

Controle sob Restrições de Sistemas Lineares - Projeto de Realimentação de Saídas via Programação Bilinear^{*}

Geovana A. França dos Santos^{*} Jackson G. Ernesto^{*}
Eugênio B. Castelan^{*}

^{*} Departamento de Automação e Sistemas - DAS,
Programa de PG em Engenharia de Automação e Sistemas - PPGEAS,
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Florianópolis, SC.
E-mail: geovana.franca@posgrad.ufsc.br, jacksongeresto@hotmail.com,
eugenio.castelan@ufsc.br

Abstract: The positive invariance property of polyhedral sets is used to design static and dynamic output feedback control laws for systems subject to state and control constraints, thus guaranteeing the local asymptotic stability to the origin of the trajectories starting from a pre-specified set of interest. The proposal considers a bilinear optimization problem in which the objective function weighs the speed of the convergency of the trajectories to the origin and the control effort. Some numerical examples allow us to show the proposal's efficacy and potentials.

Resumo: Utiliza-se a propriedade de invariância positiva de conjuntos poliédricos para projetar leis de controle por realimentação de saídas, estática e dinâmica, garantindo que as restrições de estado e controle sejam respeitadas para toda trajetória do sistema que parte de um conjunto dado de condições iniciais. A proposta considera um problema de otimização bilinear cuja função objetivo pondera a velocidade de convergência das trajetórias para a origem e o esforço de controle. Exemplos numéricos mostram a eficácia e o potencial da proposta.

Keywords: Constrained control; Positive invariance; Contractivity; Polyhedral sets; Bilinear Programming.

Palavras-chaves: Controle sob restrições; Invariância positiva; Contratividade; Conjuntos poliédricos; Programação bilinear.

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas três décadas, o conceito de invariância positiva de conjuntos poliedrais tem sido utilizado por diversos autores, brasileiros e estrangeiros, para tratar problemas de análise e síntese de controle de sistemas dinâmicos na presença de limites sobre os estados ou das variáveis de controle do sistema. Em geral, a invariância positiva de um conjunto convexo garante o confinamento das trajetórias do sistema no seu interior. Isto permite determinar regiões de estabilidade local, nas quais garante-se o respeito das restrições, inclusive na presença de perturbações e ruídos limitados em amplitude. Além disso, sob a hipótese de contratividade do conjunto ao longo das trajetórias do sistema, pode-se garantir a estabilidade assintótica local do sistema controlado; veja, por exemplo, Castelan and Hennes (1993); Hennes (1995); Blanchini (1999); Tarbouriech et al. (2011); Blanchini and Miani (2015); Dórea (2009); Dantas et al. (2018) e referências ali contidas.

Muito embora os conjuntos poliédricos tenham a forma mais adaptada aos limites em amplitude encontrados na prática, as relações algébricas que descrevem a invariância positiva de conjuntos poliedrais são, por natureza, bili-

neares em termos das variáveis matriciais, que permitem determinar um conjunto invariante que seja desconhecido *a priori* (Blanchini and Miani, 2015). Por um outro lado, a utilização de conjuntos de natureza elipsoidal associados a funções de Lyapunov quadráticas ou compostas popularizou-se devido a aplicação de métodos baseados na utilização de LMIs, que podem ser resolvidas por métodos de Programação Convexa (Tarbouriech et al., 2011).

Entretanto, é importante salientar que as bilinearidades presentes nas condições algébricas que descrevem a invariância positiva de conjuntos poliédricos podem ser tratadas de forma numericamente eficiente por alguns otimizadores não-lineares locais, incluindo o *solver* não-linear KNITRO (Byrd et al., 2006). Uma característica importante desta formulação é que os ganhos de realimentação aparecem de forma explícita no equacionamento bilinear, o que permite considerar leis de controle do tipo realimentação de saídas, estática e dinâmica, como demonstrado em Brião et al. (2018); Brião (2019); Dórea et al. (2020). Dessa forma, a abordagem baseada em Programação Linear (PL), utilizada em Santos et al. (1997); Milani and Dórea (1996); Milani et al. (1996), entre outras referências, para a obter a invariância do conjunto poliédrico determinado pelas restrições sobre os estados, pode ser adaptada para garantir a invariância de um poliedro contido no conjunto de restri-

^{*} Trabalho realizado com apoio financeiro da CAPES e do CNPq (Proc. 306927/2017-9), Brasil.

