

## O Método Newton Modificado-PL Aplicado ao Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo

Renan A. S. Carreira \* Diego N. da Silva \*\*  
Geraldo R. M. da Costa \*

\* *Departamento de Engenharia Elétrica e Computação, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo  
Avenida Trabalhador São-carlense, 400, 13566-590 - São Carlos, SP,  
Brasil*

\*\* *Instituto Federal de São Paulo - Campus Presidente Epitácio,  
Rua José Ramos Júnior, 27-50, 19470-000 - Presidente Epitácio, SP,  
Brasil  
e-mails:(renan.carreira@usp.br, diego.nunes@ifsp.edu.br,  
geraldo@sc.usp.br)*

---

**Abstract:** The Newton-LP method is an addition to the classic Newton's method. It has theoretical advantages over the classic Newton's method since its convergence does not presuppose local uniqueness of the solutions, or even second-order differentiability of the system's equations. Besides, it has a direct application to non-singular nonlinear systems of equations. The Modified-LP Newton method keeps all advantages of the Newton-LP method and simplifies calculations done in the process. In this work, the Modified-LP Newton method is applied to solve the Reactive Optimal Power Flow problem. It is presented a linesearch for modulation of the iterative step size aiming the enhancement of the convergence process. The efficacy of the proposed approach is demonstrated by numerical tests on the 3, IEEE 14, 30 and 118 buses systems.

**Resumo:** O método Newton-PL é um complemento do método de Newton clássico. Possui vantagens teóricas em relação ao método de Newton pois sua convergência não pressupõe unicidade local das soluções ou mesmo a diferenciabilidade das equações do sistema até segunda ordem. Além disso, possui aplicação direta em sistemas não lineares de equações não singulares. O método Newton Modificado-PL guarda todas as vantagens do método Newton-PL e simplifica os cálculos realizados no processo. Neste trabalho, o método Newton Modificado-PL é aplicado na resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo. Apresenta-se uma busca linear de modulação do tamanho do passo iterativo visando melhorar o processo de convergência. A eficácia da abordagem proposta é demonstrada em testes numéricos nos sistemas de 3 barras, IEEE 14, 30 e 118 barras.

*Keywords:* Optimal Power flow, active losses minimization, Newton-LP method, constrained nonlinear optimization

*Palavras-chaves:* Fluxo de potência ótimo, minimização de perdas ativas, método Newton-PL, otimização não linear restrita

---

### 1. INTRODUÇÃO

O Fluxo de Potência Ótimo (FPO), o qual pertence à classe dos problemas de análise estática do Sistema Elétrico de Potência (SEP), é muito estudado em um grande número de artigos publicados desde os anos 60. Existem diversas abordagens quanto à modelagem matemática do SEP, bem como dos respectivos problemas de otimização, conforme as características da rede, como a topologia dos sistemas tratados e propriedades intrínsecas dos elementos dos sistemas sendo consideradas. Para cada modelo estabelecido, diversas abordagens têm sido propostas e aplicadas na busca por soluções ótimas. A grande motivação está relacionada a uma melhoria das ciências técnicas e econômicas relacionadas, por exemplo, à operação do SEP e ao

controle do mercado desregulado de energia elétrica entre outras, o que tem impulsionado os avanços dos estudos na área desde os primeiros trabalhos publicados na literatura.

Em linhas gerais, pode-se definir um problema de FPO como a otimização de um dado objetivo, relacionado ao SEP, sujeito às equações de balanço do Fluxo de Potência e às restrições operacionais e de segurança da rede. Originalmente, trata-se de um problema de programação não linear (PNL) restrito e de grande porte, com presença de variáveis contínuas e discretas. No contexto do presente trabalho, no entanto, restringe-se a análise à relaxação contínua do problema, o que constitui uma simplificação do problema original. O Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR) é uma subclasse de problemas de FPO. Nestes problemas, admite-se um horizonte de tempo de

duração desprezível em relação às taxas de variação de potências ativas solicitadas pelas cargas e entregues pelas unidades geradoras e compensadoras síncronas. Logo, o despacho de potência ativa é tido como fixo. Admitem-se ajustes em determinadas variáveis de controle visando a otimização de um dado objetivo na operação do SEP, a saber: tensões das barras de controle de reativos (CR), taps dos transformadores e reatâncias dos elementos *shunt* de compensação de reativos. Neste momento da pesquisa, o presente artigo trata da otimização apenas das tensões controláveis do sistema. Os taps e *shunts* foram mantidos constantes nos valores fornecidos pelos bancos de dados com a minimização das perdas totais de potência ativa na transmissão.

