

Investigação de métodos numéricos com ordens de convergência elevadas aplicados ao Problema de Despacho Econômico de Redes Elétricas com Múltiplas Barras

Lara Raquel de Jesus Rodrigues Silva *
Francisco Damasceno Freitas **

* *Departamento de Engenharia Elétrica - Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília - Campus Darcy Ribeiro, DF (e-mail: lararaquel.eng@gmail.com).*

** *Departamento de Engenharia Elétrica - Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília - Campus Darcy Ribeiro, DF (e-mail: ffreitas@ene.unb.br).*

Abstract: This paper presents results of numerical method investigations applied to the classical Economic Dispatch Problem (EDP) solution in power systems, extended to multibus networks and considering transmission losses. The EDP is conceived in its traditional form which is based on an optimization problem formulation taking into account equality and inequality constraints. The resulting nonlinear problem solution is determined using the traditional Newton-Raphson (NR) method and other techniques derived from this method, but with higher convergence order. To demonstrate the effectiveness of the high order convergence methods, experiments performed on 14-, 118- and 300-bus test systems are presented. The results show that some of the evaluated techniques, in addition to being highly accurate, also allow calculations to be performed with less computational cost than the NR method.

Resumo: Este artigo apresenta resultados da investigação de métodos numéricos para a solução do clássico Problema de Despacho Econômico (PDE) em sistemas de potência, estendido para redes com múltiplas barras e considerando as perdas de transmissão. O PDE é concebido na sua forma tradicional, com formulação baseada em um problema de otimização com restrições de igualdade e desigualdades. A solução do problema não-linear resultante é determinada por meio do tradicional método de Newton-Raphson (NR) e de outras técnicas derivadas desse método, porém com ordens de convergência superiores. Para demonstrar a eficácia dos métodos, são apresentadas simulações realizadas em três sistemas testes com 14, 118 e 300 barras. Os resultados evidenciam que algumas das técnicas avaliadas além de apresentarem elevada precisão com menor número de iterações que o método de NR, também permitem realizar os cálculos com menor esforço computacional.

Keywords: Economic dispatch problem; nonlinear system; high order convergence; optimization; Newton-Raphson method.

Palavras-chaves: Problema de despacho econômico; sistema não-linear; elevada ordem de convergência; otimização; método de Newton-Raphson.

1. INTRODUÇÃO

O clássico Problema de Despacho Econômico (PDE) em sistemas de potência consiste na alocação de geradores para suprir um determinado quantitativo de carga no sistema elétrico. Na sua versão mais restrita, apenas unidades térmicas são consideradas. Também, na sua abordagem mais simples, uma usina com várias unidades geradoras supre uma carga concentrada na própria barra, como apresentado em Wood and Woolenberg (1996). Na situação em que a carga é atendida remotamente, é preciso incluir o efeito das perdas ativas de transmissão. Uma forma aproximada de se investigar o efeito das perdas consiste em representá-las como uma função, usualmente quadrática,

das potências geradas. Em Wood and Woolenberg (1996), as perdas de transmissão podem ser expressas como uma função das potências geradas, como uma Fórmula Geral das Perdas (FGP). Esta abordagem ainda é estudada, podendo ter uma modificação para incorporar a presença de fontes renováveis de energia em Agrawal et al. (2010). Em Chun et al. (2017), alguns métodos que incluem soluções mais eficientes, especialmente para o Problema de Despacho Econômico Dinâmico (PDED).

Foram propostos diversos métodos para solucionar o PDE, como o Método dos Pontos Interiores em Momoh et al. (1992), o Sub-gradiente Primal-duplo em Chun et al. (2017); os métodos Heurísticos, como o de Otimização com base em Enxame de Partículas apresentados em Saber

(2012), dos Algoritmos Genéticos como em Tippyachai et al. (2002) e os Híbridos, como proposto em Yalcinoz and Atun (2001) para resolver o PDE e o PDED. No entanto, cada técnica e formulação tem seus prós e contras.

Um aspecto em comum ao se tratar do PDE com perdas é a necessidade de se resolver sistemas não-lineares. Com o objetivo de se determinar a solução do problema, o método de Newton-Raphson (NR) consiste na técnica preferida.

A solução de equações não-lineares é um assunto ainda amplamente investigado em matemática. À luz desse fato, foram desenvolvidos diversos métodos iterativos para solução de equações não-lineares escalares (como discutido em Cordero et al. (2010), Sharma (2014), Vy (1987) e Hu and Fang (2010)) e alguns deles estendidos para o similar multidimensional (ver Lotfi et al. (2015) e Cordero et al. (2012)). Há poucos métodos iterativos práticos neste caso, por exemplo, com aplicação a problemas típicos de sistemas elétricos de potência. Isto se justifica pela considerável aceitação ao clássico método de NR. Além disso, embora algumas das iterações do tipo escalar possam ser estendidas para o caso multidimensional, no entanto, devido ao aumento da complexidade computacional, os procedimentos resultantes acabam sendo de pouco interesse prático.

Neste trabalho, o objetivo é investigar processos iterativos avaliados como de altas ordem de convergência pelos matemáticos e aplicá-los à solução do PDE. Extensões de técnicas iterativas escalares para a forma multivariável também são investigadas. Inicialmente, formula-se o PDE considerando-se uma rede elétrica com múltiplas barras, geradores e cargas. Em seguida, procede-se à resolução do problema de despacho econômico dos geradores para atender às cargas de forma otimizada e levando em conta as perdas no sistema de transmissão de energia elétrica. Os resultados obtidos a partir dessas técnicas iterativas investigadas são então comparados com aqueles obtidos por meio da técnica tradicional de NR. Em Cordero et al. (2012), consta-se que o método NR apresenta convergência quadrática. As abordagens estudadas neste trabalho têm ordem de convergência até oito. Porém, tendo em vista o interesse prático à aplicação em sistemas elétricos de potência de grande porte, o seu uso é drasticamente deteriorado em sistemas multivariáveis devido ao requisito de várias inversões de matrizes e elevados requisitos de produtos matriciais. Estes são aspectos chaves para definição da técnica mais adequada no estudo. Por isso, o foco da investigação limitou-se a métodos de até oitava ordem de convergência. A eficácia das técnicas iterativas estudadas e aplicadas ao PDE são avaliadas em três sistemas testes.