ções de estado. Além do projeto de controladores do tipo realimentação de saída, esta abordagem tem flexibilidade para tratar diferentes objetivos referentes ao desempenho local do sistema sob restrições, como os explorados no presente trabalho, bem como de considerar restrições estruturais na lei de controle.

Dentro do contexto anterior, o objetivo neste artigo é apresentar de forma unificada uma nova abordagem baseada em programação bilinear para a síntese de leis de controle por realimentação de saídas, estática e dinâmica, para sistemas lineares invariantes no tempo contínuo ou discreto. Mais especificamente, considera-se que o sistema está sujeito às restrições sobre os estados e as variáveis de controle, não necessariamente simétricas em relação à origem, e deseja-se sintetizar uma lei de controle e um conjunto poliédrico positivamente invariante tais que, dado um conjunto de estados iniciais admissíveis de interesse para o projeto, todas as trajetórias iniciadas neste conjunto de interesse converjam assintoticamente para a origem respeitando as restrições sobre estados e controle. O problema de otimização proposto tem como restrições as condições algébricas necessárias e suficientes que descrevem a invariância do conjunto a ser determinado, assim como as relações de inclusão de conjuntos necessárias para o tipo de solução considerada. Além disso, a função objetivo em questão, inspirada em Milani et al. (1996); Brião et al. (2018), permite ponderar a velocidade de convergência das trajetórias para a origem e o esforço de controle.

Este artigo é organizado como segue. Na próxima seção, o problema geral de controle por realimentação de saídas é apresentado. Na Seção 3, considera-se o problema específico de Realimentação Estática de Saídas, ou SOF (do inglês *Static Output Feedback*), apresenta-se os resultados teóricos relevantes para a sua solução e coloca-se o problema de otimização bilinear correspondente. Da mesma forma, na seção seguinte, considera-se o problema de controle por Realimentação Dinâmica de Saídas, ou DOF (do inglês *Dynamic Output Feedback*). Para tanto, utiliza-se uma formulação clássica no espaço de estados aumentado a qual permite adaptar o problema de otimização bilinear anterior para o projeto de controladores de tipo DOF de ordem geral. A Seção 5 é dedicada à apresentação e discussão de dois exemplos ilustrativos. Finalmente, são apresentadas as conclusões.

2. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um sistema Linear e Invariante no Tempo (LIT) em malha aberta, dado por:

$$p[x(t)] = Ax(t) + Bu(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1b)$$

em que $t \in \mathbb{R}_+$ se o sistema é em tempo contínuo e $t \in \mathbb{N}$ no caso de tempo discreto, com:

$$p[x(t)] = \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt}, & \text{se } t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t+1), & \text{se } t \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída mensurada. Além disso,

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e os pares (A, B) e (C, A) são controláveis e observáveis, respectivamente.

O sistema possui as seguintes restrições sobre as variáveis de estado e controle, as quais são limitadas a evoluir no interior de conjuntos poliédricos na forma:

$$\mathcal{X} = \{x(t) : Gx(t) \leq \mathbf{1}_{l_g}\}, \text{ com } G \in \mathbb{R}^{l_g \times n}, \quad (3a)$$

$$\mathcal{U} = \{u(t) : Zu(t) \leq \mathbf{1}_{l_z}\}, \text{ com } Z \in \mathbb{R}^{l_z \times m}, \quad (3b)$$

onde $\mathbf{1}_{l_*} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^{l_*}$.

Adicionalmente, considera-se um conjunto de condições iniciais admissíveis de interesse para o sistema em malha fechada, dado por:

$$\mathcal{D} = \{x(0) : Dx(0) \leq \mathbf{1}_{l_d}\}, \text{ com } D \in \mathbb{R}^{l_d \times n}. \quad (4)$$

Este conjunto é de escolha do projetista e deve ser compatível com as restrições impostas sobre os estados, ou seja, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}$. Nesse cenário, será considerado o problema de controle do sistema (1) sujeito às restrições (3a), (3b) e (4), utilizando leis de controle por realimentação de saídas, estática e dinâmica, definidas como segue:

- *Realimentação estática de saídas* (SOF)

$$u(t) = Ky(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times p}, \quad (5)$$

- *Realimentação dinâmica de saídas* (DOF):

$$p_c[x(t)] = A_c x_c(t) + B_c y(t) \quad (6a)$$

$$u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t), \quad (6b)$$

em que $0 < n_c$ é a ordem do controlador dinâmico e $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ é o vetor de estado associado, com $A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times p}$ e $C_c \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$.

