

# Identificação de um Sistema de Bombeamento Hidráulico com Algoritmo Evolucionário Multi-objetivo

Frederico Lucas de Oliveira Mota \*  
Gustavo de Souza Carvalho \* Henrique Carvalho de Castro \*  
Bruno Henrique Groenner Barbosa \*\*

\* *Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e  
Automação, Universidade Federal de Lavras, MG, (e-mail:  
frederico.mota@outlook.com; gustavo.scarv@outlook.com;  
henriquec.castro@outlook.com).*

\*\* *Departamento de Automática (DAT), Universidade Federal de  
Lavras, MG, (e-mail: brunohb@ufla.br).*

---

**Abstract:** The selection of model structures that represent real systems plays a fundamental role in the system identification process. In this work, we seek to find polynomial NARMAX models with good performance in both dynamic and static regimes that represent a 15 kW hydraulic pumping system. For the structure selection, NSGA-II is implemented in order to minimize three objectives: i. the static curve error of the model, ii. the one step ahead prediction error (dynamic error), and iii. the number of model's regressors. As a decision maker, the “knee” criterion of the Pareto curve is applied along with the transmitter error limits to choose the most appropriate model resulting from the structure optimizer. The selected model has six regressors, with an error in static regime of 0.00659 [ $mlc^2$ ], dynamic regime error with training data of 2.85348 [ $mlc^2$ ] and dynamic regime error with validation data of 2.5614 [ $mlc^2$ ]. This model proved to be a good alternative since it has presented satisfactory results in dynamic and static regimes, with fewer regressors when compared to other work with the same dataset.

**Resumo:** A seleção de estruturas de modelos que representam sistemas reais desempenha um papel fundamental no processo de identificação de sistemas. Neste trabalho, busca-se encontrar modelos NARMAX polinomiais com bom desempenho no regime dinâmico e estático que representam um sistema de bombeamento hidráulico de 15 kW. Para a seleção de estruturas, o NSGA-II é implementado a fim de minimizar três objetivos: i. o erro da curva estática do modelo, ii. o erro de predição um passo à frente (erro em regime dinâmico), e iii. o número de regressores do modelo. Como apoio na decisão, o critério “joelho” da curva de Pareto é utilizado em conjunto com os limites de erro do sensor de pressão na escolha do modelo mais adequado do conjunto Pareto ótimo resultante do otimizador de estruturas. O modelo selecionado apresenta seis regressores, com erro em regime estático de 0,00659 [ $mlc^2$ ], erro em regime dinâmico de treino 2,85348 de [ $mlc^2$ ] e erro em regime dinâmico de validação de 2,5614 [ $mlc^2$ ]. Este modelo se mostrou uma boa alternativa uma vez que apresentou resultados satisfatórios nos regimes dinâmico e estático, com um número menor de regressores quando comparado com outro trabalho em que foi utilizando o mesmo banco de dados.

*Keywords:* Systems Identification; NARMAX models; Genetic Algorithms; NSGA-II; Simulation error.

*Palavras-chaves:* Identificação de Sistemas; Modelos NARMAX; Algoritmos Genéticos; NSGA-II; Erro de Simulação.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Identificação de sistemas é a metodologia que permite construir modelos matemáticos que representam sistemas análogos a partir de sinais de entrada e saída provenientes do sistema (Ljung (1999); Söderström e Stoica (1988)).

---

\* Agradecimento à UFLA (Universidade Federal de Lavras) por toda à infraestrutura necessária para execução do projeto, sem os quais seria improvável a realização do mesmo.

Tais modelos estimados são úteis para analisar o comportamento do sistema real, implementar controladores mais robustos, e prever a saída de um sistema baseado em sua configuração de entrada.

O ponto central de um problema de identificação de sistemas consiste em encontrar uma estrutura de modelo adequada para que então seus parâmetros sejam estimados. Tal processo pode ser realizado utilizando conhecimentos *a priori* do sistema ou não. Sendo assim, as técnicas

de modelagem podem ser classificadas em três categorias (Sjöberg et al., 1995).

- i *Modelagem caixa branca*: o modelo é obtido pelas equações físicas que regem o processo, ou seja, é necessário um conhecimento profundo *a priori* do processo em questão.
- ii *Modelagem caixa cinza*: algum conhecimento *a priori* do processo é utilizado para obter o modelo, mas grande parte dos parâmetros precisam ser determinados por meio dos dados observados.
- iii *Modelagem caixa preta*: Nenhuma informação física do processo está disponível e a modelagem é feita a partir de dados observados em testes dinâmicos.

Na prática, a maior parte dos problemas reais são não-lineares e a aproximação baseada em sistemas lineares é inadequada por não apresentar aspectos importantes do processo (Pope e Rayner, 1994). Deste modo, modelos NARMAX polinomiais (*Non-linear AutoRegressive Moving Average eXogenous variables*) (Leontaritis e Billings, 1985) têm sido amplamente utilizados na representação de tais sistemas, por ser uma ferramenta poderosa na representação unificada de uma grande variedade de modelos não-lineares (Yassin et al., 2016).