Momoh et al. (1999a) e Momoh et al. (1999b) apresentam uma ampla revisão bibliográfica das principais abordagens aplicadas a resolução de problemas de FPO. Elas são divididas em abordagens de programação não linear, programação quadrática, abordagens Newtonianas, programação linear e método dos pontos interiores (MPI). Historicamente, o MPI aparece com relativa predominância entre as abordagens determinísticas de resolução de problemas de FPO (Granville, 1994; Wu et al., 1994; Torres e Quintana, 1998; Yan e Quintana, 1999; Ramos et al., 2005; Liang Xie e Hsiao-Dong Chiang, 2010; Sousa et al., 2011). No entanto, diversos trabalhos aplicaram outras abordagens com sucesso reconhecido na resolução destes problemas (Costa, 2002; Baptista et al., 2006; Sousa et al., 2009; Lage et al., 2009; Sousa et al., 2011; Soler et al., 2013). Em Silva (2019) é apresentada a investigação de três novas abordagens de otimização restrita, as quais são aplicadas a problemas de minimização de perdas ativas na transmissão do SEP. Na primeira delas, traz-se a aplicação de um método proposto por Fachinei et al. (2013), denominado Newton-PL. Trata-se de uma abordagem Newtoniana de resolução de sistemas restritos de equações. O método é aplicado ao sistema de equações não lineares advindo das condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) de otimalidade associadas ao problema original. Testes realizados nos sistemas IEEE 14, 30, 57, 118 e 300 barras demonstram a eficácia da abordagem como ferramenta de resolução de problemas de FPO.

Este trabalho visa estender o estudo do método, aplicando aproximações na matriz Hessiana da Lagrangeana que resulta do processo de linearização do sistema de equações resultante das condições KKT. Espera-se obter uma diminuição no tempo computacional destinado ao cálculo da Hessiana com as simplificações, e, em contrapartida, um aumento no número de iterações devido à aproximação no cálculo do vetor de atualização das variáveis. Porém, uma técnica de modulação do tamanho do passo visando a redução da violação das condições KKT, medida pela norma das equações do sistema não linear, é aplicada, conferindo um ganho em número de iterações e tempo computacional aos testes realizados.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema de FPOR com minimização das perdas ativas na transmissão pode ser formulado como em (1):

$$\begin{aligned} \min_{V, \theta} \text{Perdas}(V, \theta) \\ \text{s.a. } P^G - P^C - P(V, \theta) &= 0 \\ Q^G - Q^C - Q(V, \theta) &= 0 \\ Q_{min}^G \leq Q^G(V, \theta) \leq Q_{max}^G \\ V_{min} \leq V \leq V_{max} \end{aligned} \quad (1)$$

onde:

- $\text{Perdas}(V, \theta)$ : função das perdas ativas totais na transmissão do SEP;
- $N$ : número de barras do sistema;
- $NCR$ : número de barras de controle de reativos;
- $NPQ$ : número de barras de carga (PQ);
- $P^G \in \mathbb{R}^{(N-1)}$  e  $P^C \in \mathbb{R}^{(N-1)}$ : vetores de potências ativas de injeção e carga em todas as barras do sistema exceto a de referência;
- $Q^G \in \mathbb{R}^{(NPQ)}$  e  $Q^C \in \mathbb{R}^{(NPQ)}$ : vetores de potências reativas de injeção e carga nas barras PQ;
- $P(V, \theta) \in \mathbb{R}^{(N-1)}$  e  $Q(V, \theta) \in \mathbb{R}^{(NPQ)}$ : potências ativas e reativas líquidas das barras resultantes da avaliação das equações do fluxo de potência;
- $Q^G(V, \theta) \in \mathbb{R}^{(NCR)}$ : vetor de potências reativas de injeção nas barras CR;
- $Q_{max}^G$  e  $Q_{min}^G$ : limites de injeção de potência reativa nas barras CR;
- $V \in \mathbb{R}^N$ : vetor das magnitudes de tensão nas barras;
- $V_{max}$  e  $V_{min}$ : limites das magnitudes de tensão nas barras;
- $\theta$ : vetor de ângulos de fase das tensões nas barras.

## 3. MÉTODO NEWTON-PL

Dado um sistema restrito de equações da forma:

$$F(\omega) = 0, \quad \omega \in \Omega \quad (2)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  é um conjunto não-vazio e fechado e  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função vetorial contínua.

A base da maioria dos algoritmos de resolução de sistemas deste tipo é o método de Newton clássico. Sua aplicação direta, no entanto, não é possível com  $n \neq m$  ou  $\Omega$  sendo subconjunto próprio do  $\mathbb{R}^n$ . A ideia principal do método é a estimativa inicial  $\omega^0$  “suficientemente próxima de uma solução” e a construção de uma trajetória iterativa em direção à solução na forma:

$$\omega^{k+1} = \omega^k + \Delta\omega^k \quad (3)$$

onde o passo de atualização das variáveis  $\Delta\omega^k$  é obtido pela solução do sistema de equações:

$$\Delta\omega^k = -J(F(\omega^k))^{-1} \cdot F(\omega^k) \quad (4)$$

onde  $J(F(\omega^k))$  é a matriz Jacobiana do sistema de equações (2). Métodos clássicos deste tipo possuem convergência quadrática desde que satisfeitas as seguintes condições:

- $F$  continuamente diferenciável até a segunda ordem;
- A matriz  $J(F(\omega^k))$  é não singular;

- A estimativa inicial  $\omega^0$  se encontra suficiente próxima da solução  $\omega^*$ .

Como apontado por Facchinei et al. (2013), o desenvolvimento de campos de aplicação deste assunto trouxe demandas pela extensão do método Newton clássico em três direções principais:

1. Relaxamento da condição de diferenciabilidade;
2. Relaxamento da condição de não-singularidade;
3. A capacidade de obter solução em um domínio restrito  $\Omega$ .