O problema específico a cada uma das leis de controle e os resultados correspondentes serão apresentados nas duas seções seguintes.

3. REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDAS

Aplicando-se a lei de controle SOF (5) ao sistema (1), obtém-se o sistema em malha-fechada

$$p[x(t)] = (A + BKC)x(t), \quad (7)$$

cujas trajetórias que iniciam em (4) devem evoluir no interior de (3a) e convergir assintoticamente para a origem sob a aplicação de entradas de controle restritas a (3b).

Trata-se, então, de um problema de estabilização local do sistema (7), que pode ser tratado utilizando-se o conceito de invariância positiva de conjuntos convexos (veja, por exemplo, Hennes (1995); Blanchini and Miani (2015)).

Definição 1. Um conjunto convexo $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^n$ é um conjunto positivamente invariante do sistema (7) se toda trajetória que inicia em \mathcal{L} permanece em \mathcal{L} para todo $t \geq 0$. Além disso, se contém a origem em seu interior, o conjunto positivamente invariante \mathcal{L} é contrativo se $\delta\mathcal{L}$ também é positivamente invariante para todo valor de $\delta \in \mathbb{R}^+$ no intervalo $(0, 1)$. Então, se \mathcal{L} é compacto (limitado e fechado) e contém a origem no seu interior, a contratividade garante a estabilidade assintótica local para a origem de todas as trajetórias do sistema (7) que iniciam em \mathcal{L} .

Neste trabalho, são considerados conjuntos poliédricos compactos com a origem no seu interior, representados como:

$$\mathcal{L} = \{x(t) : Lx(t) \leq \mathbf{1}_r\}, \quad (8)$$

em que $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $r > n$ e $\text{posto}(L) = n$.

Mais especificamente, considera-se o problema de controle SOF sob restrições que segue.

Problema 1. *Dado um sistema (1) sujeito às restrições (3a) e (3b), e considerando-se um conjunto de condições iniciais (4), encontrar uma lei de controle (5) e determinar um conjunto poliédrico positivamente invariante \mathcal{L} em (8), contrativo ao longo das trajetórias do sistema (7) e que satisfaça $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$, tais que as entradas de controle correspondentes sejam admissíveis, $u(t) \in \mathcal{U}$.*

3.1 Condições algébricas para invariância e inclusões

Com vistas à resolução deste problema, além da invariância positiva e contratividade do poliedro \mathcal{L} e das inclusões $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$ e $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$, será também imposta a inclusão $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{U}_y$, que garante a admissibilidade da lei de controle e, além disso, evita a saturação (ver, por exemplo, Tarbouriech et al. (2011)), em que:

$$\mathcal{U}_y = \{x(t) : ZKCx(t) \leq \mathbf{1}_{l_z}\} \quad (9)$$

é obtido a partir de (3b) e (5).

A seguir, apresenta-se de forma unificada (tempo contínuo e discreto) as condições algébricas necessárias e suficientes para a invariância positiva e contratividade de um conjunto poliédrico (veja, por exemplo, Castelan and Henet (1993); Henet (1995); Blanchini and Miani (2015)).

Teorema 1. *Um poliedro \mathcal{L} , (8), é um conjunto positivamente invariante do sistema (7), com fator de contratividade $\gamma_t \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\exists H \in \mathbb{R}^{r \times r}$, tal que:*

$$HL = L(A + BKC) \quad (10a)$$

$$H\mathbf{1}_r \leq \gamma_t \mathbf{1}_r \quad (10b)$$

em que:

i) se $t \in \mathbb{R}_+$, então $\gamma_t \equiv -\epsilon \in (-\infty, 0)$ e H é uma matriz de tipo Metzler (também dita Essencialmente Não-negativa), ou seja,

$$h_{ij} \geq 0, \forall i \neq j; \quad (11)$$

ii) se $t \in \mathbb{N}$, então $\gamma_t \equiv \lambda \in [0, 1)$ e H é uma matriz Não-negativa, ou seja,