De modo geral, a identificação de sistemas consiste em três etapas: determinação da estrutura, estimativa dos parâmetros e validação do modelo (Aguirre, 2007). O paradigma minimização do erro um-passo-à-frente (PEM) tem sido amplamente utilizado para detectar a estrutura e os respectivos parâmetros do modelo. Contudo, tais algoritmos encontram dificuldades em selecionar uma estrutura adequada de modelo em alguns casos conhecidos, como problemas cuja a entrada é suave (Piroddi et al., 2012).

Em Hafiz et al. (2019b), é proposta uma nova estrutura de busca ortogonal flutuante (em inglês, *Orthogonal Floating Search*) para seleção de estruturas de sistemas não-lineares adaptando os algoritmos de busca flutuante já existentes para seleção de características. Os algoritmos utilizados como base foram a SFFS (em inglês, *Sequential Forward Floating Search*) (Pudil et al., 1994), IFFS (em inglês, *Improved Sequential Forward Floating Search*) (Nakariyakul e Casasent, 2009) e OS (em inglês, *Oscillating Search*) (Somol e Pudil, 2000). Os resultados encontrados demonstram que algoritmos de seleção de características podem ser adaptados para encontrar a correta estrutura de sistemas não-lineares.

Já em Yassin et al. (2016) é proposta a aplicação do algoritmo *Binary Particle Swarm Optimization* (BPSO) para a seleção do modelo NARMAX ótimo de um braço robótico flexível. Em Retes e Aguirre (2019) foi utilizado o algoritmo randomizado para seleção da estrutura do modelo (RaMSS), sendo este método classificado como tendo configurações probabilísticas. Outro trabalho relevante, desenvolvido por Hafiz et al. (2019a), propõe um quadro multiobjetivo para a seleção de estruturas de sistemas não-lineares representados por modelos polinomiais NARX. Os Algoritmos Evolucionários Multiobjetivos (MOEAs) utilizados foram: *Nondominated Sorting Genetic Algorithm-II* (NSGA-II) (Deb et al., 2002), *Strength Pareto Evolutionary Algorithm-II* (SPEA-II) (Zitzler et al., 2001) e *Multi-objective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition*

(MOEA/D) (Zhang e Li, 2007). É demonstrado que os algoritmos MOEAs podem ser adaptados para determinar a estrutura correta de um sistema não-linear.

Em Hafiz et al. (2019c) é apresentada uma nova abordagem de seleção de estruturas para identificação de sistemas não-lineares baseada no algoritmo *Particle Swarm Optimization* de duas dimensões (2D-UPSO). Esta abordagem incorpora informações sobre a cardinalidade do modelo, permitindo assim determinar a estrutura correta e parcimoniosa de um sistema não-linear. Para fins comparativos, quatro meta-heurísticas e a clássica metodologia OFR (em inglês, *Orthogonal Forward Regression*) foram utilizadas para avaliar o desempenho do novo algoritmo proposto, sendo que os resultados mostraram que o 2D-UPSO foi capaz de detectar com sucesso as estruturas corretas de um sistemas não-linear.

Seguindo no campo de aplicação de estratégias multiobjetivas, Nariyoshi et al. (2017) aplicou o paradigma Algoritmo Genético (AG), a saber NSGA-II, para a busca do número ótimo de regressores, onde modificações estratégicas nos operadores genéticos foram realizadas, reduzindo assim o número de gerações necessárias. Por fim, Zakaria et al. (2012) realizam uma comparação entre abordagens de otimização de objetivo único (do inglês, *single-objective*) e multiobjetivo (do inglês, *multi-objective*) para desenvolver modelos de sistemas dinâmicos. Os resultados apontam uma vantagem de otimizadores multiobjetivos na obtenção de modelos adequados e parcimoniosos.

O objetivo deste trabalho é encontrar estruturas de modelos parcimoniosos que tenham uma boa representação da dinâmica e estática de um sistema de bombeamento hidráulico de 15 kW, utilizado em uma plataforma de testes de turbinas hidráulicas que simula a carga hidráulica de uma hidrelétrica, principal fonte geradora de energia elétrica no Brasil.

Sendo assim, para a estimativa de parâmetros do polinômio NARMAX será utilizado o método Mínimos Quadrados Estendido, conforme sugerido por Barbosa et al. (2011). Visto que uma boa representação da física do sistema implica em um modelo com bom desempenho tanto em regime transiente quanto em regime permanente, será utilizado o paradigma NSGA-II para minimizar o erro destes dois objetivos e encontrar o conjunto Pareto ótimo. Por fim, o critério de decisão “joelho” será utilizado em conjunto com o limite de erro do sensor para selecionar o modelo mais adequado para esta aplicação. Com o objetivo de avaliar o desempenho da proposta aqui apresentada, o resultado será comparado com o obtido por Barbosa et al. (2011), onde outros paradigmas de algoritmos genéticos (Goldberg, 1989) foram aplicados para calcular os parâmetros de uma estrutura NARX fixa, que é aplicada ao mesmo banco de dados. Outra diferença quanto ao referido trabalho é o uso de um terceiro critério, número de termos do modelo, a fim de direcionar a busca do algoritmo NSGA-II por modelos com estruturas mais parcimoniosas.

