

# Controle preditivo robusto baseado em tubos para modelos de entrada e saída

João Bernardo Aranha Ribeiro\* Rodrigo da Silva Gesser\*  
Daniel Martins Lima\*\* Julio Elias Normey-Rico\*

\* Departamento de Automação e Sistemas, Universidade Federal de  
Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina,  
(ribeirojoaobernardo@gmail.com, rodrigoge@hotmail.com,  
julio.normey@ufsc.br)

\*\* Departamento de Controle, Automação e Computação, Universidade  
Federal de Santa Catarina, Blumenau, Santa Catarina  
(daniel.lima@ufsc.br)

---

**Abstract:** This work proposes an adaptation to the tube-based robust model predictive control (TRMPC) technique for tracking step references. The TRMPC controller proposed in the literature ensures robust constraint satisfaction, stability, and convergence to the desired steady state assuming that the system states are available for measurement, which is not the case in practice. The proposed adaptation aims to allow the application of this technique in systems based on input and output data, without using observers. An illustrative example is simulated to compare the proposed approach with the current state of the art.

**Resumo:** Este artigo propõe uma adaptação à técnica de controle preditivo robusto baseado em tubo (TRMPC) para rastrear referências do tipo degrau. O controlador TRMPC proposto na literatura garante a satisfação robusta das restrições, a estabilidade, e a convergência para o estado estacionário desejado supondo que os estados do sistema estão disponíveis para medição, o que não acontece na prática. A adaptação proposta visa permitir a aplicação da técnica em sistemas baseados em dados de entrada e saída, dispensando o uso de observadores. Um exemplo ilustrativo é simulado para comparar a abordagem proposta com o estado da arte atual.

*Keywords:* Output feedback; Robust control; Model Predictive Control; Robust stability.

*Palavras-chaves:* Realimentação de saída; Controle robusto; Controle preditivo; Estabilidade robusta.

---

## 1. INTRODUÇÃO

O Controle Preditivo baseado em Modelo (MPC - *Model Predictive Control*) refere-se a uma família de controladores que vem recebendo atenção considerável impulsionada em grande parte por sua capacidade de lidar com restrições de equipamentos e de segurança. A importância disso é que operar próximo a essas restrições é necessário, em muitos casos, para uma operação mais lucrativa ou mais eficiente do processo (Maciejowski, 2002). A capacidade de lidar com restrições combinada com outras vantagens, como inclusão de ações *feed-forward* e compensação de não linearidades, explicam porque o MPC se tornou uma ferramenta poderosa e prática para o controle de processos industriais desde seu surgimento no final dos anos setenta (Camacho and Bordons, 2007). Alguns exemplos de aplicações industriais que comprovam o sucesso do MPC são mostrados por Qin and Badgwell (2003).

Entretanto, a aplicação do MPC vem acompanhada de certos desafios, sendo os mais relevantes: custo computacional/escalabilidade da técnica e robustez frente às incertezas no modelo que representa o processo. Note que a essência do problema de controle normalmente está na modelagem. Em outras palavras, o MPC é projetado

assumindo um modelo de planta perfeito. Na prática, esses modelos geralmente estão associados às incertezas, como erros de estimativa dos parâmetros do modelo ou de sua própria estrutura, alterações nos pontos operacionais ou distúrbios não medidos. Tais incertezas podem causar o deterioramento do desempenho do controlador ou até mesmo levar a planta à instabilidade. O problema então passa a ser como garantir a estabilidade da malha fechada do sistema na presença dessas incertezas. Um MPC que pode solucionar esse problema é chamado de MPC robusto (RMPC - *Robust MPC*).

Existem várias abordagens para projetar um RMPC que são discutidas no *survey* de Jalali and Nadimi (2006) e no trabalho de Gesser (2018). A grande desvantagem de todos esses métodos, e de uma parte significativa da literatura recente de pesquisa do MPC, é que as contribuições para a robustez são baseadas em modelos de espaço de estados nos quais a estabilidade é geralmente garantida sob a suposição de que os estados do sistema podem ser medidos, o que normalmente não acontece na prática (Mayne et al., 2000), (Findeisen et al., 2003). Quando esses estados não estão disponíveis, a lei de controle usa estimativas de estado geradas por um observador ou um estimador.

Para sistemas lineares não sujeitos a distúrbios que empregam um observador e controle linear, a estabilidade da malha fechada pode ser garantida pelo princípio de separação. Tal afirmação não é válida quando distúrbios estão presentes ou quando o controlador não é linear. Note que quando as restrições do sistema estão ativadas no MPC, a realimentação dos estados pode ser dominada por propriedades não lineares. De acordo com González et al. (2009), a malha fechada de um sistema controlado por uma realimentação de estados combinado com um observador pode ser instável, mesmo que o controlador estabilize a planta quando os estados são mensuráveis. Portanto, o efeito da dinâmica do observador se torna uma questão ainda mais complicada, como demonstrado por Tenny et al. (2004) e por Wang and Young (2006).

Assim, a estabilidade robusta geralmente só pode ser obtida se o sistema nominal for inerentemente robusto e os erros de estimativa forem suficientemente pequenos (Grimm et al., 2004). Portanto, para que um controle baseado em estimativas de estado não atue de forma equivocada, o estimador ou observador deve garantir um erro de estimativa pequeno. Alternativamente, pode-se usar métodos robustos de projeto de controlador que levem diretamente em consideração o erro de estimativa de estado do observador (Mayne et al., 2006).

De qualquer forma, a inclusão de tais observadores ao projeto aumenta sua complexidade. Ademais, pode dificultar a prova das garantias de robustez ou até diminuir a mesma, conforme mostrado em Bitmead et al. (1990) e Taylor et al. (2000).

Dessa forma, o problema então é obter uma técnica RMPC que não necessite de observadores ou estimadores de estados e que tenha um custo computacional aceitável, de forma que possa ser aplicada na indústria. O ponto de partida para lidar parcialmente com esse problema é o trabalho de Gesser (2018). Neste, uma análise dos principais problemas de algumas estratégias RMPC foi realizada e uma comparação profunda entre elas foi feita com foco no custo computacional e na escalabilidade dos mesmos. Partindo disso, tem-se que um RMPC baseado em Tubos (TRMPC - *Tube-based Robust MPC*) proposto por Langson et al. (2004) e por Mayne et al. (2005) parece vantajoso. Pesquisas na área mostram resultados promissores, como pode ser visto em Ding (2010) and Limon et al. (2010). Ademais, Mayne et al. (2011) apresenta um resumo sobre a evolução e as vantagens do uso do TRMPC.