O artigo está estruturado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta a formulação do PDE e a caracterização do problema de otimização aplicado ao problema. A Seção 3 descreve os métodos numéricos não-lineares em sua forma geral. Na Seção 4, são descritos testes de simulações e resultados obtidos a partir dos métodos numéricos investigados. A Seção 5 destaca as principais conclusões do trabalho.

2. O PROBLEMA DE DESPACHO ECÔNOMICO EM REDE COM MÚLTIPLAS BARRAS

O principal objetivo de um PDE clássico é determinar as potências de unidades geradoras para atender as cargas

do sistema elétrico, considerando um índice de otimização e restrições operacionais. O despacho deve levar em consideração os custos do combustível usado por cada unidade geradora, bem como suas características de operação. Assume-se que as unidades geradoras são todas inseridas em um sistema elétrico, constituindo um arranjo complexo que deve atender ao mesmo tempo as leis de Kirchhoff, as equações relacionando custo e potência gerada e outras restrições operacionais dos geradores. Neste trabalho, somente unidades térmicas são consideradas. Por simplificação, assume-se que em cada barramento somente uma unidade geradora esteja ligada. Também, somente uma carga esteja agregada a cada barra. Pode haver barramento que tenha somente carga.

2.1 Formulação do Problema de Otimização

Assume-se que o sistema seja composto de N_b barras, das quais há N_g de geração, sendo $N_g \leq N_b$. Define-se a potência de saída da unidade i no barramento i como P_i . A cada unidade térmica na barra i , está associada uma curva de calor de forma quadrática, H_i , dada em função de três parâmetros, ou seja, $H_i = H_{1i}P_i^2 + H_{2i}P_i + H_{3i}$, em MBtu/h. Cada unidade i usa um tipo de combustível, cujo preço unitário é c_i , dado em \$/MBtu. A função custo para gerar a potência P_i é calculada como $\mathcal{F}_i = c_i H_i$, em \$/h. O interesse principal no problema de despacho econômico é minimizar os custos para geração de potência total fornecida pelas unidades térmicas (Wood and Woolenber (1996)). O custo total é computado como

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^{N_g} \mathcal{F}_i \quad (1)$$

em que \mathcal{F} é a função objetivo do PDE.

A rede elétrica que interliga cargas e gerações é formada por linhas de transmissão que são aqui representadas por apenas sua impedância série. A rigor, essas interconexões poderiam ser limitadas a permitir o fluxo de até um limite máximo de potência. Entretanto, para fins de simplificação da metodologia proposta neste trabalho, essa limitação é aqui relaxada. Por outro lado, restrições operacionais como a limitação da potência de saída dos geradores são consideradas.

A carga é representada apenas por potência ativa; a magnitude das tensões nas barras é assumida igual a 1,0 pu, ou seja, admite-se haver suporte local de potência reativa para essa finalidade; as perdas de transmissão são modeladas por funções quadráticas da diferença angular entre as fases das tensões nodais, como apresentado em da Silva Junior (2008).

As perdas ativas de transmissão em uma interligação CA $i - m$, P_{loss}^{im} , podem ser calculadas como $\Phi_{im} + \Phi_{mi}$, em que Φ_{im} é o fluxo de potência ativa da barra i para m e Φ_{mi} , da barra m para i . Em da Silva Junior (2008), o fluxo de potência ativa da barra i para m pode ser aproximado por:

$$\Phi_{im} = -b_{im}\theta_{im} + \frac{g_{im}\theta_{im}^2}{2}, \quad i = 1, \dots, N_b, m \neq i \quad (2)$$

no qual $\theta_{im} = \theta_i - \theta_m$, sendo θ_i a fase da tensão na barra i e $y_{im} = g_{im} + jb_{im}$ a admitância longitudinal (série) da interconexão $i - m$.

Logo, de (2), as perdas da interconexão $i - m$ são $P_{loss}^{im} = g_{im}\theta_{im}^2$.

Uma restrição surge da equação do balanço de potência em cada barramento i do sistema, independentemente de ser caracterizada por geração, carga ou ambos. A potência total injetada no barramento i alimenta a carga local L_i e atende aos fluxos Φ_{im} nas interligações $i - m$.

O balanço é expresso por:

$$P_i = \left[\sum_{m \in \Omega_i} \Phi_{im} \right] + L_i \quad (3)$$

sendo L_i a carga concentrada na barra i e Ω_i representa o conjunto de todas as barras adjacentes que têm conexões à barra i . Caso não exista geração na barra, $P_i = 0$.

A outra restrição tem origem nos limites operacionais superior e inferior das máquinas térmicas. A potência de saída de cada unidade, P_i , deve ser no máximo igual ao limite superior da unidade (\bar{P}_i) ou no mínimo igual ao limite inferior (\underline{P}_i).

$$\underline{P}_i \leq P_i \leq \bar{P}_i \quad (4)$$

ou de modo correspondente como duas desigualdades com uma restrição

$$\underline{P}_i - P_i \leq 0 \quad \text{ou} \quad P_i - \bar{P}_i \leq 0 \quad (5)$$

2.2 O Problema de Otimização e sua Função Lagrangeana

O PDE consiste na minimização dos custos de combustível, definidos a partir de uma função objetivo formada pelos custos em (1), sujeita a restrições de igualdade (3) e de desigualdade (5). Este problema é modificado de modo a se definir sua formulação a partir de uma função Lagrangiana \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_g} \mathcal{F}_i - \sum_{k=1}^{N_b} \lambda_k \left\{ P_k - L_k - \sum_{m \in \Omega_k} \Phi_{km} + [\bar{\pi}_k(P_k - \bar{P}_k) + \underline{\pi}_k(P_k - \underline{P}_k)] \right\} \quad (6)$$

onde $\bar{\pi}_k$ e $\underline{\pi}_k$ são as variáveis de folga associadas aos limites superior e inferior, respectivamente, das desigualdades na equação (6).