O presente trabalho está estruturado da seguinte maneira. Na próxima seção serão apresentados os materiais e fundamentação teórica utilizados no trabalho. Na Seção 3 a metodologia aplicada para obtenção dos resultados é apresentada. Na Seção 4 os resultados são apresentados

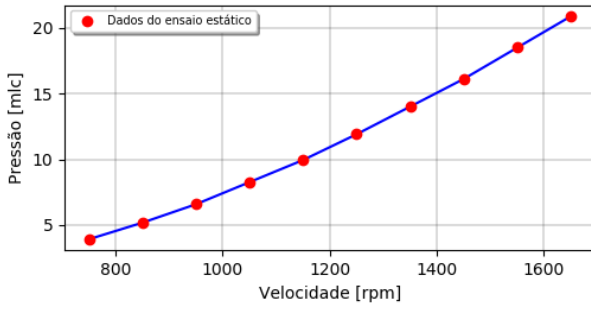


Figura 1. Dados do Ensaio Estático.

Tabela 1. Dados - Dez Ensaio Estáticos

Velocidade [rpm]	Pressão [mlc]
750	3.92
850	5.18
950	6.58
1050	8.26
1150	9.94
1250	11.90
1350	14.00
1450	16.10
1550	18.48
1650	20.86

e uma discussão é feita. Por fim, na Seção 5, as conclusões são dispostas.

## 2. MATERIAIS E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Banco de dados

O banco de dados do sistema de bombeamento hidráulico utilizado para ajustar os parâmetros do presente trabalho possui como entrada a referência de velocidade das bombas, aferidas em rotações por minuto [rpm], e como saída a pressão do sistema, aferida em metro de coluna líquida [mlc]. Os dados foram obtidos em Barbosa et al. (2011) e possuem dois tipos de informação sobre o mesmo, *i.e.*, informação dinâmica e estática.

A parte estática consiste em dez ensaios, variando a velocidade de 750 [rpm] a 1650 [rpm], com um passo de 100 [rpm] entre os ensaios. Durante cada ensaio a velocidade é mantida constante. Após o sistema estabilizar, ou seja, não existir mais parcela transiente na dinâmica do sistema, a pressão foi registrada. A curva resultante pode ser visualizada na Figura 1 e o mapeamento de valores de entrada e saída na Tabela 1.

Já para a parte dinâmica, foi aplicado um sinal de excitação de amplitude variável para atingir diferentes pontos de operação da bomba. Foram geradas  $N = 4000$  amostras para o conjunto de dados dinâmico, onde  $N = 3200$  são utilizadas na modelagem do sistema e  $N = 800$  na validação do mesmo. Na Figura 2a são mostrados os dados utilizados para identificação dos modelos e na Figura 2b os dados de validação.

### 2.2 Modelos NARMAX polinomiais

As estruturas não-lineares auto-regressivas com média móvel e entrada exógena (em inglês, *Non-linear Auto-*

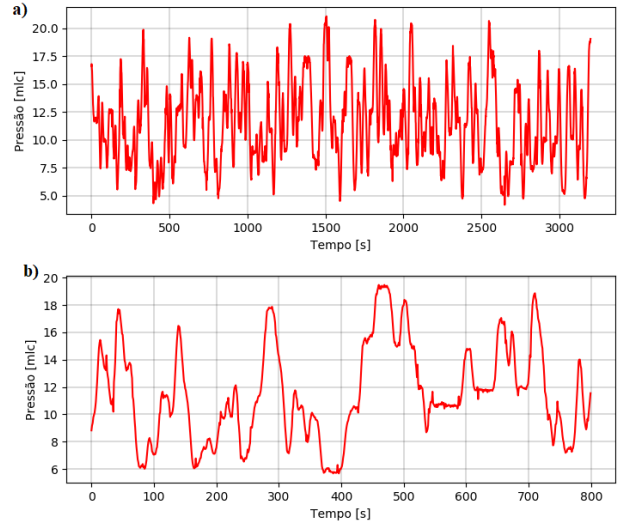


Figura 2. Dados do Ensaio Dinâmico a) Para Modelagem; b) Para Validação.

*regressive with Moving Average and exogenous inputs - NARMAX*) foram apresentadas em 1981 (Leontaritis e Billings, 1985). Um modelo NARMAX, monovariável e com período de amostragem normalizado, tem sua estrutura definida da seguinte forma:

$$y(k) = f^l(y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \dots, u(k-n_\mu), e(k-1), \dots, e(k-n_e)) + e(k) \quad (1)$$

em que  $f$  é uma função não linear de grau  $l$ ,  $y(k)$ ,  $u(k)$  e  $e(k)$  são a saída, a entrada e o ruído aditivo do sistema, respectivamente, cujos atrasos máximos são representados por  $n_y$ ,  $n_\mu$  e  $n_e$ . Já os modelos NARX não possuem o modelo de ruído.