Pode ser mencionada como exemplo de aplicação onde se restringe o conjunto  $\Omega$  a solução de problemas de otimização restrita, onde os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade devem ser estritamente positivos. Também é o caso de aplicações envolvendo o fluxo de potência em sistemas de energia, onde aparecem restrições deste tipo correspondentes aos limites operacionais, tanto associados a variáveis de controle quanto de estado.

No mérito das direções de estudo apontadas acima, Facchinei et al. (2013) propuseram um novo algoritmo com rápida convergência local e robustez e aplicabilidade superiores às de métodos correlatos anteriormente propostos. O método realiza uma busca iterativa da solução do sistema de equações (2). Dado um iterando atual  $\omega^k \in \Omega$ , a direção de busca  $d^k$ , equivalente ao passo  $\Delta\omega^k$  em (3), é obtida pela resolução do subproblema:

$$\begin{aligned} & \min_{d^k, \gamma^k} \gamma^k \\ \text{s.a. } & \|F(\omega^k) + G(\omega^k)d^k\| \leq \gamma^k \|F(\omega^k)\|^2 \\ & \|d^k\| \leq \gamma^k \|F(\omega^k)\| \\ & \omega^k + d^k \in \Omega \\ & \gamma^k \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Onde  $G(\omega^k)$  é a matriz jacobiana de  $F$  em  $\omega^k$ . Teoricamente, o subproblema (5) é válido para qualquer opção de norma utilizada nos termos das restrições de desigualdade. Por conveniência, neste trabalho, assim como nos trabalhos anteriores citados, adota-se a norma infinita. Assume-se que  $\Omega$  é um conjunto poliedral.

A utilização da norma infinita e as considerações mencionadas sobre o conjunto  $\Omega$ , fazem de (5) um subproblema de programação linear (PL), de onde vem o nome do método. Além disso, a última restrição é redundante desde que os termos  $d^k$  e  $F(\omega^k)$  na segunda restrição sejam não-nulos. Como apresentado em Facchinei et al. (2013), a convergência quadrática deste método é garantida sem a necessidade de satisfação das condições previamente citadas ou ainda de unicidade local das soluções. Estes quesitos conferem ao método Newton-PL a capacidade de resolver problemas não tratáveis pelo método de Newton tradicional e o tornam de grande interesse na aplicação a problemas de otimização restrita.

Assim, este método resolve um subproblema de PL a cada iteração para obter a direção  $d^k$  de atualização das variáveis  $\omega^k$ . Em Facchinei et al. (2013) foi provado pelos autores que o subproblema (5) possui uma solução ótima para qualquer  $\omega^k \in \mathbb{R}^n$  e que o valor ótimo  $\gamma^k$  é nulo se, e

somente se  $\omega^k$  é solução de (2). Na sequência apresenta-se o algoritmo do método:

---

#### Algoritmo 1 MÉTODO NEWTON-PL

---

1. Escolha a estimativa inicial  $\omega^0 \in \Omega$  e a tolerância de convergência  $\epsilon$ . Faça  $k = 0$ ;
  2. Avalie  $\|F(\omega^k)\|$ , se menor que a tolerância  $\epsilon$ , pare. Retorne  $\omega^k$  como solução;
  3. Resolva o subproblema (5) para obter  $(d^k, \gamma^k)$ . Obtenha  $\omega^{k+1} = \omega^k + d^k$ ;
  4. Faça  $k = k + 1$ . Retorne ao passo 2
- 

#### 4. PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO RESTRITA: CONDIÇÕES KKT

Apresenta-se a aplicação do método Newton-PL a um sistema restrito de equações resultante da avaliação das condições KKT de otimalidade de primeira ordem de um problema geral de minimização restrita. Considere:

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ \text{s.a. } & g_i(x) = 0, \quad i = 1 \dots m \\ & h_j(x) \leq 0, \quad j = 1 \dots p \end{aligned} \quad (6)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $m < n$ ),  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  são funções de classe  $C^2$  (Silva, 2019). Define-se o vetor de variáveis  $\omega$ :

$$\omega = \begin{bmatrix} x \\ s \\ \lambda \\ \pi \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde:  $\lambda$ : é o vetor de multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade;

$\pi$ : é o vetor dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade;

$s$ : é o vetor das variáveis de folga.

A função Lagrangeana do problema (6) é dada por:

$$L(\omega) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \pi_j h_j(x) \quad (8)$$

As condições KKT do problema (6) são apresentadas a seguir:

**Otimalidade:**  $\nabla_x L(\omega) = 0$ .

Onde:  $\nabla_x L(\omega) = \nabla_x f + Jg^T \lambda + Jh^T \pi$ .

**Factibilidade:**  $g(x) = 0$  e  $h(x) \leq 0$ .

Modificando esta última com a introdução das variáveis de folga, tem-se:  $h(x) + s = 0$ .