Escolhida a técnica, resta lidar com a situação na qual não se tem acesso a todos os estados. Para assegurar estabilidade robusta a um sistema incerto nesse caso, Mayne et al. (2006) propuseram um TRMPC com um observador de Luenberger embutido na lei de controle. Entretanto, os cálculos e a sintonia dessa proposta são bem mais complexos devido às duas dinâmicas (uma do observador e uma do controlador em si) consideradas no projeto de controle. Note que a abordagem TRMPC utiliza o conceito de conjuntos robustos positivamente invariantes (RPI - *Robust Positively Invariant*) em sua estrutura, e que duas dinâmicas significa calcular dois conjuntos RPIs do sistema. Segundo Martins and Odloak (2016), o cálculo *offline* dos conjuntos RPIs pode exigir grande poder computacional. Além disso, Alvarado (2007) afirma

que a parte mais complexa do TRMPC é justamente o cálculo desses conjuntos.

Para tratar dos problemas discutidos anteriormente, neste trabalho é proposta uma adaptação do TRMPC para rastreamento de Limon et al. (2010) em um TRMPC baseado em uma representação em espaço de estado não-mínimo (NMSS - *Non Minimal State Space*) para sistemas lineares. O modelo NMSS tem como estados as entradas e saídas do sistema em distintos instantes de tempo no passado e, portanto, os estados do sistema sempre estão disponíveis para medição. Assim, essa abordagem evita o uso de observadores sem aumentar demasiadamente a complexidade de sintonia da técnica, enquanto garante estabilidade robusta da malha fechada do sistema. Alvarado et al. (2008) mostram um procedimento para melhoria da sintonia do TRMPC que ainda não foi proposto para sistemas com observadores. Tal procedimento pode ser utilizado também para a técnica proposta aqui. Note que o exemplo ilustrativo deste artigo é bastante simples e não necessita de uma sintonia fina, portanto, para esse caso tal procedimento não é necessário. Entretanto, frisa-se que para sistemas reais, o projeto do controlador deve ser feito de forma a diminuir o custo computacional e a conservatividade do problema.

O restante desse artigo é organizado da seguinte maneira. Na Seção 2, a estratégia TRMPC é explanada e, posteriormente, a adaptação proposta, juntamente com suas vantagens e desvantagens. A Seção 3 apresenta um exemplo ilustrativo para comparação entre a abordagem proposta e o estado-da-arte atual, enfatizando-se as vantagens e desvantagens de ambas as técnicas. As conclusões do artigo são apresentadas na Seção 4.

## 2. FORMULAÇÃO DO CONTROLADOR

Nesta seção, a formulação do controlador robusto baseado em tubos é apresentada, seguida da adaptação de modelo proposto, finalizando com as vantagens e limitações da técnica adaptada.

### 2.1 Descrição do Problema

Considere um sistema discreto, linear e invariante no tempo:

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  são os estados atuais,  $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  são as entradas atuais,  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$  são as saídas atuais,  $\mathbf{x}^+$  são os estados no próximo instante de tempo,  $\mathbf{w} \in \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$  são distúrbios desconhecidos e limitados nos estados.  $\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \mathcal{W}$  são poliedros convexos que contém a origem em seu interior e representam as restrições ou os limites do sistema. Assume-se que o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é controlável, que as matrizes  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  são conhecidas e que os estados estão disponíveis para medição.

A metodologia TRMPC utiliza um tubo de trajetórias em que cada uma delas corresponde a uma realização particular da incerteza (Rawlings and Mayne, 2009).

Na Figura 1, determinadas trajetórias de um sistema são simuladas por 3 instantes de tempo. A trajetória central

equivale ao sistema nominal evoluindo considerando os distúrbios nulos, as linhas nas extremidades são as trajetórias máximas e mínimas quando consideradas os limites de  $\mathcal{W}$ . A ideia é usar um MPC convencional para a trajetória nominal, usando restrições adequadamente apertadas e usar elementos de realimentação para direcionar todas as trajetórias dentro do tubo para perto da trajetória central.

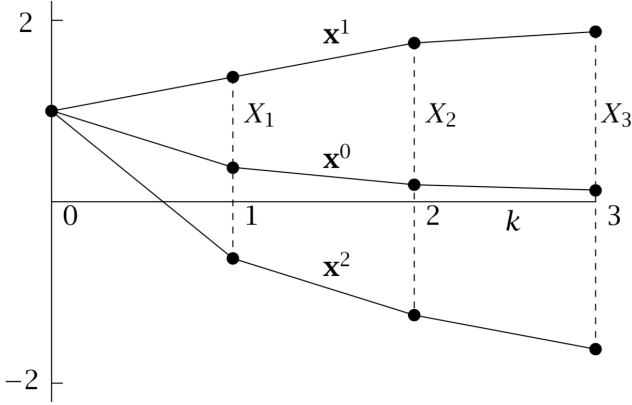


Figura 1. Trajetórias dos estados. Adaptado de Rawlings and Mayne (2009).

Considere então que a resposta nominal do sistema (1) é obtida negligenciando os distúrbios.

$$\bar{\mathbf{x}}^+ = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}} \quad (2)$$

onde  $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{\mathcal{X}}$  são os estados nominais,  $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{\mathcal{U}}$  são as entradas nominais,  $\bar{\mathbf{y}} \in \bar{\mathcal{Y}}$  são as saídas nominais.  $\bar{\mathcal{X}}$ ,  $\bar{\mathcal{U}}$ ,  $\bar{\mathcal{Y}}$  são poliedros convexos para o sistema nominal.

Assumindo que uma sequência de ações de controle ( $\bar{\mathbf{u}}^a \triangleq [\bar{\mathbf{u}}(0), \bar{\mathbf{u}}(1), \dots, \bar{\mathbf{u}}(i)]$ ) é calculada para o sistema (2), então a predição da trajetória nominal iniciando em  $\mathbf{x}$  é dada pela recursão  $\bar{\mathbf{x}}(i+1) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(i) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(i)$ , com  $\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}$ . Uma realimentação de estados pode ser utilizada para garantir que todas as possíveis trajetórias do sistema acompanhem a trajetória nominal:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \triangleq (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (3)$$

sendo  $\mathbf{K}$  um ganho para rejeição de distúrbio, e  $\mathbf{e}$  o erro entre o estado real e o nominal que satisfaz:

$$\mathbf{e}^+ = \mathbf{A}_K \mathbf{e} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{A}_K = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) \quad (4)$$

Assumindo que tal ganho torna a matriz  $\mathbf{A}_K$  estável, então se pode limitar a evolução do erro  $\mathbf{e}$  utilizando conjuntos positivamente invariantes (RPI) (Kolmanovsky and Gilbert, 1998).