Este tipo de modelo, em relação a outros modelos de representação não-lineares, possui algumas vantagens. De forma geral, é possível obter modelos NARMAX que conseguem, de forma satisfatória e com um nível de erro aceitável, se ajustar a um conjunto de dados, quando estes dados não apresentam variações abruptas. Outro aspecto interessante é a capacidade que esta representação polinomial consegue obter informação analítica sobre a dinâmica do modelo (Aguirre e Mendes, 1996).

Por outro lado, é passível de observação que o número de termos da Equação 1 aumente exponencialmente com o incremento da ordem de não-linearidade e o máximo de atrasos das saídas e entrada (Castro e Barbosa, 2019), por este motivo é sempre interessante manter um número reduzido de termos no modelo de forma que o mesmo seja parcimonioso. Outro ponto relevante é apontado por Aguirre e Billings (1995), onde um modelo, quando sobre parametrizado, pode resultar em custo computacional desnecessário, instabilidade na obtenção numérica dos parâmetros do modelo de dinâmicas não existentes no sistema real que está sendo modelado.

### 2.3 Algoritmos Genéticos Multiobjetivos

Os Algoritmos Genéticos - AG (Holland, 1992; Goldberg e Holland, 1988) são métodos computacionais baseados nos



$$J_D = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{N}, \quad (4)$$

em que  $N$  é número de amostras dinâmicas de treinamento,  $y_i$  é o valor esperado e  $\hat{y}_i$  a predição do modelo na simulação Um Passo à Frente. Um terceiro objetivo é utilizado, definido por:

$$J_N = K, \quad (5)$$

sendo  $K$  é o número de termos do modelo a ser minimizado. O problema completo de minimização é mostrado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^* = \arg \min_{\theta} J(\theta) \\ \text{onde } J \in R^3 \{J_S, J_D, J_N\} \end{array} \right. \quad (6)$$

Para executar o algoritmo, utilizou-se um *desktop* com processador Intel Core i7-7700 3,6 GHz com 16Gb de memória RAM DDR4. O algoritmo foi executado duas vezes, sendo que na primeira vez obteve-se um conjunto Pareto onde o indivíduo com o menor número de termos resultante da primeira execução foi selecionado para pertencer à população inicial da segunda execução, ou seja, ser uma semente para esta nova rodada. Isto foi feito com o intuito de obter um conjunto Pareto ótimo (resultado final) com a maioria de suas soluções possuindo um número reduzido de regressores. Por fim, os modelos obtidos por meio de simulação Um Passo à Frente durante a execução do algoritmo foram submetidos à simulação livre com os dados de treinamento e validação dinâmicos, visto que seus resultados retratam melhor a realidade da dinâmica dos modelos. Os erros em regime dinâmico gerados para cada modelo pelas simulações livres, também utilizando a Equação 4, são utilizados no critério de decisão para definir o modelo a ser selecionado juntamente com os erros de regime estático e número de termos.

A metodologia de apoio à decisão aplicada para selecionar o modelo com melhor representatividade seguiu as seguintes etapas: i. encontrou-se a superfície Pareto ótimo entre os objetivos de erro em regime estático e erro de treinamento em regime dinâmico; ii. utilizou-se o *knee criteria of the Pareto curve* (Das, 1999) a fim de encontrar os modelos que possuem maior senso de compromisso entre os objetivos, ou seja, os modelos mais próximos da origem da superfície. Além disso, as medidas de incerteza do sensor de pressão foram levadas em conta no suporte à decisão, como feito em Barbosa et al. (2011). Sendo assim, todos os modelos selecionados satisfizeram a condição de erro em regime estático abaixo de  $0,031 [mlc^2]$  (pois o limite de erro do sensor é de  $\pm 0.175 [mlc]$ ); iii. os modelos selecionados foram analisados sob a perspectiva do erro em regime dinâmico de treinamento e número de termos, uma vez que o erro em regime estático se apresenta inferior à incerteza do sensor, formando assim uma nova fronteira de Pareto ótima; iv. os modelos da nova superfície de Pareto são avaliados utilizando dados de validação, formando assim uma terceira fronteira de Pareto entre erro em regime dinâmico de validação e número de termos do modelo; v. a partir desta última fronteira de Pareto, o modelo que melhor se adéqua aos objetivos é selecionado, priorizando o modelo mais parcimonioso.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após a execução do algoritmo de otimização multiobjetivo NSGA-II, foi obtido um conjunto Pareto ótimo contendo sessenta modelos NARMAX, que pode ser visto na Figura 3a. Nessa figura o desempenho dos modelos encontrados foi avaliado, em simulação livre, utilizando dois conjuntos de dados diferentes, a saber: conjunto de dados de ensaio estático e conjunto de dados de ensaio dinâmico de treino. A Figura 3b, por outro lado, apresenta o desempenho, em simulação livre, dos mesmos modelos, porém utilizando os dados de ensaio dinâmico de validação. Em ambos os Paretos, o Modelo Barbosa et al. (2011) foi adicionado para fins de comparação com o desempenho dos modelos encontrados.

