p_{ij}. \quad (41)$$

Expandindo a formulação apresentada no Lema 1, que apresenta equivalência a solução clássica (ver Cerri et al. (2017)), obtemos

$$\mathcal{X}_{k+1}^* = (\mathcal{F}_{i, k} - \mathcal{G}_{i, k} (R_{i, k} + \mathcal{G}_{i, k}^T \Psi_{i, k+1} \mathcal{G}_{i, k})^{-1} \mathcal{G}_{i, k}^T \Psi_{i, k+1} \mathcal{F}_{i, k}) \quad (42)$$

$$\mathcal{X}_{k+1}^* = \left(\begin{bmatrix} F_{i,k} & 0 & 0 & E_{i,k} \\ -H_{i,k} & I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(R_{i,k} + \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \right. \right. \\ \left. \begin{bmatrix} \psi_{\theta_k,k}^x & \psi_{\theta_k,k}^{xe} & \psi_{\theta_k,k}^{xr} & \psi_{\theta_k,k}^{xd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{ex} & \psi_{\theta_k,k}^e & \psi_{\theta_k,k}^{er} & \psi_{\theta_k,k}^{ed} \\ \psi_{\theta_k,k}^{rx} & \psi_{\theta_k,k}^{re} & \psi_{\theta_k,k}^r & \psi_{\theta_k,k}^{rd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{dx} & \psi_{\theta_k,k}^{de} & \psi_{\theta_k,k}^{dr} & \psi_{\theta_k,k}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ \left. \begin{bmatrix} \psi_{\theta_k,k}^x & \psi_{\theta_k,k}^{xe} & \psi_{\theta_k,k}^{xr} & \psi_{\theta_k,k}^{xd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{ex} & \psi_{\theta_k,k}^e & \psi_{\theta_k,k}^{er} & \psi_{\theta_k,k}^{ed} \\ \psi_{\theta_k,k}^{rx} & \psi_{\theta_k,k}^{re} & \psi_{\theta_k,k}^r & \psi_{\theta_k,k}^{rd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{dx} & \psi_{\theta_k,k}^{de} & \psi_{\theta_k,k}^{dr} & \psi_{\theta_k,k}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i,k} & 0 & 0 & E_{i,k} \\ -H_{i,k} & I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right). \quad (43)$$

e

$$\mathcal{K}_{i,k} = \left(R_{i,k} + \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \psi_{\theta_k,k}^x & \psi_{\theta_k,k}^{xe} & \psi_{\theta_k,k}^{xr} & \psi_{\theta_k,k}^{xd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{ex} & \psi_{\theta_k,k}^e & \psi_{\theta_k,k}^{er} & \psi_{\theta_k,k}^{ed} \\ \psi_{\theta_k,k}^{rx} & \psi_{\theta_k,k}^{re} & \psi_{\theta_k,k}^r & \psi_{\theta_k,k}^{rd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{dx} & \psi_{\theta_k,k}^{de} & \psi_{\theta_k,k}^{dr} & \psi_{\theta_k,k}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \psi_{\theta_k,k}^x & \psi_{\theta_k,k}^{xe} & \psi_{\theta_k,k}^{xr} & \psi_{\theta_k,k}^{xd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{ex} & \psi_{\theta_k,k}^e & \psi_{\theta_k,k}^{er} & \psi_{\theta_k,k}^{ed} \\ \psi_{\theta_k,k}^{rx} & \psi_{\theta_k,k}^{re} & \psi_{\theta_k,k}^r & \psi_{\theta_k,k}^{rd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{dx} & \psi_{\theta_k,k}^{de} & \psi_{\theta_k,k}^{dr} & \psi_{\theta_k,k}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i,k} & 0 & 0 & E_{i,k} \\ -H_{i,k} & I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Por manipulações algébricas dessa expressão em (43) e (44), se chega nos resultados apresentados em (29) a (36). Sendo

$$\mathcal{K}_{i,k} = [K_{i,k}^x \ K_{i,k}^e \ K_{i,k}^r \ K_{i,k}^d]. \quad (45)$$

Analogamente, substituindo (8) e (9) em (28) se chega às equações apresentadas em (37) a (39). Por a solução da equação de Riccati ser simétrica, e o somatório ser trazido para dentro da matriz aumentada, mantém-se a propriedade do operador $\Psi_{i,k+1} = \Psi_{i,k+1}^T$, e obtém (40) bem como outras identidades.