Para o sistema (4), um conjunto  $\phi_K$  é RPI se  $\mathbf{A}_K \phi_K \oplus \mathcal{W} \subseteq \phi_K$ , onde  $\oplus$  representa a soma de Minkowski. Essa propriedade garante que a trajetória real sempre estará dentro do tubo definido por  $\mathbf{x} \in \bar{\mathbf{x}} \oplus \phi_K$  para todas as possíveis trajetórias de  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ . Note então que  $\phi_K$  é o tubo em si e representa os efeitos do distúrbio na malha fechada do sistema nominal.

Rakovic et al. (2005) mostra como calcular tais RPIs quando os distúrbios são pequenos. Para o caso em que os distúrbios são grandes, pode não ser possível calcular tal conjunto e, portanto, a robustez para esses distúrbios

pode não ser alcançada (Mayne et al., 2006). Ademais, os resultados de Rakovic et al. (2005) podem ser simplificados se o distúrbio do sistema puder ser representado por um zotopo (por exemplo um mapa afim de uma caixa unitária) conforme visto em Alvarado (2007). Note que tal simplificação geralmente não é válida quando se usa observadores.

De posse desses conjuntos, as restrições para o sistema nominal podem ser calculadas. Estas são mais rígidas de forma a considerar o supracitado distúrbio, e são definidas como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{X}} &= \mathcal{X} \ominus \phi_K \\ \bar{\mathcal{U}} &= \mathcal{U} \ominus \mathbf{K}\phi_K \end{aligned} \quad (5)$$

sendo  $\ominus$  a subtração de Minkowski. Isso garante que o sistema, controlado por (3), sempre satisfaça as restrições robustas. De forma simplificada, para o sistema nominal se subtrai o efeito dos distúrbios nas restrições originais do sistema (1).

Note que qualquer ganho  $\mathbf{K}$  que estabilize a malha fechada do sistema ( $\mathbf{A}_K$ ) pode ser escolhido para projeto. Entretanto, é este ganho que determina as propriedades de robustez deste controlador, além de afetar diretamente o tamanho e forma do conjunto RPI (Buckner and Lampariello, 2018). Assim, sugere-se determinar  $\mathbf{K}$  através da solução de um programa linear que minimize o tamanho do conjunto RPI, de modo que os conjuntos de restrições apertadas (5) não sejam conjuntos vazios. Observe que quanto menor o conjunto RPI utilizado, menos conservador é o controlador. Assim, sugere-se utilizar um RPI mínimo (mRPI) como conjunto  $\phi_K$ . O ganho pode ser calculado conforme Alvarado et al. (2008).

Por fim, a trajetória nominal, e por consequência todas as outras trajetórias, devem ser levadas rumo a um conjunto terminal (ao final do horizonte utilizado pelo MPC). Este conjunto também é RPI e uma vez dentro deste, o sistema não sai mais garantindo assim a estabilidade robusta.

## 2.2 Conjunto Invariante para Rastreamento

Nesta subseção, se define o que é o conjunto invariante para rastreamento utilizado como conjunto terminal do problema no MPC. Geralmente, utiliza-se um conjunto RPI máximo (MRPI) de forma a englobar todos os possíveis estados estacionários do sistema, tendo assim a maior região de atração possível enquanto satisfaz todos os requisitos de estabilidade, independentemente do tamanho do horizonte do controlador (Buckner and Lampariello, 2018).

Primeiramente, parametriza-se os estados e entradas factíveis para o sistema nominal. Os estados estacionários nominais  $\mathbf{z}_s = (\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)$  e os alvos de saída  $\mathbf{y}_s$  são dados por:

$$\mathbf{z}_s = \mathbf{M}_\theta \theta, \quad \mathbf{y}_s = \mathbf{N}_\theta \theta \quad (6)$$

onde  $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  é um vetor que caracteriza qualquer solução e  $\mathbf{M}_\theta$  e  $\mathbf{N}_\theta$  são matrizes adequadamente escolhidas.

O vetor  $\theta$  é utilizado para cálculo do conjunto terminal. Conforme visto em Limon et al. (2010), sendo um estado estendido  $\mathbf{x}^a \triangleq (\mathbf{x}, \theta)$ , e  $\mathbf{K}_\Omega$  um ganho que estabilize  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_\Omega)$  e  $\mathbf{K}_\theta \triangleq [-\mathbf{K}_\Omega \mathbf{I}_m] \mathbf{M}_\theta$ , com  $\mathbf{I}_m$  sendo a matriz identidade de ordem  $m$ . Então, o conjunto  $\Omega_t^a \subset \mathbb{R}^{n+n_\theta}$  é um conjunto invariante para rastreamento se para todo

$\mathbf{x}^a \in \Omega_t^a$  tem-se que  $((\mathbf{A} + \mathbf{BK}_\Omega)\mathbf{x} + \mathbf{BK}_\theta\theta, \theta) \in \Omega_t^a$ . Uma discussão mais detalhada sobre como calcular conjuntos MRPI é encontrada em Gilbert and Tan (1991).

Frisa-se que  $\mathbf{K}$  é utilizado no cálculo do mRPI  $\phi_K$  de forma a minimizar a conservatividade do problema,  $\mathbf{K}_\Omega$  é utilizado para calcular o MRPI  $\Omega_t^a$  de forma a maximizar a região de atração do controlador.