A seleção do modelo que melhor representa o sistema foi feita tomando como base a metodologia descrita na Seção 3. Em primeiro lugar, foi encontrada a superfície Pareto ótimo entre os objetivos de erro em regime estático e erro com dados de treinamento em regime dinâmico, representada na Figura 4a, sendo essa uma perspectiva em duas dimensões da Figura 3a. É possível observar a *trade-off* entre os objetivos e a região do espaço das funções custos denominada “joelho” da curva de Pareto, onde há um melhor compromisso entre os objetivos. Fazendo uma análise mais criteriosa da fronteira de Pareto, observou-se que quatro modelos atenderam ao critério do joelho (*knee criteria*) e apresentaram valores de erro no regime estático abaixo do limite de erro do sensor de pressão, como pode ser visto na Figura 4b.

De posse desses quatro modelos, prosseguiu-se com a análise sob a perspectiva do erro em regime dinâmico com dados de treinamento e número de termos dos modelos, onde um modelo foi descartado pelo motivo de ser dominado pelos outros dois modelos pertencentes à nova fronteira de Pareto (Figura 5a). Por fim, os três modelos restantes foram analisados sob a perspectiva do erro em regime dinâmico com dados de validação e número de termos, que pode ser visto na Figura 5b. Nesta análise o modelo de oito termos é dominado, restando apenas dois modelos na nova fronteira de Pareto, onde o modelo escolhido foi aquele que se mostrou mais parcimonioso, ou seja, o modelo que apresenta um menor número de regressores.

O indivíduo selecionado como sendo a solução mais adequada é destacado na Figura 5b. A Equação 7 representa a estrutura do modelo NARX selecionado de acordo com o critério supracitado, doravante denominado Modelo Escolhido:

$$S(k) = \theta_1 y(k-1)y(k-5) + \theta_2 u(k-4)y(k-6) + \theta_3 u(k-1)u(k-3) + \theta_4 u(k-1) + \theta_5 u(k-6) + \theta_6 y(k-1)^2 \quad (7)$$

Na Tabela 3 estão dispostos o valores de erro médio quadrático nos dados dinâmicos e estáticos, assim como o número de regressores do Modelo Escolhido. A título de comparação, o modelo com dezessete regressores, obtido em Barbosa et al. (2011), com seus parâmetros estimados por meio dos mínimos quadrados estendido, a partir de agora denominado Modelo Barbosa, foi submetido à mesma rotina de avaliação, ou seja, foi feito o cálculo do

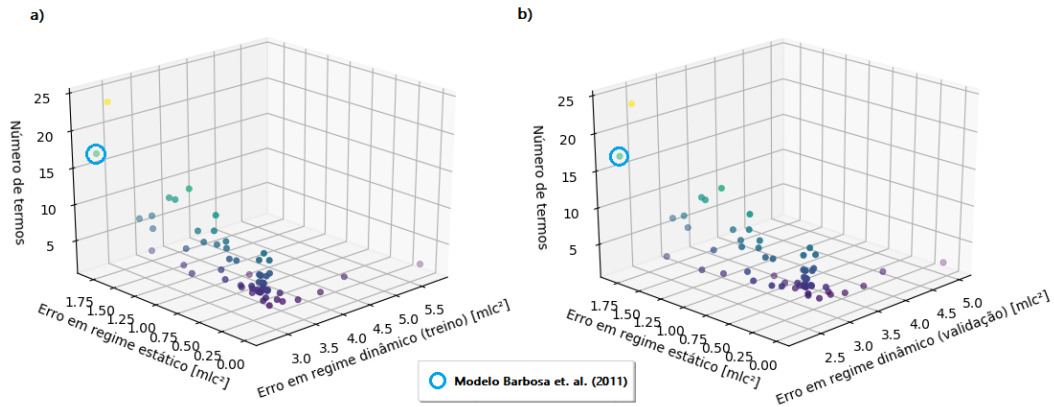


Figura 3. Conjunto Pareto (3 objetivos) a) Dados de treino aplicados em simulação livre em regime dinâmico; b) Dados de validação aplicados em simulação livre em regime dinâmico.