**Complementaridade:**  $s \circ \pi = 0$  (produto de Hadamard dos vetores  $s$  e  $\pi$ ).

**Não-negatividade:**  $s \geq 0$  e  $\pi \geq 0$ .

Organizando adequadamente as expressões, obtém-se a formulação do problema na forma de um sistema restrito de equações do tipo  $F(\omega) = 0$ ,  $\omega \in \Omega$ :

$$\begin{bmatrix} \nabla_x L(\omega) \\ g(x) \\ h(x) + s \\ s \circ \pi \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

$$s \geq 0, \pi \geq 0$$

A expressão da matriz Jacobiana  $G(\omega)$  do sistema é dada por:

$$G(\omega) = \begin{bmatrix} \nabla^2_{xx}L & 0 & Jg^T & Jh^T \\ Jg & 0 & 0 & 0 \\ Jh & Ip & 0 & 0 \\ 0 & \Pi p & 0 & Sp \end{bmatrix} \quad (10)$$

onde:

$Jg$  é a Jacobiana das restrições de igualdade;  
 $Jh$  é a Jacobiana das restrições de desigualdade;  
 $Ip$  é uma matriz identidade de dimensão  $p$ ;  
 $\Pi p = \text{diag}(\pi)$ ;  
 $Sp = \text{diag}(s)$ .

A parte principal da implementação do Algoritmo 1 é a solução do subproblema (5), que se baseia nos termos  $F(\omega)$  e  $G(\omega)$  definidos acima, incluindo a escolha da estimativa inicial e outros parâmetros e procedimentos adicionais. Na solução do subproblema (5), é importante observar que, via de regra, os solvers de PL trabalham com a seguinte formulação geral:

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & A'x \leq b' \\ & x \in [x_{\min}, x_{\max}] \end{aligned} \quad (11)$$

Sendo assim, para fins de implementação, o subproblema deve ser convenientemente reformulado, resultando em:

$$\min_{d^k, \gamma^k} \gamma^k \quad (12a)$$

$$\text{s.a} \quad -G(\omega^k)d^k - \gamma^k \|F(\omega^k)\|^2 e \leq F(\omega^k) \quad (12b)$$

$$G(\omega^k)d^k - \gamma^k \|F(\omega^k)\|^2 e \leq -F(\omega^k) \quad (12c)$$

$$-Id - \gamma^k \|F(\omega^k)\| e \leq 0 \quad (12d)$$

$$Id - \gamma^k \|F(\omega^k)\| e \leq 0 \quad (12e)$$

$$-s \leq 0 \quad (12f)$$

$$-\pi \leq 0 \quad (12g)$$

$$-\gamma^k \leq 0 \quad (12h)$$

Onde  $e$  é em vetor coluna de dimensão  $2N+m+2p-1$ . Para o caso específico de sistemas KKT, as restrições  $\omega \in \Omega$  incluem, em todo caso, a não-negatividade de  $s$  e  $\pi$ . Seja  $d$  o vetor de atualização do vetor de variáveis  $\omega$  em (9). A forma matricial das equações (12b) a (12e) é:

$$\nabla^2_{xx} L' = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_1^2} \lambda_i + \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 h_j}{\partial x_1^2} \pi_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_2^2} \lambda_i + \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 h_j}{\partial x_2^2} \pi_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_n^2} \lambda_i + \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 h_j}{\partial x_n^2} \pi_j \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} -G(\omega^k) & -\gamma \|F(\omega^k)\|^2 e \\ G(\omega^k) & -\gamma \|F(\omega^k)\|^2 e \\ -Id & -\gamma \|F(\omega^k)\| e \\ Id & -\gamma \|F(\omega^k)\| e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_x \\ d_s \\ d_\lambda \\ d_\pi \\ d_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\omega^k) \\ -F(\omega^k) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

As expressões (12f) a (12h) entram como linhas adicionais. Em cada linha adicional, entra-se com o valor -1 no coeficiente da variável correspondente e 0 nos demais. No vetor independente do membro direito, entra-se com o valor atual da variável correspondente para cada linha adicional exceto a da variável  $\gamma^k$ , que recebe o valor 0.

## 5. MODIFICAÇÕES PROPOSTAS

Em (Silva, 2019) o método Newton-PL é estudado e aplicado a problemas de FPOR. Neste trabalho, estudam-se as seguintes modificações no método:

- Considera-se somente a diagonal da sub-matriz Hessiana da Lagrangeana. Busca-se uma redução do esforço computacional dedicado ao cálculo da matriz, bem como da resolução do subproblema de PL. Em contrapartida, considerável redução da velocidade de convergência é esperada. Analisa-se a composição destes efeitos.
- Substituição da Hessiana da Lagrangeana por uma matriz diagonal constante.
- Implementação de uma busca linear de modulação do tamanho do passo, buscando aumento da velocidade de convergência.

### 5.1 Aproximações da Hessiana da Lagrangeana

Apresentam-se as variantes aplicadas a  $\nabla^2_{xx} L$  em (10). O tamanho desta matriz quadrada é igual ao número de variáveis do problema original. Neste caso,  $2N - 1$ .