A solução do problema de otimização é obtida aplicando-se as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), conforme apontado em Wood and Woolenberg (1996), obtendo-se as variáveis de interesse: P_i , $i = 1, \dots, N_g$; λ_k , $k = 1, \dots, N_b$; θ_m , $m = 2, \dots, N_b$; $\bar{\pi}_i$, $\underline{\pi}_i$, $i = 1, \dots, N_g$. Assume-se que a barra 1 seja a barra de referência angular, de modo que é razoável estabelecer $\theta_1 = 0$.

A solução com base nas condições de KKT resulta em um sistema não-linear composto por quatro conjuntos principais de equações, além das condições de atendimento dos limites operacionais das potências geradas, assim como de positividade para as variáveis de folga. O primeiro conjunto de equações diz respeito às derivadas parciais em relação à P_i , resultando na equação (7), no caso em que não ocorre violação de limites; ou em (8), no caso em que se detecta que o limite foi violado. O segundo grupo de equações é originado da derivada parcial em relação a λ_k , levando a (9). O terceiro conjunto é aquele que se originou da derivada parcial em relação a θ_m , gerando

(10). Finalmente, o último conjunto é o que se originou da derivada parcial em relação a $\bar{\pi}_k$ e $\underline{\pi}_k$ (ver (11)). Cabe observar que as igualdades em (11) ocorrem somente na situação de limite violado, sendo uma excludente da outra. Portanto, não se aplicando quando as potências de saída encontram-se dentro dos limites operacionais.

$$2c_i H_{1i} P_i + c_i H_{2i} - \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, N_g \quad (7)$$

$$2c_i H_{1i} P_i + c_i H_{2i} - \lambda_i + \bar{\pi}_i - \underline{\pi}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N_g \quad (8)$$

$$P_k - \sum_{m \in \Omega_k} (-b_{km} \theta_{km} + \frac{g_{km} \theta_{km}^2}{2}) - L_k = 0, \quad k = 1, \dots, N_b \quad (9)$$

$$\lambda_k \sum_{m \in \Omega_k} (-b_{km} + g_{km} \theta_{km}) + \sum_{k \in \Omega_m} \lambda_m (b_{mk} - g_{mk} \theta_{mk}) = 0; \quad k = 2, \dots, N_b \quad (10)$$

$$\underline{P}_i - P_i = 0 \quad \text{ou} \quad P_i - \bar{P}_i = 0, \quad i \in \Omega_v \quad (11)$$

em que Ω_v é um conjunto de limites violados.

O conjunto de equações (7)-(11) constitui o sistema não-linear básico que caracteriza a solução do PDE, incluindo as perdas de transmissão. O PDE sem perdas é estabelecido a partir das mesmas expressões (7)-(11), porém atribuindo-se $g_{km} = 0$. Neste caso, apenas um sistema linear é resolvido, sendo, porém, necessário verificar se as condições de KKT são atendidas a cada vez que esse sistema linear for resolvido. A ênfase é para solução do problema não-linear.

3. MÉTODOS NUMÉRICOS DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR

Nesta seção, são apresentadas técnicas iterativas para a solução numérica do problema não-linear em (7)-(11). Além do tradicional método de NR, são avaliados outros esquemas iterativos com ordens de convergência superior ao quadrático. Um dos principais custos computacionais ao se resolver sistemas não-lineares de grande porte, diz respeito à fatorações LU de matrizes. O principal foco é ilustrar como esses métodos, mesmo com ordem de convergência elevadas, preservam a esparsidade dos sistemas e requerem no máximo três fatorações LU por iteração.

3.1 Processos Iterativos

Considere um sistema de equações não-lineares do tipo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sendo \mathbb{D} uma região convexa aberta na vizinhança de uma raiz \mathbf{x}^* de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Nestas condições, dada uma estimativa inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, o método NR tem o seguinte esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (12)$$

em que $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ é a matriz jacobiana calculada em $\mathbf{x}^{(k)}$.

Assumindo que $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ seja contínua e não singular, a sequência formada pelos resultados das iterações $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geq 0}$ converge com taxa de convergência dois, conforme Lotfi et al. (2015).

Outros esquemas iterativos baseados no método de NR foram propostos com a finalidade de elevar a taxa de convergência quadrática característica do método. Em Lotfi

et al. (2015) foi apresentado um esquema iterativo estendido para o caso multidimensional baseado no método de Jarrat escalar (ver Cordero et al. (2010) para mais detalhes). O processo iterativo consta dos seguintes cálculos na iteração k :

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \frac{2}{3}[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (13)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \frac{1}{2}[(3\mathbf{J}(\mathbf{y}^{(k)}) - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1} \times (3\mathbf{J}(\mathbf{y}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}))] \times \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (14)$$

O esquema formado pelas equações (13)-(14) será denominado aqui simplesmente como *Jarrat*. A versão escalar do método tem ordem de convergência quatro. A cada iteração, são requeridas duas avaliações da matriz jacobiana e um cálculo da função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. São necessárias duas fatorações LU para lidar com as matrizes inversas no processo de resolução do problema.