### 2.3 Formulação do Controle

A função custo desse controlador geralmente introduz um estado estacionário artificial  $(\bar{\mathbf{x}}_s, \bar{\mathbf{u}}_s) = \mathbf{M}_\theta \bar{\theta}$  como uma variável de decisão para garantir que qualquer  $(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)$  seja factível. Ou seja, mesmo que o sistema não consiga alcançar um determinado *setpoint*, o controlador ainda o levará ao ponto mais próximo possível da referência de forma a não retornar um controle ineficaz. O custo então penaliza o desvio entre a trajetória prevista e o estado estacionário artificial ao longo do horizonte  $N$  e também a diferença entre o estado estacionário artificial e o desejado de forma a garantir convergência ao mesmo. A função custo é dada por:

$$V_N(\mathbf{x}, \theta; \bar{\mathbf{u}}^a, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\theta}) = \sum_{k=0}^{N-1} \|\bar{\mathbf{x}}(i) - \bar{\mathbf{x}}_s\|_Q^2 + \|\bar{\mathbf{u}}(i) - \bar{\mathbf{u}}_s\|_R^2 + \|\bar{\mathbf{x}}(N) - \bar{\mathbf{x}}_s\|_P^2 + \|\bar{\theta} - \theta\|_T^2 \quad (7)$$

O problema de otimização a ser resolvido a cada instante de tempo é

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\mathbf{u}}^a, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\theta}} V_N(\mathbf{x}, \theta; \bar{\mathbf{u}}^a, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\theta}) \\ \text{s.a. } \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x} \oplus (-\phi_K) \\ \bar{\mathbf{x}}(i) \in \bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \ominus \phi_K \\ \bar{\mathbf{u}}(i) \in \bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \ominus \mathbf{K}\phi_K \\ (\bar{\mathbf{x}}(N), \bar{\theta}) \in \Omega_i^a \end{aligned} \quad (8)$$

Note que o estado inicial do sistema nominal  $\bar{\mathbf{x}}$  também é variável de decisão e precisa estar dentro de  $\mathbf{x} \oplus (-\phi_K)$ . O conjunto  $\phi_K$  representa o tubo em si, assim a primeira restrição objetiva manter o sistema real e o nominal próximos um do outro. As demais restrições tratam das restrições dos estados e das entradas para o sistema nominal e da restrição terminal do sistema.

### 2.4 Representação em Espaço de Estado Não-Mínimo

Nesta subseção, mostra-se como transformar uma representação de modelo entrada/saída em um espaço de estado não mínimo. Para simplificação da explanação, considere-se que o sistema não possui atrasos e que o modelo do distúrbio não é considerado. Assim, considere um modelo por equações à diferenças:

$$\mathbf{y}(k) + \sum_{i=1}^{na} \mathbf{A}_i \mathbf{y}(k-i) = \sum_{i=1}^{nb} \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k-i) \quad (9)$$

onde  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$  continuam sendo as saídas e entradas do sistema. Note que o modelo NMSS, também chamado de modelo realinhado, e suas variações já se provaram eficazes conforme Taylor et al. (2000), Maciejowski (2002). Ademais, González et al. (2009) utiliza essa representação

em um MPC estabilizante e Nguyen et al. (2011) em um controlador regulatório robusto baseado em um conjunto de Inequações Matriciais Lineares. Em comparação com o TRMPC, este último necessita do cálculo de mais conjuntos RPIs, incluindo conjuntos mais complexos do que os utilizados aqui (elipsoidais).

A partir de (9) pode-se escrever as matrizes do sistema (1) conforme:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 & \cdots & -\mathbf{A}_{na-1} & -\mathbf{A}_{na} & \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{B}_{nb-1} & \mathbf{B}_{nb} \\ \mathbf{I}_p & \cdots & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_{p \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{0}_{p \times m} \\ \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_{p \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{0}_{p \times m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_{p \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{0}_{p \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times p} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_{m \times p} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{I}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{m \times p} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1^T \ \mathbf{0}_{p \times m}^T \ \cdots \ \mathbf{0}_{p \times m}^T \ \mathbf{I}_m^T \ \mathbf{0}_m^T \ \cdots \ \mathbf{0}_m^T]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I}_p \ \mathbf{0}_p \ \cdots \ \mathbf{0}_p \ \mathbf{0}_{p \times m} \ \mathbf{0}_{p \times m} \ \cdots \ \mathbf{0}_{p \times m}] \quad (12)$$

com

$$\mathbf{x}_r = [\mathbf{x}_y, \ \mathbf{x}_u]$$

$$\mathbf{x}_y = [\mathbf{y}(k)^T \ \mathbf{y}(k-1)^T \ \cdots \ \mathbf{y}(k-na+1)^T]^T$$

$$\mathbf{x}_u = [\mathbf{u}(k-1)^T \ \mathbf{u}(k-2)^T \ \cdots \ \mathbf{u}(k-nb+1)^T]^T$$

sendo  $\mathbf{x}_r$  os novos estados do modelo realinhado,  $\mathbf{x}_y$  os estados relacionados com as saídas do sistema e  $\mathbf{x}_u$  os estados relacionados com as entradas do sistema. Note que (9) só representa bem sistemas sem transmissão direta e portanto o modelo NMSS não possui matriz  $\mathbf{D}$ . Tal fato não é um problema na prática já que sistemas com transmissão direta são bem incomuns na indústria.

### 2.5 Vantagens e Desvantagens da técnica

De posse do modelo pode-se aplicar a técnica TRMPC normalmente. Perceba que a restrição nos estados agora é dada por  $\bar{\mathcal{X}}_r = (\bar{\mathcal{Y}}, \bar{\mathcal{U}})$ , onde o subscrito  $r$  representa o modelo realinhado. Essa é a primeira grande diferença da adaptação proposta aqui que passa a considerar restrições na saída do sistema diretamente, enquanto todos os controladores propostos anteriormente consideram restrições nos estados.

Observe que em algumas indústrias frequentemente existem estados que são impossíveis de medir (Yang et al., 2018), indústrias de gás e petróleo por exemplo utilizam em sua maioria MPCs alimentados apenas por dados de entrada e saída (Campos et al., 2013), (Plucenio et al., 2017). Isso normalmente ocorre pois os modelos que representam o processo foram identificados utilizando dados de entrada e saída e assim qualquer espaço de estado mínimo que represente tal processo terá estados indisponíveis ou sem significado físico.

Portanto, é de suma importância observar que não faz sentido restringir um estado sem significado físico apenas para garantir indiretamente que as saídas do sistema fiquem em determinada faixa de valores. É mais eficaz trabalhar diretamente com as próprias saídas, ou seja, a adaptação proposta é interessante caso o processo controlado seja

melhor representado por modelos baseados em dados de entrada/saída.