A Hessiana da Lagrangeana é dada pela seguinte expressão:

$$\nabla^2_{xx} L = \nabla^2_{xx} f(x) + \nabla_x (Jg^T \lambda) + \nabla_x (Jh^T \pi) \quad (14)$$

**Aproximação 1:** calculam-se apenas os termos da diagonal principal da matriz resultante de (14), conforme apresenta equação (15)

**Aproximação 2:** Utiliza-se uma matriz diagonal constante dada pela equação (16)

$$\nabla_{xx}^2 L'' = k \times Id_{(2N-1)} \quad (16)$$

### 5.2 Busca linear de modulação de passo

Na etapa de atualização do vetor  $\omega^k$  de variáveis (passo 3 do algoritmo 1), admite-se, a cada iteração, passo ligeiramente maior que 1 que produza um valor menor de  $\|F(\omega^{k+1})\|$  em relação ao correspondente com passo unitário. Para tanto, introduz-se um fator  $\alpha^k$  de modulação à expressão de atualização de  $\omega^k$  no passo 3 do algoritmo 1, obtendo-se:

$$\omega^{k+1} = \omega^k + \alpha^k \cdot d^k \quad (17)$$

Introduz-se uma pequena constante  $\delta$  de incremento de  $\alpha_k$ . Estabelece-se o seguinte processo iterativo:

1. Inicializa-se  $\alpha^k$  com valor 1;
2. Atualiza-se provisoriamente  $\omega^k$  pela expressão (17), avalia-se  $\|F(\omega^{k+1})\|$ ;
3. Faz-se  $\alpha^k = \alpha^k + \delta$ ;
4. Atualiza-se provisoriamente  $\omega^k$  pela expressão (17), avalia-se  $\|F(\omega^{k+1})\|$ ;
5. Compara-se novo  $\|F(\omega^{k+1})\|$  com anterior. Se houve redução, retorna-se ao passo 3. Se não, o passo anterior é aceito e o algoritmo prossegue.

## 6. RESULTADOS

São apresentados os testes numéricos realizados com os seguintes casos base: sistema de 3 barras (Dommel e Tinney, 1968) e IEEE 14, 30 e 118 barras.

### 6.1 Dados de entrada

A Tabela 1 resume as características dos sistemas testados que definem o escopo de cada problema de otimização. São relacionadas as características das barras, n° de restrições e n° total de variáveis incluindo multiplicadores de Lagrange e variáveis de folga (NTV).

Tabela 1. Características dos sistemas

Sistema	$N$	$NCR$	$NPQ$	$m$	$p$	$NTV$
3 barras	3	1	1	3	8	24
IEEE 14	14	4	9	22	36	85
IEEE 30	30	5	24	53	70	182
IEEE 118	118	53	64	181	342	758

Os dados de carregamento e limites operacionais do sistema de 3 barras e dados das linhas de transmissão são apresentados nas Tabelas 2 e 3. Todos os dados estão em  $pu$ .

Tabela 2. Sistema 3 barras: dados de barra

Barra	Tipo	$P^C$	$Q^C$	$P^G$	$Q^G$
1	slack	0,0	0,0	-	-
2	CR	0,0	0,0	1,7	0,0
3	PQ	2,0	1,0	0,0	0,0

Tabela 3. Sistema 3 barras: dados de linha

Barra $k$ origem	Barra $m$ destino	$r_{km}$	$x_{km}$	$b_{kmsh}$
1	2	0,098	0,122	0,000
1	3	0,034	0,086	0,000

Limites de tensão na barra 3:

$$[V_{3min}; V_{3max}] = [0,999; 1]pu$$

Limites de reativos na barra 2:

$$[Q_{2min}^G; Q_{2max}^G] = [1; 2]pu$$

Os dados de entrada dos casos base dos sistemas IEEE estão disponíveis em Christie (2000). Os limites de tensão adotados em todas as barras são:

$$[V_{min}; V_{max}] = [0,95; 1,05]pu$$

Todos os testes utilizaram o *flat start* como ponto inicial. Ou seja, tensões unitárias e ângulos nulos. A tolerância de convergência é  $\epsilon = 10^{-3}$ .

### 6.2 Parâmetros da implementação

Cada sistema apresenta quatro testes. São cenários aplicando as aproximações 1 e 2 da Hessiana, com e sem modulação de passo.

- Nos testes com modulação de passo:  $\delta$  é igual a 0,0005;
- Nos testes utilizando a aproximação 2, o fator  $k$  de (16) é igual a 10.

Foi utilizado um computador com processador Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> i5-5200U, 2,20GHz e 8GB de memória RAM. A ferramenta MATLAB<sup>®</sup> r2018b foi utilizada no desenvolvimento das implementações. Para solução do subproblema de PL foi utilizada a função *linprog* com as seguintes configurações:

- Algoritmo: Dual-simplex;
- Tolerância de otimalidade:  $10^{-3}$ ;
- Tolerância de factibilidade:  $10^{-3}$ .

### 6.3 Performances resumidas

A Tabela 4 apresenta de maneira resumida o n° total de iterações e tempo de execução de cada teste realizado<sup>1</sup>. As colunas dividem-se conforme a aproximação da Hessiana utilizada e emprego ou não da técnica de modulação de passo. Os melhores resultados para cada sistema aparecem destacados.

Tabela 4. Performances resumidas

Sistema	Aprox. 1				Aprox. 2			
	a) s/ mod.		b) c/ mod.		c) s/ mod.		d) c/ mod.	
	t(s)	n° It	t(s)	n° It	t(s)	n° It	t(s)	n° It
1) 3 barras	6	11	6	7	5	11	5	15
2) IEEE 14	9	102	6	40	9	117	7	72
3) IEEE 30	23	280	11	68	22	177	14	125
4) IEEE 118	160	326	129	214	-	-	476	581

### 6.4 Perfis de tensões resultantes e trajetórias de minimização

Na sequência são apresentados os perfis de tensões das respostas finais ao longo das barras dos sistemas, bem

<sup>1</sup> o limite máximo de iterações adotado foi excedido no teste 4) c)

como os valores das perdas ativas totais em cada caso. São apresentadas também as representações gráficas das trajetórias de minimização, fornecendo comparação visual entre os desempenhos alcançados.