Dois esquemas de convergência de ordem cinco foram apresentados em Vy (1987) e em Grau-Sánchez (2007). O esquema escalar proposto em Vy (1987) (esquema *Vy*) e, estendido aqui para o caso multidimensional, apresenta os seguintes passos na iteração k :

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (15)$$

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)} - \frac{1}{2}[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}) \quad (16)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} - [\mathbf{J}(\mathbf{z}^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}) \quad (17)$$

No esquema iterativo (15)-(17), a função e o jacobiano são calculados duas vezes por iteração, sendo requeridas também duas fatoração LU. Por sua vez, o esquema escalar proposto em Grau-Sánchez (2007) (denominado aqui por *Grau*), foi estendido para o caso multidimensional neste artigo, tendo os seguintes passos:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (18)$$

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - 2[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{y}^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (19)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - [\mathbf{J}(\mathbf{y}^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{z}^{(k)}) \quad (20)$$

Como no esquema *Vy*, o esquema *Grau* requer duas avaliações da função e do jacobiano. No entanto, precisa de uma fatoração LU a mais.

Esquemas com convergência de sexta ordem foram propostos em Sharma (2014) e Cordero et al. (2010). O esquema escalar proposto em Sharma (2014) e, estendido para o caso multidimensional neste artigo, tem um parâmetro que deve ser fixado em valor diferente de -1 a fim de manter a característica de convergência de sexta ordem. Quando fixado em zero, o processo precisa de duas fatorações LU por iteração. Também, são necessárias por iteração apenas duas avaliações da matriz jacobiana e da função. Por isso, o valor zero foi o valor atribuído ao parâmetro. Os passos na iteração k para o esquema *Sharma* são:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \frac{2}{3}\mathbf{t}_k \quad (21)$$

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \frac{1}{2}\mathbf{t}_k - \mathbf{M}_k^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (22)$$

em que $\mathbf{M}_k = [3\mathbf{J}(\mathbf{y}^{(k)}) - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]$ e $\mathbf{t}_k = [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - 2\mathbf{M}_k^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{z}^{(k)}) \quad (23)$$

O esquema de sexta ordem proposto em Cordero et al. (2010) (esquema *Cordero6*) é similar ao apresentado em

Sharma (2014), com relação às avaliações da função, matriz jacobiana e fatoração LU. Os passos do processo iterativo são os seguintes:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \frac{2}{3}\mathbf{t}_k \quad (24)$$

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \frac{1}{2}\mathbf{M}_k^{-1}[3\mathbf{J}(\mathbf{y}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]\mathbf{t}_k \quad (25)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - 2\mathbf{M}_k^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{z}^{(k)}) \quad (26)$$

Um esquema escalar com ordem de convergência sete foi proposto em Hu and Fang (2010) e estendido neste artigo para o caso multidimensional. Os passos deste processo (esquema *Hu*) são:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (27)$$

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)} - [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}[2\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{J}(\mathbf{y}^{(k)})] \times [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}) \quad (28)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{M}_k^{-1}[\mathbf{J}(\mathbf{y}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})] \times [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{z}^{(k)}) \quad (29)$$

O esquema iterativo representado por (27)-(29) requer três avaliações da função e duas da matriz jacobiana por iteração. Entretanto, usa apenas duas fatorações LU na iteração.

Um esquema iterativo com ordem de convergência oito foi apresentado em Cordero et al. (2012). Os passos do processo na iteração k (esquema *Cordero8*) são os seguintes:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \frac{2}{3}\mathbf{t}_k \quad (30)$$

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)} + \frac{1}{6}\mathbf{t}_k \quad (31)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{M}_k^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (32)$$

$$\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{M}_k^{-1}[\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) + 2\mathbf{f}(\mathbf{u}^{(k)})] \quad (33)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)} - \frac{1}{2}[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}[5\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) - 3\mathbf{J}(\mathbf{y}^{(k)})] \times [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{v}^{(k)}) \quad (34)$$

O processo iterativo representado por (30)-(34) precisa de três avaliações da função e apenas dois cálculos da matriz jacobiana, bem como duas fatorações LU.

Deve ser enfatizado que em todos os esquemas iterativos apresentados neste trabalho, a esparsidade das matrizes que passam por fatoração LU é preservada. Também, um dos aspectos que procurou-se priorizar foi investigar métodos que requeressem o menor número de fatorações LU possível. Estes são aspectos importantes para aplicações que requeiram resolução de sistemas não-lineares de grandes dimensões, em função do maior custo computacional dispendido justamente nas decomposições LU.

Tendo como alvo os sistemas não-lineares de grande porte, uma dificuldade dos métodos multidimensionais é preservar a ordem de convergência numérica dos métodos escalares para uma precisão *default*. Por exemplo, como a adotada em aplicativos como o Matlab. Em vários dos exemplos escalares estudados em outros trabalhos (ou mesmo de porte muito reduzido), são tratados cálculos que envolvem precisão da ordem de 200 dígitos (ver por exemplo Cordero et al. (2010)). Do ponto de vista prático, fica inviável se operar com 200 dígitos de precisão. Por isso,

no presente trabalho, lida-se com precisão *default* de 64 bits que é utilizada no aplicativo Matlab, o que representa da ordem de 15 dígitos de precisão.

Na sequência, os processos iterativos apresentados nesta subseção são utilizados para resolver o problema não-linear associado ao PDE.

3.2 Solução do Problema de Otimização

A resolução do problema de otimização com restrições proposta neste trabalho é fundamentado em método iterativo clássico tendo como base a formulação apresentada em Wood and Woolenber (1996). Este procedimento iterativo (*loop* externo) requer a utilização de outro processo iterativo secundário (*loop* interno), que se refere à obtenção da solução do sistema de equações não-lineares (7)-(11). Portanto, a resolução do PDE baseia-se em iterações desses dois loops. A contribuição principal deste trabalho está na avaliação dos métodos iterativos que constituem o núcleo do *loop* interno.