A segunda vantagem da técnica proposta é o fato de que as simplificações nos cálculos dos mRPIs  $\phi_K$  e do ganho  $\mathbf{K}$  podem ser aplicadas tal qual na técnica original. No caso do ganho, Alvarado et al. (2008) mostra como achá-lo de forma a minimizar  $\phi_K$ , mas não há trabalhos discutindo como escolher os ganhos num sistema com observador. Já para o conjunto  $\phi_K$ , a simplificação de Alvarado (2007) pode ser aplicada na técnica proposta desde que o conjunto de distúrbio ( $\mathcal{W}$ ) possa ser representado por um zonotopo. Para o TRMPC com observadores essa simplificação não pode ser aplicada já que o conjunto de distúrbio da segunda dinâmica de erro depende de múltiplos fatores e geralmente não é um zonotopo, como mostrado em Mayne et al. (2006) e Alvarado et al. (2007).

Em contrapartida, a abordagem proposta utiliza um espaço de estado não mínimo, o que aumenta a complexidade do problema. Mais estados no sistema significa um  $\phi_K$  e um  $\Omega_t^a$  mais complexos. Entretanto, a técnica de Mayne et al. (2006), que usa observadores, calcula dois conjuntos  $\phi$  e depois realiza uma soma de Minkowski entre eles, ou seja, também seriam cálculos complexos. Ademais, apesar da presença de um observador alterar o nível de complexidade do conjunto terminal  $\Omega_t^a$ , ainda tende a ser mais simples que o conjunto calculado utilizando a adaptação proposta neste trabalho.

Por fim, é de suma importância reconhecer que o trabalho de Kögel and Findeisen (2017) também abordou o problema de realimentação de saída com um TRMPC menos conservador. Entretanto, restrições nas saídas ainda não são consideradas e, apesar de apenas um RPI ser utilizado, os próprios autores reconhecem que calculá-lo pode não ser computacionalmente possível. Nesse caso, é proposto calcular ambos os conjuntos mostrados em Mayne et al. (2006) e usá-los para aproximar o RPI desejado. Ademais, a representação do sistema utilizada torna o conjunto terminal mais complexo do que o original. Ou seja, as vantagens da técnica proposta se mantêm em sua totalidade.

### 3. EXEMPLO ILUSTRATIVO

Esta seção apresenta a comparação da técnica proposta, doravante chamada de TRMPC-NMSS, com o controlador de Mayne et al. (2006). O exemplo ilustrativo utilizado é o duplo integrador:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \mathbf{w} \\ \mathbf{y} = [1 \ 1] \mathbf{x} + \mathbf{v} \end{cases} \quad (13)$$

O sistema está sujeito a distúrbios nos estados e na saída. Considere também que os estados desse sistema não estão disponíveis. De fato, apenas tem-se acesso às entradas e saídas do mesmo. Pode-se construir um modelo NMSS para esse sistema, com as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

$$\mathbf{x}_r = [y(k), y(k-1), u(k-1)]^T,$$

$$\mathbf{w}_r = [w_{r1}, w_{r2}, w_{r3}]^T,$$

### 3.1 Restrições do Problema

As restrições nos estados e nas entradas dos modelos dados nas Equações (13) e (14) podem ser vistas na Tabela 1.

Tabela 1. Restrições do Problema.

	Modelo (13)	Modelo (14)
Restrições nos Estados	$-50 \leq x_1 \leq 10$	$-100 \leq x_1 \leq 20$
	$-50 \leq x_2 \leq 10$	$-100 \leq x_2 \leq 20$
		$-10 \leq x_3 \leq 10$
Restrições nas Entradas	$-10 \leq u_1 \leq 10$	$-10 \leq u_1 \leq 10$

Note que o modelo (13) deve atender às restrições nos estados e entradas do sistema sem se importar diretamente com restrições na saída. Já o modelo (14) tem restrições nas entradas e saídas. Para este exemplo, considera-se que  $-100 \leq \mathcal{Y} \leq 20$  e  $-10 \leq \mathcal{U} \leq 10$ . Como o modelo (13) não trabalha diretamente com as saídas da planta, as restrições nos seus estados foram escolhidas de maneira a serem equivalentes às restrições de saídas ( $\mathcal{Y} = \mathbf{C}\mathcal{X}$ ).

Note ainda que ambos os sistemas são suscetíveis a distúrbios limitados conforme mostrado na Tabela 2. Os valores máximos e mínimos desses distúrbios foram escolhidos com o objetivo de se fazer uma comparação honesta entre os controladores dos dois modelos conforme será mostrado nas próximas subseções.

Tabela 2. Limites dos Distúrbios.

Modelo (13)	Modelo (14)
$-0,001 \leq w_1 \leq 0,001$	$-2,5 \leq w_{r1} \leq 2,5$
$-0,001 \leq w_2 \leq 0,001$	$-2,5 \leq w_{r2} \leq 2,5$
$-0,4 \leq v \leq 0,4$	$-0,001 \leq w_{r3} \leq 0,001$

Ademais, perceba que se tem acesso apenas à saída da planta e, portanto, para o caso do modelo (13), não há informação a respeito do distúrbio que entra nesses estados. Na prática, os limites desse distúrbio seriam estimados baseados em testes feitos na planta. Se não há como medir os estados é necessário inferir qual seria o distúrbio máximo, mas tal inferência normalmente geraria um limite maior do que necessário pois, por motivos de segurança, se não é possível medir as variáveis então escolheria-se um cenário bastante conservador e, por consequência, um controlador mais conservador. Para este exemplo, pressupõe-se aqui que os efeitos desse distúrbio serão sentidos na saída em malha fechada, e assim  $\mathbf{w}$  e  $v$  podem ser unificados apenas em  $v$ . Portanto,  $w_1 = w_2 = 0$ . Além disso, para o modelo (14), observe que não há distúrbios na ação de controle, ou seja,  $w_{r3} \cong 0$ .

Por fim, sabe-se que a técnica aqui testada utiliza poliedros como restrições. Do ponto de vista do MPC, é melhor conhecer a representação-H desses poliedros e esta os deve representar completamente. A representação-H é simplesmente uma representação por desigualdades, o que torna o problema de otimização em uma função custo quadrática sujeita a restrições lineares, ou seja, um problema de programação quadrática. Portanto, a fim de eliminar possíveis restrições de igualdade, aproxima-se os distúrbios nulos por valores bem pequenos. Por exemplo,  $w = 0$  é substituído por  $|w| \leq 0,001$  conforme visto na Tabela 2. Ademais, escolheu-se  $|\mathbf{w}_r| \leq 2,5$  (um valor 6,25 vezes maior que  $v$ ) por motivos que ficarão claros posteriormente.