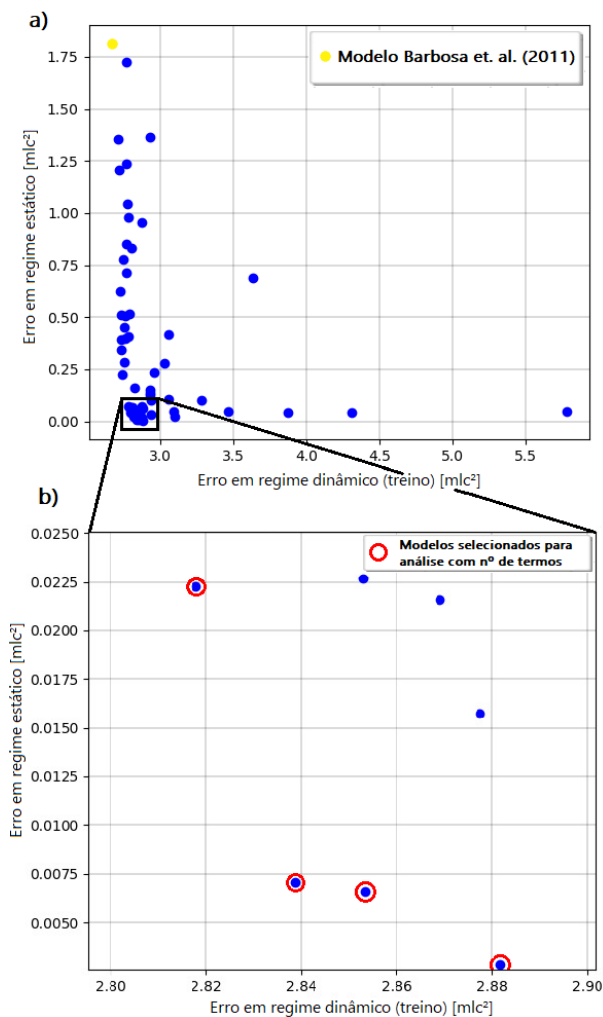


Figura 4. a) Avaliação do conjunto Pareto obtido com dados dinâmicos de treinamento e dados de ensaio estático (ambos Simulação Livre); b) Zoom no “Joelho” do conjunto Pareto para seleção de modelos.

MSE em regime estático e em regime dinâmico com dados de teste e validação, por meio de simulação livre. Seus resultados também são apresentados na Tabela 3.

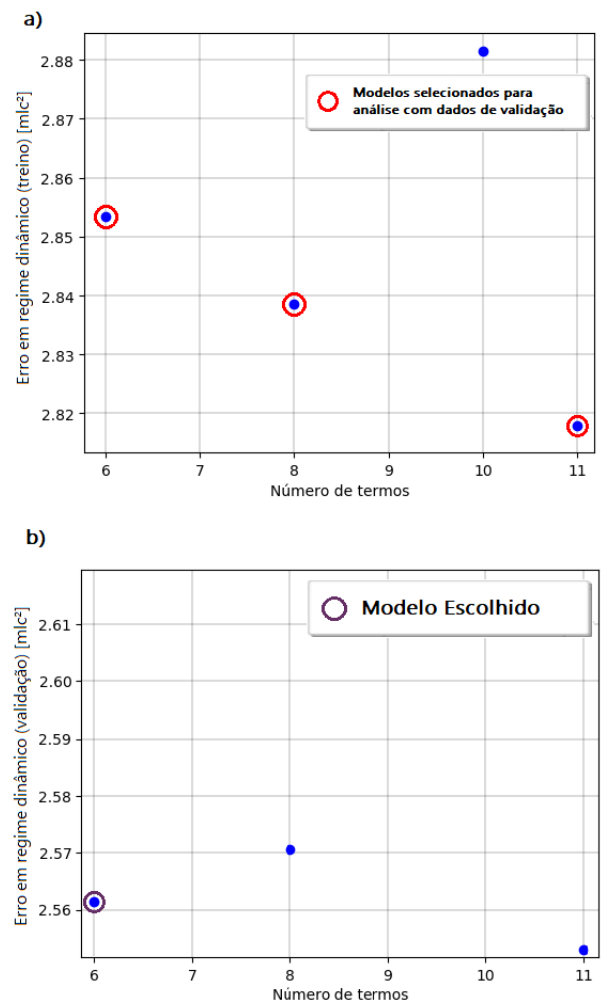


Figura 5. a) Avaliação do conjunto Pareto obtido com dados dinâmicos de treinamento e número de termos; b) Avaliação do conjunto Pareto obtido com dados dinâmicos de validação e número de termos.

Confrontando os resultados obtidos por cada modelo apresentado na Tabela 3, é possível notar que para os dados estáticos o erro do modelo obtido por meio do NSGA-II se mostrou mais apto, com um erro estático bastante inferior

Tabela 3. Erros estático e dinâmico do Modelo Barbosa et al. (2011) e Modelo Escolhido, ambos utilizando Simulação Livre.

	Erro estático [ $mlc^2$ ]	Erro dinâmico de treino [ $mlc^2$ ]	Erro dinâmico de validação [ $mlc^2$ ]	Nº de regressores
Modelo Escolhido	0,00659	2,85348	2,5614	6
Modelo Barbosa et al. (2011)	1,81251	2,66776	2,16486	17

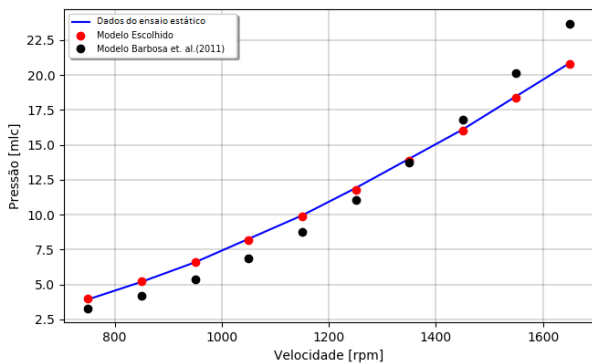


Figura 6. Comparação entre o Modelo Escolhido e Modelo Barbosa et al. (2011) para os dados estáticos.