OBSERVAÇÃO 1 Em um processo determinístico, ou seja, para $s=1$ e dessa forma $\mathbb{P} = [p_{ij} = 1]$,

$$\Psi_{i,k+1} = \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_{j,k+1} p_{ij} = \mathcal{P}_{j,k+1} \quad (46)$$

equivale ao caso abordado em Madureira et al. (2019).

OBSERVAÇÃO 2 Se o sistema linear composto por (1), (2) e (5) não possuir ação integral, i.e. considerar a parcela $e_k = 0$ e $r_k = 0$, $\forall k = 0, \dots, N$ e utilizar a matriz de parâmetros de saída nula $H_{i,k} = 0$, $\forall i \in \Theta$, o Teorema 2 fornece uma solução LQR para o seguinte sistema linear discreto sujeitos a saltos Markovianos e distúrbios externos (LQRED MJLS):

$$x_{k+1} = F_{\theta_k,k} x_k + G_{\theta_k,k} u_k + E_{\theta_k,k} d_k \quad (47)$$

3. EXEMPLO NUMÉRICO

Considere um sistema linear descrito por (1) e (2), com $x \in \mathbb{R}^2$ e 3 modos, onde cada modo é linear e invariante no tempo, dados por

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2.5 & 3.2 \end{bmatrix}, Q_1^x = \begin{bmatrix} 3.60 & -3.80 \\ -3.80 & 4.87 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4.3 & 4.5 \end{bmatrix}, Q_2^x = \begin{bmatrix} 3.38 & -2.54 \\ -2.54 & 2.70 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5.3 & 6.2 \end{bmatrix}, Q_3^x = \begin{bmatrix} 5 & -4.5 \\ -4.5 & 4.5 \end{bmatrix}, \quad (50)$$

$$R_1 = 2.6, R_2 = 1.16, R_3 = 1.111. \quad (51)$$

O exemplo utilizado apresenta todos os modos instáveis, i.e. as matrizes de estados possuem pelo menos um autovalor com magnitude maior que 1, o que apresenta uma maior complexidade do sistema.

A matriz de parâmetros de saída foi considerada a mesma para todos os modos, bem como a matriz de parâmetros das entradas e das entradas desconhecidas, sendo

$$H_i = [1 \ 0], G_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_i = \begin{bmatrix} 1.0206 \\ 2.5094 \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3. \quad (52)$$

A matriz de transição de probabilidade dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.17 & 0.16 \\ 0.3 & 0.47 & 0.23 \\ 0.26 & 0.1 & 0.64 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

As matrizes de ponderação para a referência e distúrbio não influenciam no cálculo na formulação proposta, sendo assumidas como matrizes identidades de tamanho compatível apenas para garantia de se trabalhar com $\mathcal{Q}_{i,k}$ simétrica e positiva definida. A matriz de ponderação para o erro foi considerada dez vezes a matriz identidade de tamanho compatível.

Foi assumido um distúrbio $d_k = 0.99^k$ (Singh and Pal, 2017), sendo este amplificado pela matriz de distúrbios E_i ($i = 1, 2, 3$). As simulações foram realizadas em MATLAB.

Serão realizados dois estudos de casos, sendo demonstrado em cada um apenas uma das trajetórias possíveis geradas. O primeiro observará o comportamento do LQIED para MJLS para uma referência não nula e posteriormente uma referência nula, mediante ao distúrbio d_k . O segundo constará de um comparativo entre os controladores para a rejeição do distúrbio d_k , tendo como referência nula para o LQIED para MJLS.

3.1 Ação Integral com Rejeição de Distúrbio

Para o sistema com condições iniciais nulas ($x_0 = [0 \ 0]'$ para $k = 0$) foi assumido como referência degrau para a saída y_k . Para $k = 0, \dots, 100$, foi assumido $r_k = 4$, de forma a observar o comportamento de rejeição de distúrbio e ação integral frente a uma entrada de referência degrau não nula. Para $k = 101, \dots, N$, $r_k = 0$, de forma a observar a ação integral ao alternar para uma referência nula.