### 3.2 Inicialização do Problema

Os ganhos utilizados nesse exemplo são:

$$\mathbf{K} = [-1; -1] \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_r = [-1; 0; 0] \quad (15)$$

Para o sistema representado pelo modelo (13), os ganhos foram retirados de Alvarado et al. (2007). Note que os autovalores de malha fechada de ambas as dinâmicas são iguais a zero, isso nos dá uma dinâmica rápida porém bastante brusca. Para o modelo (14), escolheu-se a matriz  $\mathbf{K}_r$  de forma a alocar os autovalores do sistema também em zero a fim de fazer uma comparação justa.

A função de custo é definida conforme (7) com  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2$ ,  $R = 0.01$ ,  $\mathbf{Q}_r = \text{diag}(\mathbf{I}_2, R)$ ,  $\mathbf{P}$  é a matriz associada ao sistema controlado por  $\mathbf{u} = \mathbf{K}_\Omega \mathbf{x}$ , em que  $\mathbf{K}_\Omega = \mathbf{K}_{LQR}$  é a solução de um Regulador Linear Quadrático (LQR). O horizonte é  $N = 5$ .

### 3.3 Comparação dos Conjuntos mRPis

Escolhidos os ganhos e distúrbios do problema, calculou-se os conjuntos  $\phi$  cujas características são apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3. Características dos mRPis.

	Dimensão	Nº Desigualdades	Nº Vértices
$\phi_{ee}$	02	06	06
$\phi_{ec}$	02	04	04
$\phi_o = \phi_{ee} \oplus \phi_{ec}$	02	06	06
$\phi_K$	03	08	12

O TRMPC com observadores tem um conjunto que considera o erro de estimação do observador ( $\phi_{ee}$ ), um que considera o erro do controlador ( $\phi_{ec}$ ) e um conjunto total ( $\phi_o$ ), assim sempre é necessário calcular três conjuntos distintos. Para este exemplo, o conjunto final possui seis desigualdades. Note que para uma planta simples com dois estados era de se esperar um conjunto com quatro desigualdades, mas o uso do observador aumentou a complexidade do conjunto.

O TRMPC-NMSS proposto neste artigo só precisa calcular um conjunto, mas este tem três dimensões dado que o modelo realinhado possui três estados. Conforme esperado, o conjunto é mais complexo devido ao fato de ter estados a mais. Visa-se demonstrar então que ambas as técnicas geram conjuntos um pouco mais complexos do que a técnica original, que não pode ser usada quando os estados não estão disponíveis.

Perceba então que para utilizar a abordagem proposta aqui, oito desigualdades serão passadas ao MPC. A técnica de Mayne et al. (2006) precisa passar dez desigualdades já que  $\phi_o$  e  $\phi_{ec}$  são utilizados nas restrições. Assim, o TRMPC-NMSS leva uma pequena vantagem para o cálculo desses conjuntos neste exemplo.

### 3.4 Restrições Nominais do Problema

De posse dos conjuntos mRPis, as restrições para o sistema nominal de ambos os modelos são dadas por:

$$\begin{bmatrix} -48, 06 \\ -46, 13 \end{bmatrix} \leq \bar{\mathbf{x}} \leq \begin{bmatrix} 8, 06 \\ 6, 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -95, 1 \\ -92, 65 \\ -5, 1 \end{bmatrix} \leq \bar{\mathbf{x}}_r \leq \begin{bmatrix} 15, 1 \\ 12, 65 \\ 5, 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -5, 37 \end{bmatrix} \leq \bar{\mathbf{u}} \leq \begin{bmatrix} 5, 37 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -5, 1 \end{bmatrix} \leq \bar{\mathbf{u}}_r \leq \begin{bmatrix} 5, 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Perceba que as restrições nas entradas nominais em ambos os modelos são representadas por limites parecidos. Perceba também que as restrições na saída nominal do modelo (14) são aproximadamente o dobro das restrições nos estados do modelo (13). Isso se deve ao fato de que a saída é dada por  $\mathbf{y} = [1 \ 1] \mathbf{x}$ , e que neste exemplo busca-se mostrar que há diferença entre preocupar-se apenas com as restrições nas saídas e não nos estados em si.

O objetivo aqui era justamente encontrar um par  $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$  parecido para os dois modelos, de forma que ambos os problemas de otimização fossem similares. Tenha em mente que apenas as restrições apertadas (16) são passadas para o problema de otimização. Essa é a razão para a escolha  $|w_{r1}| \leq 2, 5$ ;  $|w_{r2}| \leq 2, 5$ , de forma a ter-se problemas de otimização similares com o objetivo de comparar ambos os controladores de forma justa.

### 3.5 Comparação entre conjuntos terminais

O fato do modelo não mínimo possuir mais estados torna seu conjunto terminal mais complexo quando comparado com qualquer controlador baseado em tubo. A Tabela 4 mostra algumas características desses conjuntos.

Tabela 4. Características conjuntos terminais

	Dimensão	Nº Desigualdades	Nº Vértices
$\Omega_{t,o}^a$	03	10	16
$\Omega_{t,r}^a$	04	12	34

Note que o conjunto referente ao modelo (14) tem 12 desigualdades (apenas 2 a mais do que a técnica com observadores). Isso significa que o MPC não teria dificuldades em trabalhar com esses conjuntos. Entretanto, o número de vértices necessário para representar  $\Omega_t^a$  é de 34 vértices, o que mostra que o cálculo desse conjunto pode não ser trivial. Assim, o custo computacional *online* da técnica é pequeno, mas o custo para cálculo *offline* desse conjunto é maior. Como o problema aqui é apenas ilustrativo, não houve dificuldades em obter os valores finais. Mas, frisa-se aqui a principal desvantagem do TRMPC-NMSS: conjuntos terminais mais complexos que as demais técnicas.