Com relação ao *loop* externo, na iteração inicial, resolve-se o problema sem restrições de desigualdade. Usa-se o resultado do caso sem perdas como estimativa inicial para execução dos processos iterativos não-lineares. Ao final dessa etapa, avaliam-se as violações de limites. Nas etapas seguintes, selecionam-se as variáveis que tiveram seus limites violados. Fixa-se o valor de cada variável no limite violado, enquanto as demais devem ser calculadas. Ao final dessa etapa, são determinadas as variáveis de folga relativas às potências de saída que tiveram seus valores fixados. Além disso, é verificado se novas variáveis tiveram seus limites violados e se as variáveis de folga são positivas. Em função disso, deve ser verificado se uma nova etapa de cálculos precisa ser reinicializada ou se o processo convergiu para a solução do PDE. Porém, detectando-se variável de folga com valor negativo, significa que a restrição considerada no início da etapa corrente deve ser liberada para a etapa seguinte. Este processo deve continuar até que todas as variáveis de folga fiquem positivas e não ocorra violação de variável.

O processo de resolução do PDE baseada em um dos processos iterativos apresentados na subseção é iniciado considerando os dados da rede de transmissão, cargas e geradores. Primeiramente calcula a solução do PDE sem perdas, considerando todos os limites livres, por fim o resultado é adotado como estimativa inicial $P_i^{(0)}$, as variáveis de folga $\underline{\pi}_i$ e $\bar{\pi}_i$ são nulas nessa etapa. A solução do problema não-linear é determinada utilizando uma das técnicas iterativas apresentadas na Subseção 3.1, após esse processo é necessário avaliar as restrições de desigualdades e fixar valores das variáveis P_i , caso estas tenham seus limites violados.

O Alg. 1 apresenta as principais etapas para se obter a solução do PDE baseada em um dos processos iterativos apresentados na subseção anterior.

● ALGORITMO 1: Solução do PDE

ENTRADA: dados da rede de transmissão, cargas e geradores ($\bar{P}_i, \underline{P}_i$, custos de combustível e curva de calor de cada unidade de geração), $\epsilon = 10^{-6}$, $\theta_1 = 0$.

SAÍDA: Valor convergente para $P_i, \lambda_k, \theta_m, \bar{\pi}_i, \underline{\pi}_i$ e custos.

- (1) Calcular a solução do PDE sem perdas, com todos os limites livres, e adotar esse resultado como estimativa inicial $P_i^{(0)}, \bar{\pi}_i = 0, \underline{\pi}_i = 0, i = 1, \dots, N_g, \lambda_k^{(0)}, k = 1, \dots, N_b, \theta_m^{(0)}, m = 2, \dots, N_b; k_\mu = 0$;
- (2) Determinar a solução do problema não-linear utilizando uma das técnicas iterativas apresentadas na Subseção 3.1, avaliar as restrições de desigualdades, fixar valores das variáveis P_i , caso estas tenham seus limites violados;
- (3) Fazer $k_\mu = 1$;
- (4) Recalcular P_i, λ_k, θ_k , considerando as restrições das variáveis violadas e utilizando uma técnica iterativa apresentada na Subseção 3.1;
- (5) Calcular $\bar{\pi}_i, \underline{\pi}_i$ associados às violações verificadas na iteração $k_\mu - 1$ e determinar possíveis novas violações de variáveis P_i da iteração corrente k_μ ;
- (6) Checar se há novas violações de variáveis P_i ou variável de folga com valor negativo: em caso verdadeiro, prosseguir para o próximo passo; senão, ir para o passo 11;
- (7) Caso haja variável de folga com valor negativo, liberar os limites das variáveis P_i associadas; senão, prosseguir para o próximo passo;
- (8) Caso novas violações de limite de variável sejam detectadas, fixar o valor da variável no valor do limite violado; senão, continuar no próximo passo;
- (9) Estabelecer nova estimativa inicial para o problema definido por (7)-(11), com base na solução obtida na corrente iteração e com as possíveis novas limitações de variáveis;
- (10) Fazer $k_\mu = k_\mu + 1$ e voltar para o passo 4, enquanto não convergir;
- (11) Fim, tendo variáveis de saída: $P_i, \lambda_k, \theta_k, \bar{\pi}_i, \underline{\pi}_i$ e custos;

O Alg. 1 permite o cálculo das variáveis P_i, λ_k, θ_m , assim como das variáveis de folga $\underline{\pi}_i$ e $\bar{\pi}_i$.

A partir destas informações é possível calcular os custos. Os cálculos levam em conta as condições de KKT, já que além da solução das equações não-lineares, os limites das potências de saída das unidades (desigualdades) são avaliados e verificadas se as variáveis de folga são positivas. Note-se que o processo de otimização (*loop* externo) é baseado na busca por uma solução iterativa até que todos os limites sejam atendidos e as variáveis de folga fiquem positivas. Neste procedimento, quando ocorre violação de limite, a variável assume um valor conhecido, que é igual ao valor do limite violado. Por sua vez, as variáveis P_i, λ_k, θ_m que não sofrem violações são computadas através de um dos processos iterativos apresentados no parágrafo acima.

Na seção que se segue, são apresentados testes com o objetivo de demonstrar a eficácia da técnica de otimização empregada, bem como o desempenho das técnicas iterativas (*loop* interno) para solução do problema não-linear principal.

4. TESTES E RESULTADOS

Esta seção apresenta resultados de testes realizados para demonstrar a eficácia das técnicas iterativas investigadas e aplicadas à solução do PDE. Utilizam-se três sistemas testes, tendo cada um 14, 118 e 300 barras. São modelos de redes elétricas usualmente encontradas para estudos de fluxo de carga. Os dados básicos de redes foram retirados de Zimmerman et al. (2011). Por isso, maiores detalhes sobre os dados de rede desses modelos (impedâncias de interconexão e cargas) são reportados a essa referência. Os demais dados referentes a custo de combustível das unidades geradoras, suas curvas de calor e valores de potência máxima e mínima foram atribuídos empiricamente neste trabalho.