Neste trabalho serão utilizados ganhos constantes para cada modo, visto que as matrizes do sistema são invariantes no tempo, sendo estes os valores de convergência de (37)-(40) mostrados a seguir:

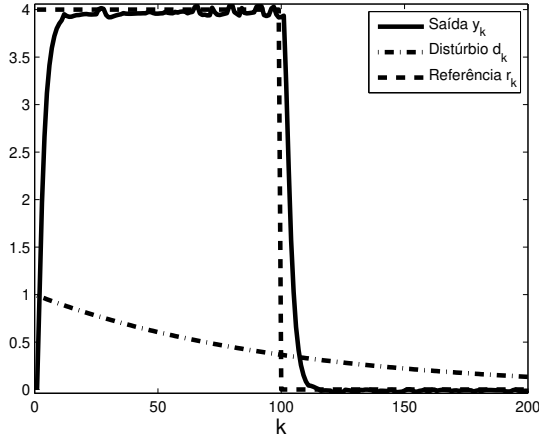


Figura 1. Saída y_k sujeita a distúrbios e referência degrau

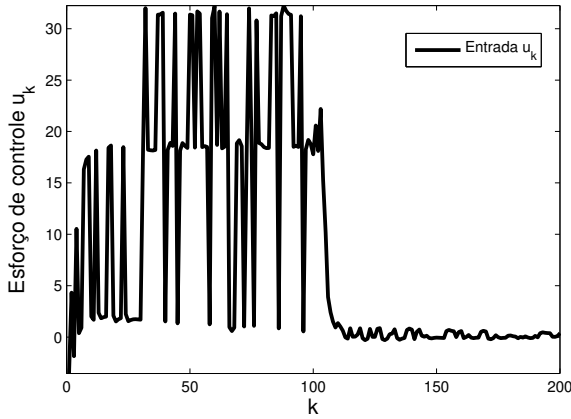


Figura 2. Ação de controle

$$\mathcal{K}_1 = [-1.258 \quad -4.950 \quad 0.181 \quad 0.181 \quad -4.302], \quad (54)$$

$$\mathcal{K}_2 = [0.475 \quad -6.291 \quad 0.187 \quad 0.187 \quad -4.346], \quad (55)$$

$$\mathcal{K}_3 = [-9.164 \quad -8.021 \quad 0.192 \quad 0.192 \quad -4.384]. \quad (56)$$

A Figura 1 contém a saída do sistema ao longo da iteração k , com o distúrbio exponencial e a referência degrau variando entre 4 e 0. A saída do sistema alcança a referência rapidamente, sendo necessário apenas 10 iterações para que o valor alcance a referência com erro menor que 5%, se acomodando a referência em 18 iterações enquanto a referência se mantém fixa. A rejeição do distúrbio é verificada pelo seguimento da referência mesmo na presença do distúrbio, sendo seu erro máximo após acomodação não maior que 2.5%.

Após a 101ª iteração, a referência para a saída é posta como nula, e observa-se o rápido decaimento para o valor desejado, com erro absoluto menor que 0.035 após 12 iterações, mantendo-se dentro deste erro no restante da execução. O distúrbio também é rejeitado para operação como regulador ($r_k = 0$), embora seu efeito tenha menor amplitude devido ao decaimento exponencial.

Não se pode garantir erro nulo devido a ação integral para referência degrau nesta formulação, em função dos distúrbios e das discontinuidades. Entretanto, o controlador

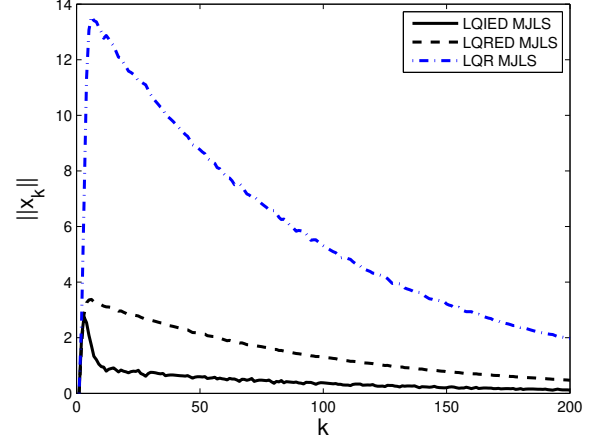


Figura 3. Norma do estado para os dois controladores sujeitos a distúrbio

proposto minimiza a contribuição do distúrbio devido a lei de controle considerá-lo.

A Figura 2 contém o esforço de controle u_k . As variações abruptas são ocasionadas pelo parâmetro de salto θ_k , onde cada modo possui ganhos diferentes, descritos por (54) a (56). Quando a referência é igualada a 0, o esforço de controle se torna consideravelmente baixo, tendo seu pico 30 vezes menor que o pico da referência não nula (e média menor em mesma magnitude). Este fato é entendido uma vez que as parcelas $K_{i,k}^r$ e $K_{i,k}^e$ se anulam ou tendem a zero. A contribuição do distúrbio e do estado contribuem para o valor.