### 3.6 Simulação dos Controladores

Para comparar e mostrar as propriedades de ambos os controladores, uma simulação foi realizada partindo do sistema com estados iniciais iguais a zero ( $\mathbf{x}(0) = [0; 0]$ ,  $u(0) = [0]$  e  $\mathbf{x}_r(0) = [0; 0; 0]$ ). A referência então é deslocada para  $y_s = -60$  no instante  $k = 2$ , depois para  $y_s = 0$  no instante  $k = 32$  e a seguir para  $y_s = -20$  no instante  $k = 64$ . Essas mudanças ocorrem enquanto os sistemas estão sujeitos à mesma realização do distúrbio  $v$ , e para os dois casos tem-se  $\mathbf{T} = 10^5 \mathbf{I}_{n_\theta}$ . A planta é simulada usando a seguinte função de transferência.

$$P_D(z) = \frac{2z - 1}{z^2 - 2z + 1} \quad (17)$$

A resposta temporal é apresentada na Figura 2.

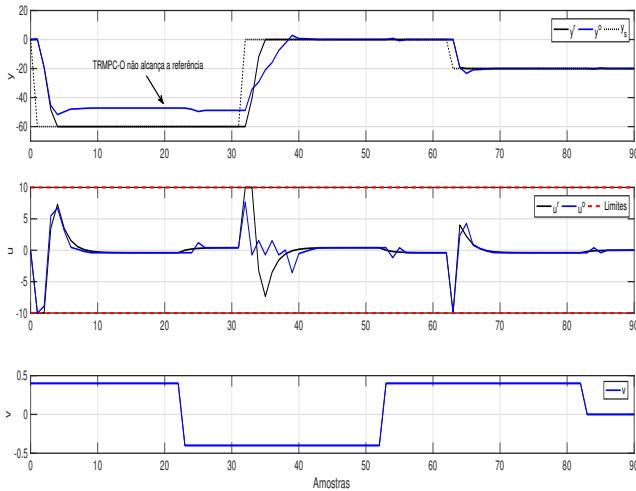


Figura 2. Resposta Temporal dos TRMPC.

Note que uma função de transferência é uma representação de modelo por dados de entrada e saída. Se as entradas e saídas são os únicos dados disponíveis para o projetista, então não faz sentido considerar distúrbios nos estados, exceto se tais estados são as próprias entradas e saídas.

Perceba também que a resposta do TRMPC-NMSS, representado por  $y^r$ , é mais agressiva do que a resposta do TRMPC com observadores (TRMPC-O), representado por  $y^o$ . Isso faz sentido já que o sistema com observadores precisa corrigir o erro de estimação e o erro de seguimento ao mesmo tempo. O TRMPC-O deve limitar o erro entre o sistema nominal e o sistema estimado baseando-se no erro entre o sistema estimado e o sistema real.

Ademais, observe que próximo ao instante  $k = 32$  o controle do TRMPC-NMSS satura, mas as restrições permaneceram respeitadas. Além disso, as mudanças bruscas no distúrbio não geraram efeitos consideráveis na saída do sistema em nenhum dos casos, mas podem ser percebidas na ação de controle.

Note ainda que o TRMPC-O não conseguiu alcançar a primeira referência. Isso ocorreu devido às restrições presentes nos estados e à forma como os estados estacionários do sistema foram parametrizados. Neste exemplo é suficiente mostrar que o modelo (13) possui dois estados e apenas uma entrada, assim para esse modelo  $\mathbf{x}_s = [y_s \ 0]$  sempre. Como o segundo estado é sempre zero em regime permanente pode parecer injusto então utilizar as restrições escolhidas, dado que apenas um estado é responsável pela saída. Entretanto, ambos os estados influenciam a saída no transitório do problema. Perceba que para um MPC que trabalha com dados de entrada e saída tem-se apenas limites nas saídas, sem conhecimentos dos estados, portanto é inevitável escolher restrições nos estados de forma a garantir que os limites em  $\mathcal{Y}$  sejam respeitadas a todo momento. Por fim, para o modelo (14), que trabalha diretamente com as saídas, a referência é alcançada sem problemas.

Assim, note que as respostas temporais para este exemplo são parecidas. Ou seja, a adaptação proposta é adequada para aplicação. A escolha entre utilizar a abordagem apresentada aqui ou a abordagem de Mayne et al. (2006) deve ser feita caso a caso a depender do sistema a ser contro-

lado, levando em consideração principalmente os cálculos referentes aos ganhos e aos conjuntos. De forma geral, o TRMPC-NMSS é particularmente melhor quando há uma preocupação com as saídas do sistema e não com seus estados. Ademais, as simplificações do método original também podem ser aplicadas para esse tipo de controlador. Note ainda que o TRMPC (e qualquer RMPC) pode se tornar inviável para incertezas muito grandes, ou seja, a técnica proposta pode se tornar inaplicável.

### 3.7 Limitações da adaptação proposta

Antes de aplicar o TRMPC-NMSS, é necessário fazer uma verificação no posto da matriz de controlabilidade do sistema. A matriz  $\mathbf{A}$  (10) pode ser dividida em quatro blocos a saber:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_y & \mathbf{A}_u \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

com  $\mathbf{A}_y$  representando os estados das saídas e  $\mathbf{A}_u$  os estados das entradas.

Sendo  $\mathbf{C}_o \triangleq [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots]$  a matriz de controlabilidade do sistema realinhado, então só é possível aplicar o TRMPC-NMSS para sistemas nos quais (19) é verdadeira.

$$\text{posto}(\mathbf{C}_o) \geq \text{posto}(\mathbf{A}_y) \quad (19)$$

Isso significa que o controlador tem que ter graus de liberdade suficientes para controlar pelo menos os  $\mathbf{x}_y$  estados. Perceba ainda que os valores do posto de  $\mathbf{A}_y$  dependem apenas do número de polos do sistema e não do número total de estados do modelo realinhado.

## 4. CONCLUSÃO

Um TRMPC adaptado para sistemas baseados em dados de entrada e saída foi proposto. A nova abordagem foi comparada com um controlador similar utilizando um exemplo ilustrativo de forma a enfatizar suas vantagens e desvantagens. Conclui-se que o controlador proposto mantém a complexidade e as simplificações de sintonia presentes na técnica original sem necessitar da medição dos estados, o que é uma vantagem quando comparado abordagens similares. Frisa-se entretanto que a técnica proposta também tem limitações, além de ter cálculos mais complexos para o conjunto terminal do problema. Nota-se entretanto, que suas vantagens superam suas desvantagens e assim a técnica proposta é competitiva para aplicação em sistemas baseados em dados de entrada e saída com respeito ao estado da arte atual.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), nº 304032/2019-0, e à Petrobras, nº 5850.0105704.17.9, pelo suporte para este trabalho.