As simulações foram executadas em um notebook Intel Core(TM) i7 CPU de 2.5 GHz com 16.00 GB de RAM. Foi fixada a tolerância de 10^{-6} para o *mismatch* das equações não-lineares. Os processos iterativos *NR*, *Hu*, *Sharma*, *Jarrat*, *Vy*, *Grau*, *Cordero6* e *Cordero8* foram utilizados na resolução dos sistemas não-lineares e acompanhada a convergência até que o *mismatch* tenha sido alcançado.

4.1 Sistema de 14 barras

As simulações no sistema teste de 14 barras baseiam-se nos dados do aplicativo Matpower, englobados em Zimmerman et al. (2011). O sistema teste possui geração nas barras 1, 2, 3, 6 e 8. Os dados de geradores foram atribuídos empiricamente.

A Tab. 1 ilustra os dados característicos. As constantes das curvas de calor na tabela são em unidades apropriadas, resultando na unidade de calor, Btu/h, quando a potência é dada em pu.

Tabela 1. Dados típicos dos geradores do sistema de 14 barras, com custo unitário em \$/MBtu

Par.	Barra 1	Barra 2	Barra 3	Barra 6	Barra 8
P_i (pu)	2,40	0,75	0,44	0,20	0,15
\underline{P}_i (pu)	0,32	0,15	0,10	0,06	0,03
$custo_i$	0,96	1,06	1,03	0,97	1,04
H_{3i}	0,12	0,13	0,12	0,13	0,11
H_{2i}	0,014	0,015	0,014	0,015	0,012
H_{1i}	0,0014	0,0012	0,0014	0,0012	0,0015

Foram realizadas simulações conforme o Alg. 1, até que o despacho de geração fosse atendido, isto é, todas as unidades operando dentro de seus limites e todas as variáveis de folga positivas. Inicialmente, foi efetuado o cálculo do despacho considerando a rede sem perdas e com os limites das unidades livres. Este resultado foi usado para inicializar o cálculo da solução das equações não-lineares visando se determinar as potências de saída dos geradores, os custos incrementais e os ângulos das tensões. Ao final deste processo, em $k_\mu = 0$, verificou-se que as unidades nas barras 3, 6 e 8 tiveram seus limites superiores violados. Neste mesma iteração, a unidade na barra 2 teve o limite inferior superado. Na iteração seguinte, $k_\mu = 1$, o sistema de equações não-lineares relativo ao PDE foi reformulado, levando agora em conta os valores das variáveis violadas. Ao final dessa iteração, os resultados evidenciaram que a

variável de folga associada à potência violada na barra 2, \underline{x}_2 , ficou negativa. Não foram detectadas novas violações de limite de variável. Portanto, realizou-se uma nova iteração, $k_\mu = 2$, excluindo-se a limitação da potência da unidade geradora na barra 2. Ao final desta iteração, constatou-se que, além de não haver novas violações de limite, todas as variáveis de folga ficaram positivas. Portanto, a convergência foi atingida. com $k_\mu = 2$.

As potências resultantes foram $P_1 = 1,27$ pu, $P_2 = 0,59$ pu, $P_3 = 0,44$ pu, $P_6 = 0,20$ pu, $P_8 = 0,15$ pu. Os três últimos valores correspondem a limites máximos. A geração total do sistema foi de 2,65 pu com carga de 2,59 pu. O custo ótimo de geração foi de 0,6577 \$/h. Caso o despacho da situação sem perdas e sem limites fosse considerado, o custo ficaria reduzido para 0,6546 \$/h.

4.2 Sistema de 118 barras

As simulações neste sistema teste foram baseadas na rede elétrica básica definida no `case118.m` integrante dos dados do aplicativo Matpower, conforme Zimmerman et al. (2011). Porém, com relação às unidades geradoras, considerou-se somente aquelas presentes em barras de geração que apresentam potência ativa diferente de zero. Porque o modelo original tem várias barras para controle de potência reativa, ou seja, com potência ativa nula. Em vista disto, as barras com esse perfil foram convertidas para a modalidade de carga. Assim, o sistema resultante foi considerado com 19 unidades geradoras, sendo uma por barra.

Como não se dispõe dos dados característicos das unidades geradoras térmicas, os mesmos foram atribuídos de forma empírica e considerando informação semelhante para todas as unidades. Evidentemente, nos casos práticos, estes dados podem ser inseridos com os dados reais do gerador e gerar um modelo mais fiel que o adotado neste trabalho. Portanto, assumindo dados iguais para as unidades, o custo unitário de cada uma foi fixado em 1,0 \$/puMW; a curva de calor foi caracterizada pelos parâmetros $H_{3i} = 0,0511$, $H_{2i} = 0,0015$ e $H_{1i} = 0,001$. Os limites operacionais das unidades foram definidos da seguinte forma: a potência despachada no caso base original do Matpower foi usada como referência. Desta forma, o valor da potência máxima da unidade geradora foi considerado como 115% dessa potência do caso base, enquanto a potência mínima foi fixada em 20%.

Seguindo a metodologia de solução do Alg. 1, foram necessárias duas iterações no loop externo para se ter convergência à solução, como explicado na sequência. Na iteração inicial, $k_\mu = 0$, 10 unidades geradoras tiveram limites superiores violados e 1, limite inferior. Na iteração seguinte, $k_\mu = 1$, verificou-se que o limite inferior violado pode ser liberado, pois a variável de folga associada ao limite resultou negativa. Porém, ainda nesta iteração, mais 3 novos limites superiores foram violados. Por fim, na próxima iteração, $k_\mu = 2$, nenhuma nova violação de limite foi observada e todas as variáveis de folga ficaram positivas. Ao final, portanto, 13 das unidades geradoras precisaram ser despachadas em seus limites máximos, enquanto 6 ficaram dentro dos limites.