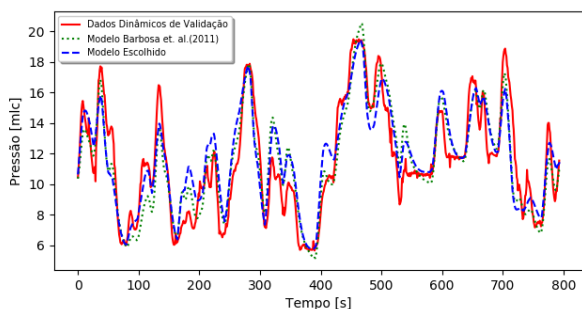


Figura 7. Comparação entre o Modelo Escolhido e Modelo Barbosa et al. (2011) para os dados dinâmicos de validação (Simulação Livre).

se comparado com o Modelo Barbosa. Por outro lado, analisando os resultados advindos dos dados de validação dinâmica, o modelo encontrado em Barbosa et al. (2011) apresentou resultados melhores, porém com um número superior de regressores. É interessante notar que o Modelo Escolhido, mesmo com um número reduzido de regressores, consegue manter um comportamento dinâmico relativamente próximo do Modelo Barbosa.

Os resultados da simulação livre para ambos os modelos, utilizando os valores de velocidade do regime estático expostos na Tabela 1, são apresentados graficamente na Figura 6 para melhor entendimento, onde fica claro a superioridade do Modelo Escolhido. Por fim, na Figura 7 são expostos de forma gráfica os resultados da simulação livre para o Modelo Escolhido e Modelo Barbosa aplicados ao conjunto de dados do regime dinâmico de validação.

## 5. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho teve por objetivo encontrar um modelo NARMAX parcimonioso de um sistema hidráulico de bombeamento com uma boa representação de seu comportamento estático e dinâmico.

Para resolver o problema de seleção de estrutura NARX, foi implementado o Algoritmo Genético multiobjetivo, NSGA-II, onde foram utilizados três funções custo, a saber: i. redução do erro médio quadrático do regime estático, ii. redução do erro médio quadrático do regime dinâmico e iii. redução do número de regressores. A curva estática do modelo foi encontrada por meio de sua simulação livre para entradas constantes específicas, e o desempenho dinâmico foi avaliado por meio de previsão um passo à frente. Sendo assim, obteve-se um conjunto Pareto ótimo com sessenta possíveis modelos. Utilizou-se então o critério do joelho (do inglês, *knee criteria*) do conjunto Pareto ótimo em conjunto com o limite de erro do sensor de pressão para selecionar o modelo mais parcimonioso.

O modelo encontrado neste trabalho possui seis regressores, com um erro médio quadrático em regime estático de  $0,00659 [mlc^2]$  e com erros dinâmicos para dados de treino e dados de validação, em simulação livre, iguais a  $2,85348 [mlc^2]$  e  $2,5614 [mlc^2]$ , respectivamente. Ao comparar com um modelo prévio da literatura, que possui 17 regressores e apresentou um erro médio quadrático em regime estático de  $1,81251 [mlc^2]$ , erros em regime dinâmico com dados de treino e validação, em simulação livre, iguais a  $2,6677 [mlc^2]$  e  $2,1649 [mlc^2]$ , respectivamente, é possível afirmar que ambos os modelos possuem desempenho relativamente próximo para os dados dinâmicos de validação. Porém, o modelo implementado possui um erro em regime estático bastante reduzido mesmo possuindo menos da metade do número de regressores.

Diante do exposto, é possível concluir que o algoritmo NSGA-II é um bom método para seleção e otimização de estruturas de modelo NARMAX, que o modelo encontrado é parcimonioso e consegue representar tanto o comportamento dinâmico quanto estático do sistema de bombeamento hidráulico. Trabalhos futuros pretendem explorar outros critérios de seleção de modelos em conjunto Pareto ótimos. Outro aspecto interessante a ser explorado é utilizar o critério de Akaike (Akaike, 1974), que reduz o número de objetivos de três para dois, simplificando a otimização multi-objetiva. Também pretende-se comparar o desempenho do NSGA-II com outras técnicas de otimização multiobjetivo evolucionárias, tais como NSGA-III e SPEA-II. Por fim, também é de interesse implementar a simulação livre na estimação do erro do conjunto de dados dinâmicos durante o treinamento, a fim de obter uma melhor generalização dos modelos encontrados.

## AGRADECIMENTOS

Agradecimento à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), à FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais), ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e à UFLA (Universidade Federal de Lavras) pelos recursos financeiros destinados e toda a infraestrutura.

tura necessária para execução do projeto, sem os quais seria improvável a realização do mesmo.