**Sistema de 3 barras:**

A Fig. 1 apresenta a trajetória das tensões  $V1$  e  $V2$  no espaço de busca correspondente ao teste a) (Tabela 4). São mostradas as curvas de nível das perdas ativas totais do sistema em pu. A potência base é de 100MVA. São destacadas também as delimitações das restrições de desigualdade. A Fig. 2 apresenta as trajetórias de convergência dos testes conforme Tabela 4.

**IEEE 14 barras:**

A Fig. 3 apresenta o perfil das tensões finais. A Fig. 4 apresenta as trajetórias de convergência dos testes conforme Tabela 4.

**IEEE 30 barras:**

A Fig. 5 apresenta o perfil das tensões finais. A Fig. 6 apresenta as trajetórias de convergência dos testes conforme Tabela 4.

**IEEE 118 barras:**

A Fig. 7 apresenta o perfil das tensões finais. A figura 8 apresenta as trajetórias de convergência dos testes conforme Tabela 4.

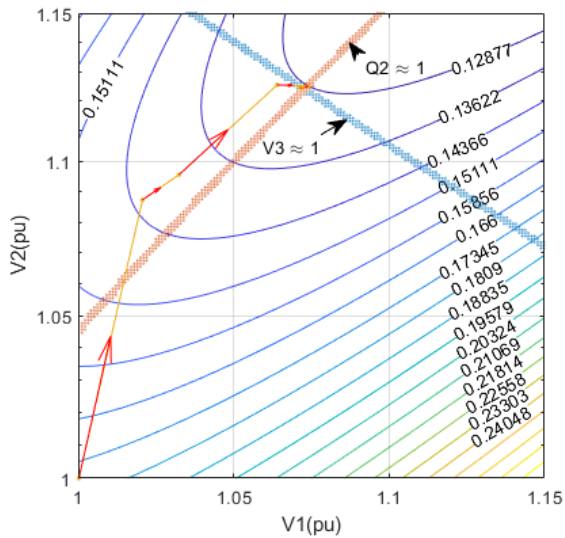


Figura 1. Sistema de 3 barras - trajetória das tensões

A Tabela 5 relaciona os valores das perdas ativas totais das soluções obtidas para cada sistema.

Tabela 5. Perdas ativas totais

Sistema	Perdas (MW)
1) 3 barras	12,92
2) IEEE 14	13,76
3) IEEE 30	17,98
4) IEEE 118	116,94