$$h_{ij} \geq 0, \forall i \text{ e } j. \quad (12)$$

□

Observação 1. A igualdade (10a) pode ser interpretada como uma transformação de similaridade generalizada que relaciona os conjuntos espectrais de $(A+BKC)$ e H , dados por $\sigma(A+BKC) = \{\mu_i, i = 1 \dots n\}$ e $\sigma(H) = \{\xi_i, i = 1, \dots, r\}$. Assim, no caso tratado em que $\text{posto}(L) = n < r$, tem-se $\sigma(A+BKC) \subseteq \sigma(H)$. Além disso, a condição (10b) implica nas seguintes propriedades da matriz H que permitem concluir sobre a estabilidade dos autovalores de $(A+BKC)$:

i) se $t \in \mathbb{R}^+$, a matriz de tipo Metzler H é Hurwitz e os elementos do seu conjunto $\sigma(H)$ são tais que $\text{Re}(\xi_i) \leq \bar{\xi} \leq -\epsilon$, em que $\bar{\xi}$ é obrigatoriamente um autovalor real pertencente ao conjunto espectral $\sigma(H)$ (Castelan and Henet, 1993). Logo, no caso contínuo no tempo, $\text{Re}(\mu_i) \leq -\epsilon$;

ii) se $t \in \mathbb{N}$, a matriz Não-negativa H é Schur estável, e o seu conjunto espectral pertence ao círculo $|\xi_i| \leq \bar{\xi} < \lambda$, no interior do círculo unitário, em que $\bar{\xi}$ é

um autovalor real e positivo igual ao raio espectral da matriz H (Berman and Plemmons, 1994; Henet, 1995). Portanto, no caso discreto no tempo, $|\mu_i| \leq \lambda$.

A seguir, são apresentadas as condições algébricas necessárias e suficientes para a obtenção das inclusões entre os conjuntos poliédricos envolvidos no Problema 1, as quais podem ser obtidas pela aplicação de uma extensão do Lema de Farkas apresentada em Henet (1995):

• $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X} \iff \exists T \in \mathbb{R}^{l_g \times r}$ não-negativa, tal que:

$$TL = G, \quad (13a)$$

$$T\mathbf{1}_r \leq \mathbf{1}_{l_g} \quad (13b)$$

• $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{U}_y \iff \exists Q \in \mathbb{R}^{l_z \times r}$ não-negativa, tal que:

$$QL = ZKC \quad (14a)$$

$$Q\mathbf{1}_r \leq \mathbf{1}_{l_z}; \quad (14b)$$

• $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L} \iff \exists V \in \mathbb{R}^{r \times l_d}$ não-negativa, tal que:

$$VD = L, \quad (15a)$$

$$V\mathbf{1}_{l_d} \leq \mathbf{1}_r \quad (15b)$$

Além disso, é importante salientar que a matriz $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$, com $r > n$, tem posto coluna completo se, e somente se, admite uma pseudo-inversa (à esquerda) $U \in \mathbb{R}^{n \times r}$ de modo que:

$$UL = \mathbb{I}_n \quad (16)$$

Em consequência dos resultados anteriores, a proposição a seguir resume as soluções consideradas para o Problema 1.

Proposição 1. *O Problema 1 tem solução formada por uma matriz de ganhos SOF e um poliedro \mathcal{L} que garante a admissibilidade de $u(t)$ via a inclusão $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{U}_y$ se, e somente se, existem escalares $r > n$ e γ_t , e matrizes K , L , U , H , T , Q e V , que verificam as condições (10)-(16).*

3.2 Problema de otimização bilinear

A utilização da Proposição 1 na síntese de soluções para o Problema 1, carrega alguns produtos entre pares de matrizes que são variáveis de decisão, incluindo a matriz SOF K e a matriz L que define o conjunto \mathcal{L} . Mais especificamente, os produtos bilineares envolvem as matrizes: i) H e L no lado esquerdo da equação (10a), assim como L e K no seu lado direito; ii) Q e L em (14a); iii) T e L em (15a); e vi) U e L em (16). Entretanto, estes produtos bilineares podem ser considerados como restrições de projeto do programa de otimização proposto na sequência. Assim, técnicas de otimização não-linear apropriadas podem ser utilizadas para encontrar soluções para o Problema 1 (Brião et al., 2018; Brião, 2019).