A carga atendida no sistema de 118 barras foi de 42,42 pu, requerendo geração de 43,78 pu. O custo para essa geração foi de 1,19 \$/h. Caso as perdas não fossem consideradas e não houvesse as limitações operacionais das unidades geradoras, o preço cairia para 1,08 \$/h.

4.3 Sistema de 300 barras

As simulações neste sistema teste também foram baseadas nos dados disponibilizados em Zimmerman et al. (2011), a partir do aplicativo Matpower. Os dados correspondem às informações da rede elétrica básica definida em `case300.m` do aplicativo. Como no caso do sistema de 118 barras, considerou-se somente as unidades em barras de geração que apresentam potência ativa diferente de zero. Com base nesta informação, trabalhou-se com o despacho de 57 unidades geradoras, sendo uma por barra. Também, em função de não se dispor de dados característicos das unidades geradoras térmicas, utilizou-se o mesmo procedimento adotado para as unidades do sistema de 118 barras. Inclusive, sem perda de generalidade, os mesmos valores de parâmetros foram adotados.

As simulações para determinação do despacho econômico seguiram o processo detalhado no Alg. 1. Estas requereram três iterações no loop externo, conforme descrição a seguir. variável k_μ . Na iteração inicial, $k_\mu = 0$, as variáveis foram calculadas, constatando-se que 35 limites superiores foram violados. Na iteração seguinte, $k_\mu = 1$, 14 novos limites superiores foram violados. Prosseguindo na próxima iteração, em $k_\mu = 2$, mais 2 limites superiores foram superados. Finalmente, na última iteração, $k_\mu = 3$, não foram verificadas outras violações e todas as variáveis de folga resultaram positivas. Portanto, no total, 51 unidades geradoras foram despachadas em seus limites máximos.

Tanto no sistema de 300 barras quanto no de 118, observa-se uma elevada quantidade de unidades geradoras despachadas em seus valores máximos. Este aspecto pode ser atribuído ao fato de se ter adotado dados empíricos e similares para todas as unidades geradoras. Também, devido ao fato que o limite operacional de cada unidade foi fixado em um valor de 115% da potência originalmente despachada no Matpower. Apesar dessa rigidez na formulação do problema não-linear, em todas as situações simuladas, todos os métodos iterativos convergiram para as soluções com a precisão numérica estabelecida para os *mismatches*.

Na próxima subseção, avalia-se o desempenho dos métodos numéricos iterativos utilizados na resolução de cada loop externo do PDE descrito na Subseção 3.1.

4.4 Desempenho dos Processos Iterativos

Nesta subseção, apresentam-se os resultados de avaliação de desempenho numérico dos processos iterativos para solução de equações não-lineares associados ao PDE. Foram computados os erros determinados por cada método em função do número de iterações. Foi aferido também o tempo de CPU médio para cada solução do PDE, considerando-se uma determinada abordagem.

A Fig. 1 ilustra o resultado das curvas de erro (*mismatches*), para cada método, das equações não-lineares definidas por (7) - (11), relativas ao sistema de 118 barras.

Os resultados são referentes apenas aos cálculos do loop externo inicial, por ser o que demanda mais iterações. quando $k_\mu = 0$.

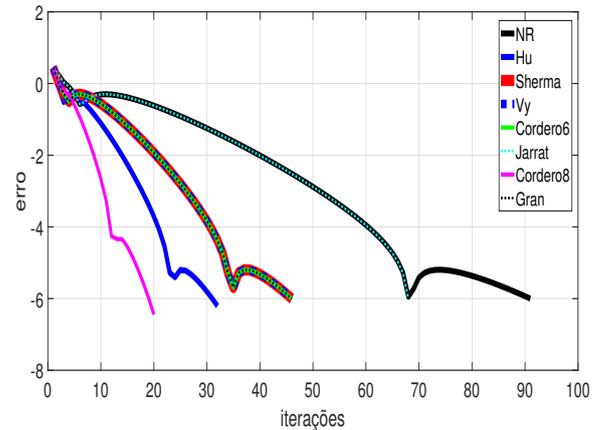


Figura 1. Curvas de erro dos métodos em função das iterações.

A Fig. 2 é do mesmo tipo, porém obtida para o sistema de 300 barras. Em ambas as figuras, a escala vertical está em escala logarítmica de base 10.

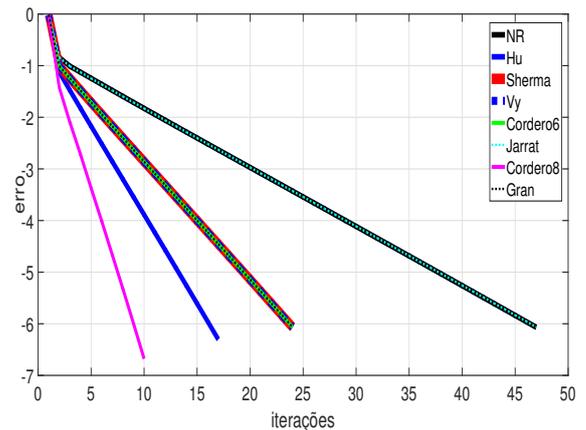


Figura 2. Curvas de erro dos métodos em função das iterações para o sistema de 300 barras.

A Tab. 2 ilustra o tempo médio de CPU requerido por cada um dos métodos iterativos investigados, para os três sistemas testes estudados nas subseções anteriores. Visando reduzir a interferência de cálculos de outros processos no hardware durante a aferição do tempo de CPU, repetiu-se cada simulação 100 vezes. Portanto, o tempo na tabela representa uma média destas repetições.