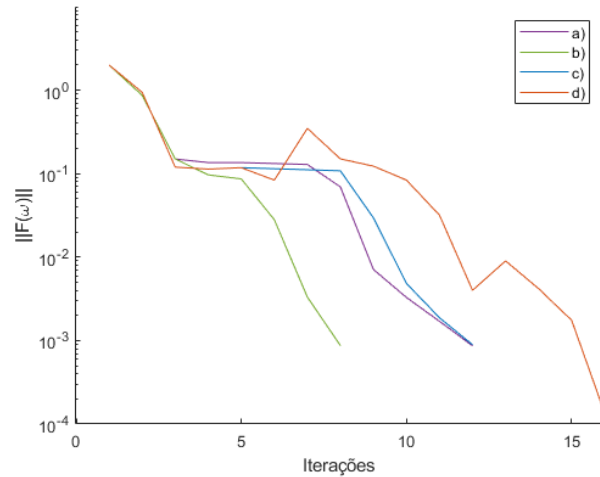


Figura 2. Sistema de 3 barras - trajetórias de convergência

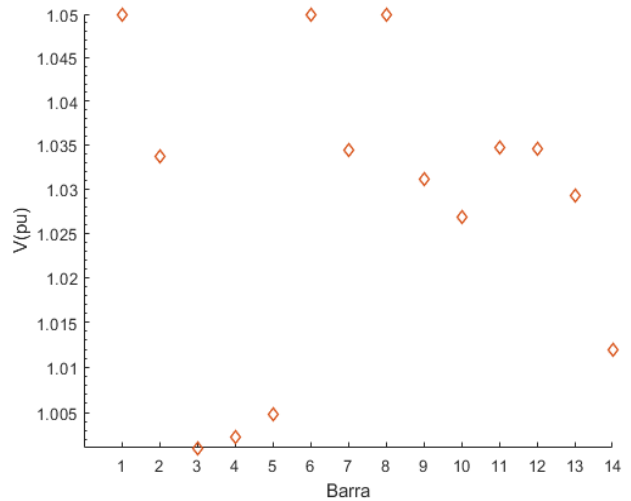


Figura 3. IEEE 14 barras - perfil das tensões

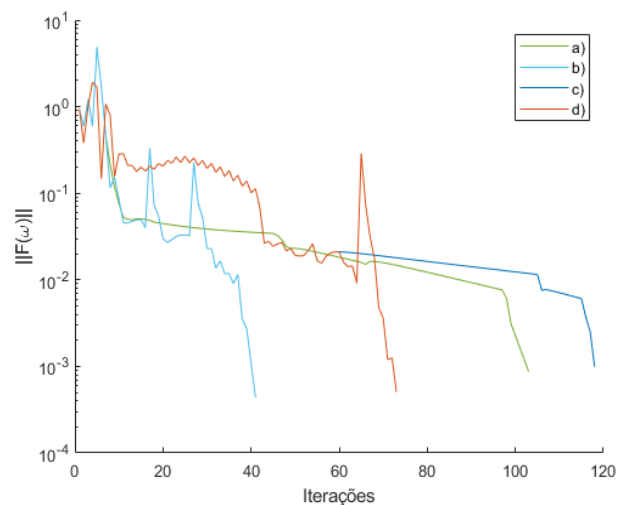


Figura 4. IEEE 14 barras - trajetórias de convergência

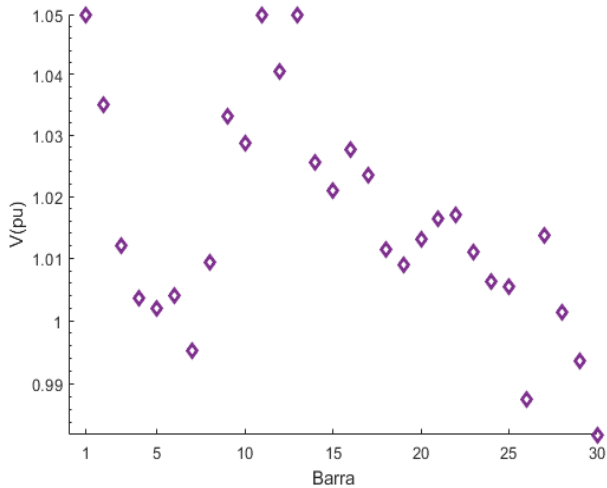


Figura 5. IEEE 30 barras - perfil das tensões

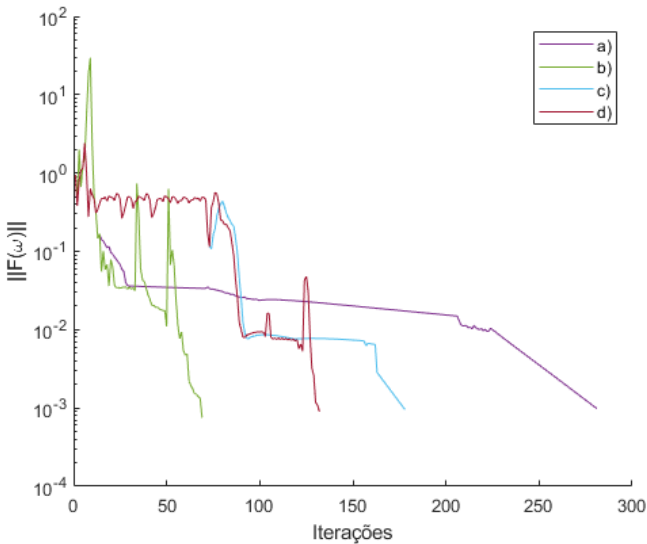


Figura 6. IEEE 30 barras - trajetórias de convergência

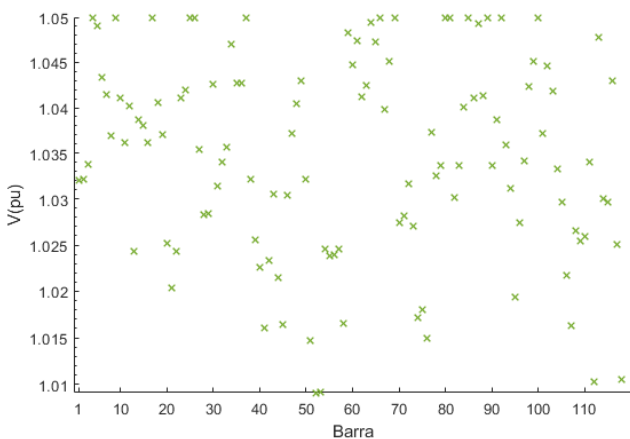


Figura 7. IEEE 118 barras - perfil das tensões

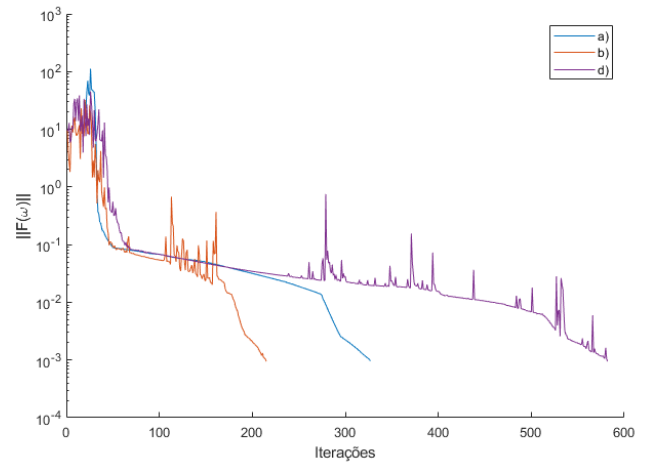


Figura 8. IEEE 118 barras - trajetórias de convergência

Em todos os testes apresentados, exceto em 4) c), o método convergiu para a tolerância estabelecida. Embora o método Newton-PL, como outros métodos da mesma natureza, não garanta otimalidade global e não se tenha garantia de unicidade de soluções ótimas, obtiveram-se respostas únicas para cada sistema nos diferentes testes. Os resultados demonstram a eficácia da abordagem proposta aplicada ao problema de minimização de perdas na transmissão para sistemas de diferentes dimensões e configurações. Pode-se observar pela comparação entre curvas de convergência que a aproximação 2, menos precisa que a 1, leva a um número maior de iterações final e eventualmente falha no sistema IEEE 118 barras. Também observa-se que os casos com modulação de passo tem desempenho superior aos onde ela não é aplicada. Assim, a técnica demonstra-se satisfatória em produzir palpável aumento na velocidade de convergência do processo.

## 7. CONCLUSÕES

Foi feita a aplicação do método a sistemas KKT, introduzindo-se aproximações da Hessiana da Lagrangeana presente na Jacobiana do sistema não linear resultante. Observou-se diminuição do tempo computacional dedicado aos cálculos simplificados e à resolução dos subproblemas de PL por iteração, que ficaram mais esparsos em relação ao método cheio. A aproximação 1 da Hessiana se mostrou melhor, como esperado, pois traz informações de segunda ordem dos problemas de otimização restrita com maior precisão em relação à matriz diagonal constante. A técnica de modulação de passo contribuiu para redução dos tempos de execução, como mostrado na Tabela 4.

Em contrapartida, as aproximações resultaram em considerável redução da velocidade de convergência em relação ao método cheio, conforme resultados apresentados em Silva (2019). Embora o tempo médio das iterações seja consideravelmente menor, observou-se ainda que o maior tempo computacional relativo é requerido pelas chamadas da função de resolução do subproblema de PL. Neste mérito, testes de diferentes parâmetros e algoritmos de PL nesta aplicação deverão ser promissores em busca de resultados mais competitivos em tempo de execução. Também consideram-se muito válidos estudos de estimativas

alternativas da Hessiana, adentrando a teoria de métodos quasi-Newton.

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## REFERÊNCIAS