3.2 Efeito da rejeição de distúrbio

Para comparativo apenas da rejeição de distúrbios, foram realizados testes com o controlador LQIED para MJLS proposto e o LQRED para MJLS obtido de acordo com a observação 2 da Seção 2 (considerando a matriz nula de parâmetros de saída para todos os modos), com $r_k = 0$, $\forall k$. Esta comparação permite a visualização da contribuição da ação integral com intuito apenas de rejeição de distúrbio. Utilizou-se o regulador recursivo para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos da literatura para comparativo com técnicas tradicionais (Cerri, 2009).

A primeira métrica de comparação utilizada foi a norma euclidiana dos estados, definida por

$$\|x_k\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_k^j|^2}. \quad (57)$$

A Figura 3 apresenta o comportamento de rejeição de distúrbio para o controlador LQIED para MJLS, para o LQRED para MJLS, e LQR para MJLS. Ambas abordagens deste trabalho apresentaram norma menor que o regulador que não leva em consideração distúrbio na formulação.

O controlador proposto com ação integral apresenta um desempenho melhor, apresentando após um pico inicial valores entre 3 a 4 vezes menores que o controlador sem ação integral, tendo seus valores finais $\|x_k\| = 0.130$ (com

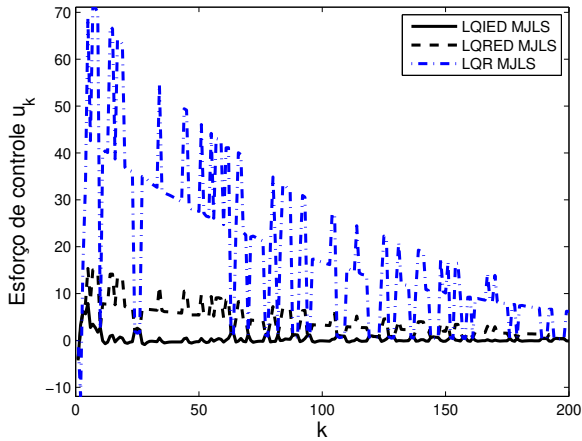


Figura 4. Comparativo da ação de controle

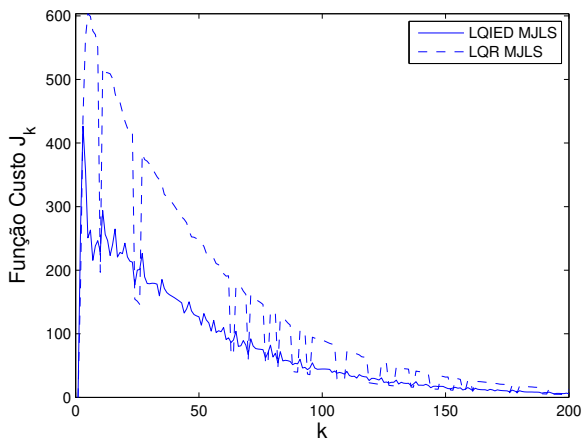


Figura 5. Evolução da função custo

ação integral) e $\|x_k\| = 0.478$, com $k = 200$. Pode se atribuir este melhor comportamento a um ganho com ajuste mais fino, com mais duas parcelas dependente do erro ($K_{i,k}^e$) e da referência ($K_{i,k}^d$), além da parcela de ganho $K_{i,k}^d$ e $K_{i,k}^x$.

Mesmo com uma contribuição destas parcelas extras, o controlador apresenta um esforço de controle notavelmente menor que a abordagem sem ação integral e convencional, visto na Figura 4. A abordagem convencional teve picos demasiadamente elevados (6 vezes maiores que os picos propostos) e com valores elevados ao longo de toda trajetória.

O controlador com ação integral após pico inicial de 12.29, teve seus valores baixos ao longo do tempo, não ultrapassando 2.73 após $k = 10$.

A Figura 5 contém a terceira métrica de comparação, a evolução da função custo para os controladores LQIED para MJLS e LQRED para MJLS. Como forma de manter apropriado o comparativo, foi utilizado a função custo quadrática comum ao LQR para MJLS para todos os controladores observados, sendo descrita como

$$J(\theta, x, u) = x_N^T P_{\theta_N, N} x_N + \sum_{k=0}^{N-1} x_k^T Q_{\theta_k, k} x_k + u_k^T R_{\theta_k, k} u_k \quad (58)$$

e evolução da função custo dada por

$$J_k(\theta, x, u) = x_k^T P_{\theta_k, k} x_k. \quad (59)$$

O custo para o regulador clássico foi omitido na Figura devido ser em média 28 vezes maior que o segundo maior custo. Os valores finais para o custo, na execução de teste, em $k = 200$ foram $J_k = 337.285$ (LQR para MJLS), $J_k = 12.094$ (LQRED para MJLS) e $J_k = 6.303$ (LQIED para MJLS). Além da evolução da função custo predominantemente menor do controlador com ação integral e rejeição à distúrbio, observa-se também um comportamento mais suave da evolução em contraste com variações ocorridas no controlador apenas com rejeição à distúrbio. Isto é consequência de um esforço de controle menor e mais suave quando a referência é 0, impactando na parcela $u_k^T R_{i,k} u_k$ do funcional.