Tanto as curvas na Fig. 1 quanto na Fig. 2 evidenciam que os métodos que requerem menor número de iterações, se comparados ao método NR, são os que têm maior ordem de convergência. Este resultado se reflete nos tempos médios de CPU verificados na Tab. 2. O método *Cordero8*, de ordem oito, foi o que precisou menos iterações, precisando menos de 60% do tempo de CPU que o método de NR. O segundo método de melhor desempenho foi o *Hu*, de ordem 7. Este desempenho se reflete em número bem menor de iterações que o NR, embora maior que o

Tabela 2. Tempo médio de CPU, em segundos.

método	14	118	300
NR	0,034	4,84	6,44
Cordero8	0,092	2,89	3,78
Hu	0,043	4,05	5,60
Sharma	0,053	4,95	6,25
Vy	0,049	4,97	6,69
Grau	0,068	4,93	6,92
Cordero6	0,049	4,73	7,23
Jarrat	0,054	5,46	8,22

Cordero8. Em termos de tempo de CPU, requereu cerca de 85% do custo computacional do método NR. Quando são avaliados os resultados para o sistema de 14 barras, os tempos de CPU evidenciam a superioridade do método NR. No entanto, a maior complexidade é verificada para sistemas de maior porte, como nos casos de 118 e 300 barras, e quando há muitas iterações. Considerando estes aspectos, portanto, os métodos *Cordero8* e *Hu* são os que apresentam desempenho superior. Os demais métodos, mesmo com menos iterações que o NR, apresentaram tempos de CPU comparáveis ou mesmo superiores.

5. CONCLUSÕES

Este artigo apresentou um estudo sobre processos iterativos para a solução do problema não-linear aplicado ao clássico problema de despacho econômico de unidades térmicas em sistemas de potência. Foram apresentadas sete técnicas iterativas, além do método clássico de Newton-Raphson. O método NR apresenta convergência quadrática, enquanto as outras técnicas estudadas apresentam ordem de convergência até oito. O melhor desempenho em comparação ao método de NR foi obtido com o processo de ordem oito, denominado aqui *Cordero8*, tanto em precisão de convergência, quanto em custo computacional. Um segundo processo, de ordem de convergência 7, denominado *Hu*, também evidenciou desempenho superior ao de NR. Porém, com avaliação inferior ao *Cordero8*. Os outros cinco processos apresentaram desempenho comparável ao NR, ou pior.

Deve-se enfatizar que os cálculos iterativos avaliados neste trabalho para a solução do problema não-linear relativo ao PDE envolveu elevado número de iterações do método de Newton-Raphson. Constatou-se que os dois métodos de melhor desempenho apresentaram excelente desempenho em comparação ao método de NR, deparando-se com elevado número de iterações para convergência. Em trabalhos futuros, estão previstas investigações com a aplicação desses dois métodos a outros tipos de processos em que se busque elevada precisão numérica e elevada quantidade de iterações. Além de investigar o processo de solução de problemas de despacho econômico com representação do ponto de carregamento de válvula, zonas proibidas de operação e unidades termelétricas que operam com múltiplos combustíveis.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- Agrawal, S., Porate, K., and Raison, G. (2010). Economic dispatch of thermal units with the impact of wind power plant. In *Third International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology*, 48–53.
- Chun, W., Chi, C., Jun, X., Dong, Y., Shuyang, X., and Jixiang, W. (2017). Economic dispatch of virtual power plant based on distributed primal-dual sub-gradient method. In *Proceedings of the 36th Chinese Control Conference (CCC)*, 10517–10521. IEEE.
- Cordero, A., Torregrosa, J.R., and Vassileva, M.P. (2012). New predictor-corrector methods with high efficiency for solving nonlinear systems. *Journal of Applied Mathematics*, 1–15.
- Cordero, A., Hueso, J.L., Martinez, E., and Torregrosa, J.R. (2010). A modified newton-jarratt's composition. *Numerical Algorithms*, 55, 87–99.
- da Silva Junior, I.C. (2008). *Planejamento da Operação de Sistemas Termoeletricos Utilizando Análise de Sensibilidade Associada a Procedimentos Heurísticos*. Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Grau-Sánchez, M. (2007). Improvements of the efficiency of some three-step iterative like-newton methods. *Numerische Mathematik*, 107, 131–146.
- Hu, Y. and Fang, L. (2010). A seventh-order convergence newton-type method for solving nonlinear equations.
- Lotfi, T., Bakhtiari, P., Cordero, A., Mahdiani, K., and Torrerrosa, J.R. (2015). Some new efficient multipoint iterative methods for solving nonlinear systems of equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 92, 1921–1934.
- Momoh, J.A., Austin, R.F., Adapa, R., and Ogbuobiri, E.C. (1992). Application of interior point method to economic dispatch. In *[Proceedings] 1992 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, volume 2, 1096–1101. IEEE, Chicago, USA.
- Saber, A.Y. (2012). Economic dispatch using particle swarm optimization with bacterial foraging effect. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 34, 38–46.
- Sharma, R. (2014). Some fifth and sixth order iterative methods for solving nonlinear equations. *Int. Journal of Engineering Research and Applications*, 4, 268–273.
- Tippayachai, J., Ongsakul, W., and Ngamroo, I. (2002). Parallel micro genetic algorithm for constrained economic dispatch. 17(3), 790–797.
- Vy, D.T. (1987). Fifth-order iterative method for solving equations. *Acta Mathematica Hungarica*, 49, 129–137.
- Wood, A.J. and Woolenberg, B.F. (1996). *Power Generation, Operation and Control*. Wiley, 2nd ed. edition.
- Yalcinoz, T. and Atun, H. (2001). Power economic dispatch using a hybrid genetic algorithm.
- Zimmerman, R.D., Murillo-Sánchez, C.E., and Thomas, R.J. (2011). Matpower: steady-state operations, planning and analysis tools for power systems research and education. 26(01), 12–19.