- Baptista, E.C., Belati, E.A., Sousa, V.A., and Costa, G.R.M. (2006). Primal-dual logarithmic barrier and augmented lagrangian function to the loss minimization in power systems. *Electric Power Components and Systems*, 34(7), 775–784.
- Christie, R. (2000). Power systems test case archive. URL <https://www2.ee.washington.edu/research/pstca>.
- Costa, G.R.M. (2002). Modified newton method for reactive dispatching. *International Journal of Electrical Power Energy Systems*, 24(10), 815 – 819.
- Dommel, H.W. and Tinney, W.F. (1968). Optimal power flow solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-87(10), 1866–1876.
- Facchinei, F., Fischer, A., and Herrich, M. (2013). An lp-newton method: Nonsmooth equations, kkt systems, and nonisolated solutions. *Mathematical Programming*, 146, 1–36.
- Granville, S. (1994). Optimal reactive dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(1), 136–146.
- Lage, G.G., Sousa, V.A., and Costa, G.R.M. (2009). Optimal power flow solution using the penalty/modified barrier method. In *2009 IEEE Bucharest PowerTech*, 1–6.
- Liang Xie and Hsiao-Dong Chiang (2010). A enhanced multiple predictor-corrector interior point method for optimal power flow. In *IEEE PES General Meeting*, 1–8.
- Momoh, J.A., Adapa, R., and El-Hawary, M. (1999a). A review of selected optimal power flow literature to 1993. i. nonlinear and quadratic programming approaches. *IEEE transactions on power systems*, 14(1), 96–104.
- Momoh, J.A., Adapa, R., and El-Hawary, M. (1999b). A review of selected optimal power flow literature to 1993. ii. newton, linear programming and interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(1), 105–111.
- Ramos, J.L.M., Exposito, A.G., and Quintana, V.H. (2005). Transmission power loss reduction by interior-point methods: implementation issues and practical experience. *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, 152(1), 90–98.
- Silva, D.N. (2019). *Novas Abordagens Determinísticas de Otimização para Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo*. Ph.D. thesis, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Soler, E.M., Asada, E.N., and Costa, G.R.M. (2013). Penalty-based nonlinear solver for optimal reactive power dispatch with discrete controls. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(3), 2174–2182.
- Sousa, A.A., Torres, G.L., and Cañizares, C.A. (2011). Robust optimal power flow solution using trust region and interior-point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 26(2), 487–499.
- Sousa, V.A., Baptista, E.C., and Costa, G.R.M. (2009). Loss minimization by the predictor–corrector modified barrier approach. *Electric Power Systems Research*, 79(5), 803 – 808.
- Torres, G.L. and Quintana, V.H. (1998). An interior-point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(4), 1211–1218.
- Wu, Y.C., Debs, A.S., and Marsten, R.E. (1994). A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(2), 876–883.
- Yan, X. and Quintana, V.H. (1999). Improving an interior-point-based opf by dynamic adjustments of step sizes and tolerances. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(2), 709–717.