## REFERÊNCIAS

- Aguirre, L.A. e Billings, S. (1995). Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering. *International journal of control*, 62(3), 569–587.
- Aguirre, L.A. e Letellier, C. (2009). Modeling nonlinear dynamics and chaos: a review. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009.
- Aguirre, L.A. (2007). Introdução à identificação de sistemas-técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais. *Editora da UFMG. 3a edição*.
- Aguirre, L.A. e Mendes, E.M. (1996). Global nonlinear polynomial models: Structure, term clusters and fixed points. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 6(02), 279–294.
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. In *Selected Papers of Hirotugu Akaike*, 215–222. Springer.
- Barbosa, B.H., Aguirre, L.A., Martinez, C.B., e Braga, A.P. (2011). Black and gray-box identification of a hydraulic pumping system. *IEEE Transactions on control systems technology*, 19(2), 398–406. . Data Set: <http://www.aia.ufla.br/home/filesdatasets/> -Accessed:2019-11-15.
- Castro, H.C.d. e Barbosa, B.H.G. (2019). Algoritmos multi-objetivos para detecção de estruturas em modelos narx utilizando técnicas pem e sem. *Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*.
- Darwin, C. (1859). *On the origin of species*, volume 62.
- Das, I. (1999). On characterizing the “knee” of the pareto curve based on normal-boundary intersection. *Structural optimization*, 18(2-3), 107–115.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., e Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(2), 182–197.
- Goldberg, D.E. e Holland, J.H. (1988). Genetic algorithms and machine learning.
- Goldberg, D.E. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization and machinelearning*. New York: Addison-Wesley.
- Hafiz, F., Swain, A., e Mendes, E. (2019a). Multi-objective evolutionary framework for non-linear system identification: A comprehensive investigation. *Neurocomputing*.
- Hafiz, F., Swain, A., e Mendes, E.M. (2019b). Orthogonal floating search algorithms: From the perspective of nonlinear system identification. *Neurocomputing*, 350, 221–236.
- Hafiz, F., Swain, A., e Mendes, E.M. (2019c). Two-dimensional (2d) particle swarms for structure selection of nonlinear systems. *Neurocomputing*, 367, 114–129.
- Holland, J.H. (1992). Adaptation in natural and artificial systems. 1975. *Ann Arbor, MI: University of Michigan Press and*.
- Leontaritis, I. e Billings, S.A. (1985). Input-output parametric models for non-linear systems part i: deterministic non-linear systems. *International journal of control*, 41(2), 303–328.
- Ljung, L. (1999). System identification. *Wiley encyclopedia of electrical and electronics engineering*, 1–19.
- Nakariyakul, S. e Casasent, D.P. (2009). An improvement on floating search algorithms for feature subset selection. *Pattern Recognition*, 42(9), 1932–1940.
- Nariyoshi, P.C., Deller, J.R., e Yan, J. (2017). Modified genetic crossover and mutation operators for sparse regressor selection in narx brain connectivity modeling. In *2017 8th International IEEE/EMBS Conference on Neural Engineering (NER)*, 660–663. IEEE.
- Piroddi, L. (2008). Simulation error minimisation methods for narx model identification. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 3(4), 392–403.
- Piroddi, L., Farina, M., e Lovera, M. (2012). Black box model identification of nonlinear input–output models: a wiener–hammerstein benchmark. *Control Engineering Practice*, 20(11), 1109–1118.
- Pope, K.J. e Rayner, P.J. (1994). Non-linear system identification using bayesian inference. In *Proceedings of ICASSP’94. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, volume 4, IV–457. IEEE.
- Pudil, P., Novovičová, J., e Kittler, J. (1994). Floating search methods in feature selection. *Pattern recognition letters*, 15(11), 1119–1125.
- Retes, P.F.L. e Aguirre, L.A. (2019). Narmax model identification using a randomised approach. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 31(3), 205–216.
- Sjöberg, J., Zhang, Q., Ljung, L., Benveniste, A., Delyon, B., Glorennec, P.Y., Hjalmarsson, H., e Juditsky, A. (1995). Nonlinear black-box modeling in system identification: a unified overview. *Automatica*, 31(12), 1691–1724.
- Söderström, T. e Stoica, P. (1988). *System identification*. Prentice-Hall, Inc.
- Somol, P. e Pudil, P. (2000). Oscillating search algorithms for feature selection. In *Proceedings 15th International Conference on Pattern Recognition. ICPR-2000*, volume 2, 406–409. IEEE.
- Yassin, I.M., Zabidi, A., Ali, A.M., Syahirul, M., Md Tahir, N., Zainol Abidin, H., e Rizman, Z.I. (2016). Binary particle swarm optimization structure selection of nonlinear autoregressive moving average with exogenous inputs (narmax) model of a flexible robot arm. *International Journal on Advanced Science, Engineering and Information Technology*, 6(5), 630–637. doi:10.18517/ijaseit.6.5.919.
- Zakaria, M.Z., Jamaluddin, H., Ahmad, R., e Loghmanian, S.M. (2012). Comparison between multi-objective and single-objective optimization for the modeling of dynamic systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 226(7), 994–1005.
- Zhang, Q. e Li, H. (2007). Moea/d: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, 11(6), 712–731.
- Zitzler, E., Laumanns, M., e Thiele, L. (2001). Spea2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm. *TIK-report*, 103.