## REFERÊNCIAS

Alvarado, I., Limon, D., Alamo, T., and Camacho, E.F. (2007). Output feedback Robust tube based MPC for tracking of piece-wise constant references. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. doi:10.1109/CDC.2007.4434772.



- Alvarado, I. (2007). *Model predictive control for tracking constrained linear systems*. Ph.D. thesis, University of Sevilla.
- Alvarado, I., Limon, D., Alamo, T., and Camacho, E. (2008). On the design of robust tube-based MPC for tracking. In *IFAC Proceedings Volumes*. doi:10.3182/20080706-5-KR-1001.3054.
- Bitmead, R., Gevers, M., and Wertz, V. (1990). Optimal control redesign of generalized predictive control. In *Adaptive Systems in Control and Signal Processing 1989*. doi:10.1016/b978-0-08-035727-0.50013-5.
- Buckner, C. and Lampariello, R. (2018). Tube-Based Model Predictive Control for the Approach Maneuver of a Spacecraft to a Free-Tumbling Target Satellite. In *Proceedings of the American Control Conference*. doi:10.23919/ACC.2018.8431558.
- Camacho, E.F. and Bordons, C. (2007). *Model predictive control*. Springer Science & Business Media.
- Campos, M.C.M.M., Gomes, M.d.C., and Perez, J.M.G.T. (2013). *Controle avançado e otimização na indústria do petróleo*.
- Ding, B. (2010). Properties of parameter-dependent open-loop MPC for uncertain systems with polytopic description. *Asian Journal of Control*. doi:10.1002/asjc.162.
- Findeisen, R., Imsland, L., Allgöwer, F., and Foss, B.A. (2003). State and output feedback nonlinear model predictive control: An overview. *European Journal of Control*. doi:10.3166/ejc.9.190-206.
- Gesser, R.d.S. (2018). *Robust model predictive control: a comparative study considering implementation issues*. Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Gilbert, E.G. and Tan, K.T. (1991). Linear Systems with State and Control Constraints: The Theory and Application of Maximal Output Admissible Sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*. doi:10.1109/9.83532.
- González, A.H., Perez, J.M., and Odloak, D. (2009). Infinite horizon MPC with non-minimal state space feedback. *Journal of Process Control*. doi:10.1016/j.jprocont.2008.06.001.
- Grimm, G., Messina, M.J., Tuna, S.E., and Teel, A.R. (2004). Examples when nonlinear model predictive control is nonrobust. *Automatica*. doi:10.1016/j.automatica.2004.04.014.
- Jalali, A.A. and Nadimi, V. (2006). A survey on robust model predictive control from 1999-2006. In *International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation*. doi:10.1109/CIMCA.2006.29.
- Kögel, M. and Findeisen, R. (2017). Robust output feedback MPC for uncertain linear systems with reduced conservatism. *IFAC-PapersOnLine*. doi:10.1016/j.ifacol.2017.08.2186.
- Kolmanovsky, I. and Gilbert, E.G. (1998). Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. *Mathematical Problems in Engineering*. doi:10.1155/S1024123X98000866.
- Langson, W., Chrysochoos, I., Raković, S.V., and Mayne, D.Q. (2004). Robust model predictive control using tubes. *Automatica*. doi:10.1016/j.automatica.2003.08.009.
- Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., and Camacho, E.F. (2010). Robust tube-based MPC for tracking of constrained linear systems with additive disturbances. *Journal of Process Control*. doi:10.1016/j.jprocont.2009.11.007.
- Maciejowski, J. (2002). *Predictive Control: With Constraints*. Prentice Hall.
- Martins, M.A. and Odloak, D. (2016). A robustly stabilizing model predictive control strategy of stable and unstable processes. *Automatica*. doi:10.1016/j.automatica.2016.01.046.
- Mayne, D.Q., Raković, S.V., Findeisen, R., and Allgöwer, F. (2006). Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems. *Automatica*. doi:10.1016/j.automatica.2006.03.005.
- Mayne, D.Q., Rawlings, J.B., Rao, C.V., and Sokaert, P.O. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*. doi:10.1016/S0005-1098(99)00214-9.
- Mayne, D.Q., Seron, M.M., and Raković, S.V. (2005). Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. *Automatica*. doi:10.1016/j.automatica.2004.08.019.
- Mayne, D.Q., Kerrigan, E.C., and Falugi, P. (2011). Robust model predictive control: Advantages and disadvantages of tube-based methods. In *IFAC Proceedings Volumes*. doi:10.3182/20110828-6-IT-1002.01893.
- Nguyen, H.N., Gutman, P.O., Oлару, S., and Hovd, M. (2011). An interpolation approach for robust constrained output feedback. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. doi:10.1109/CDC.2011.6161136.
- Plucenio, A., Normey-Rico, J., Vettorazzo, C., Campos, M.M., and Lopes De Lima, M. (2017). MPC advanced control of an offshore gas compression system. *OTC Brasil 2017*.
- Qin, S.J. and Badgwell, T.A. (2003). A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*. doi:10.1016/S0967-0661(02)00186-7.
- Rakovic, S.V., Kerrigan, E.C., Kouramas, K.I., and Mayne, D.Q. (2005). Invariant approximations of robustly positively invariant sets for constrained linear discrete-time systems subject to bounded disturbances. *Cued/F-Infeng/Tr.473*.
- Rawlings, J. and Mayne, D. (2009). *Model Predictive Control: Theory and Design*. Nob Hill Pub.
- Taylor, C.J., Chotai, A., and Young, P.C. (2000). State space control system design based on non-minimal state-variable feedback: Further generalization and unification results. *International Journal of Control*. doi:10.1080/002071700421727.
- Tenny, M.J., Rawlings, J.B., and Wright, S.J. (2004). Closed-loop behavior of nonlinear model predictive control. *AIChE Journal*. doi:10.1002/aic.10177.
- Wang, L. and Young, P.C. (2006). An improved structure for model predictive control using non-minimal state space realisation. *Journal of Process Control*. doi:10.1016/j.jprocont.2005.06.016.
- Yang, B.B.P., Mendes, P., Normey-Rico, J., Branco, A.F., and Vettorazzo, C. (2018). Controle regulatório pi+feedforward antisturjo aplicado a compressores para plataformas de produção de petróleo e gás. *XXII Congresso Brasileiro de Automática*. doi:10.20906/CPS/CBA2018-0636.