4. CONCLUSÃO

Este trabalho propõe uma nova formulação aos reguladores lineares sujeitos a saltos Markovianos, introduzindo ação integral e rejeição à distúrbios medidos e resolvendo por equivalência às soluções clássicas. Os resultados apresentados sugerem uma boa rejeição ao distúrbio, sendo superior quando em conjunto a ação integral, quando comparado a controladores clássicos. A ação integral também manteve-se em referência não nula ainda que na presença de distúrbio, variando dentro de uma faixa pequena após acomodação.

Resultados sugerem que o erro médio tende a 0 para quando k tende a infinito para as condições testadas, sendo necessário maiores pesquisas em relação a controlabilidade e estabilizabilidade. Em relação ao distúrbio, é necessária uma melhor avaliação nas propriedades dos distúrbios que podem ser rejeitados pelo controlador e métodos de estimação para uso em aplicações práticas vem sendo estudado. Está em andamento a proposição de métodos de estimação do distúrbio em SLSM para problemas em que este não possa ser medido e aplicações em um pêndulo invertido.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos à FAPESB pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Abou-Kandil, H., Freiling, G., and Jank, G. (1995). On the solution of discrete-time Markovian jump linear quadratic control problems. *Automatica*, 31(5), 765–768. doi:10.1016/0005-1098(94)00164-E. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/000510989400164E>.
- Blair, W.P. and Sworder, D.D. (1975). Feedback control of a class of linear discrete systems with jump

- parameters and quadratic cost criteria. *International Journal of Control*, 21(5), 833–841. doi:10.1080/00207177508922037.
- Blake, A.P. and Zampolli, F. (2011). Optimal policy in Markov-switching rational expectations models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 35(10), 1626–1651. doi:10.1016/j.jedc.2011.04.001. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jedc.2011.04.001>.
- Cerri, J.P., Terra, M.H., and Ishihara, J.Y. (2017). Recursive Robust Regulator for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(11), 6004–6011. doi:10.1109/TAC.2017.2707335.
- Chizeck, H.J., Willsky, A.S., and Castanon, D. (1986). Discrete-time markovian-jump linear quadratic optimal control. *International Journal of Control*, 43(1), 213–231. doi:10.1080/00207178608933459.
- Costa, O.L.d.V., Fragoso, M.D., and Marques, R.P. (2005). *Discrete-time Markov jump linear systems*. Springer-Verlag.
- Madureira, V.S., das Chagas, T.P., and de Jesus, G.Q. (2019). Regulador Linear Quadrático com Ação Integral para Sistemas Lineares com Rejeição de Distúrbios. In *Anais da 14ª Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*. Equipe do Portal de Eventos Científicos da EESC-USP. URL <http://biblioteca.eesc.usp.br/images/soac/dincon/dincon2020anais.pdf>.
- Mitschka, C.M., Terra, M.H., and Siqueira, A.A. (2015). Derivation of a Markovian Controller for an exo-skeleton by overcome the benchmarks of a single and double inverted pendulum. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 54rd IEEE(Cdc), 5061–5066. doi:10.1109/CDC.2015.7403011.
- Singh, A.K. and Pal, B.C. (2017). An extended linear quadratic regulator for LTI systems with exogenous inputs. *Automatica*, 76, 10–16. doi:10.1016/j.automatica.2016.10.014. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2016.10.014>.
- Siqueira, A.A. and Terra, M.H. (2004). A fault tolerant manipulator robot based on H_2 , H_∞ , and mixed H_2/H_∞ Markovian controls. *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, 1, 309–314.
- Vargas, A.N., Costa, E.F., and do Val, J.B. (2013). On the control of Markov jump linear systems with no mode observation: application to a DC Motor device. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 23(10), 1136–1150. doi:<http://dx.doi.org/10.1002/rnc.2911>Vargas,. URL <http://doi.wiley.com/10.1002/rnc.2911>.