Com vistas à formulação de um problema de otimização a partir da solução proposta anteriormente, serão considerados dois critérios relativos ao desempenho do sistema em malha-fechada (7):

a) *Velocidade de convergência (exponencial) da resposta do estados*, associada ao coeficiente γ_t , conforme itens i) e ii) em (10b) e na Observação 1;

b) *Esforço de controle*, associado à restrição em norma infinito:

$$\|KC\|_\infty \leq \phi, \phi \in \mathbb{R}_+. \quad (17)$$

Logo,

$$\|u(t)\|_\infty = \|KCx(t)\|_\infty \leq \phi \|x(t)\|_\infty.$$

Desse modo, define-se o problema de otimização bilinear seguinte, considerando que $r > n$, e os limitantes escalares $\underline{\gamma}_t$, $\bar{\gamma}_t$ e $\bar{\phi}$ são escolhidos *a priori*:

$$\begin{aligned} & \underset{\Gamma}{\text{minimizar}} && \Phi(\gamma_t, \phi) = \gamma_t + \alpha \phi \\ & \text{sujeito a} && (10) - (17) \\ & && 0 \leq \underline{\gamma}_t \leq \gamma_t \leq \bar{\gamma}_t, \\ & && 0 \leq \phi \leq \bar{\phi}, \\ & && f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell, \end{aligned} \quad (18)$$

com $\Gamma = (K, L, U, H, T, Q, V, \gamma_t, \phi)$ e $\ell = 1, \dots, \bar{\ell}$.

Pela escolha de α , a função objetivo linear $\Phi(\gamma_t, \phi)$ permite ponderar a velocidade de convergência das trajetórias, representada pelo coeficiente de contratividade γ_t , e o esforço de controle, representado por ϕ . Logo, a escolha de diferentes valores para o parâmetro α permite ao projetista testar e comparar diferentes soluções com desempenhos temporais distintos. Já as restrições adicionais, representadas por $f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell$, podem ser impostas às variáveis de decisão para diferentes fins, incluindo os numéricos discutidos em (Brião et al., 2018) e (Brião, 2019).

É interessante lembrar que:

- i) no caso contínuo no tempo, $\gamma_t \equiv -\epsilon$, com $\epsilon \in [\underline{\epsilon}, \bar{\epsilon}]$, em que $\underline{\epsilon} > 0$ é um valor suficientemente pequeno para garantir a convergência das trajetórias para a origem, e o limitante $\bar{\epsilon} < \infty$. Logo, a minimização de do termo γ_t corresponde à maximização da velocidade de convergência representada pela abscissa espectral $-\epsilon$.
- ii) no caso discreto no tempo, $\gamma_t \equiv \lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$, em que pode-se considerar $\underline{\lambda} = 0$, e deve-se escolher $\bar{\lambda} < 1$. Neste caso, a minimização do termo γ_t corresponde à minimização do coeficiente de contratividade λ .

Diferentes técnicas de otimização não-linear podem ser consideradas para resolver o problema (18) como, por exemplo, os descritos em Kennedy and Eberhart (1995); Conn et al. (2009). Neste trabalho, os resultados foram gerados pelo solver KNITRO (Byrd et al., 2006), pois a otimização é simultânea e escolhe o algoritmo com a máxima eficiência e robustez para problemas bilineares como o problema (18). Ainda, nota-se que o KNITRO não garante encontrar soluções ótimas globais, no entanto, mínimos locais são encontrados, com convergência garantida.

Ademais, o problema de otimização não-linear (18), cujas restrições são formuladas por matrizes e vetores, pode ser reescrito no formato elemento a elemento, sendo mais adequado para a linguagem AMPL empregada pelo KNITRO. Portanto, essa reformulação se encaixa bem na abordagem da otimização bilinear e para fins de projeto de controle (Brião et al., 2018). Por fim, considera-se $\nu \in \{1, \dots, r\}$ e $\iota \in \{1, \dots, p_a\}$ as restrições $f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell$ estabelecidas, para determinar os limites inferior e superior aos elementos de K , L e U :

$$\underline{k} \leq k_{s\nu} \leq \bar{k}, \quad \underline{l} \leq l_{ij} \leq \bar{l} \quad \text{e} \quad \underline{u} \leq u_{j\nu} \leq \bar{u},$$

onde \underline{k} , \bar{k} , \underline{l} , \bar{l} , \underline{u} , $\bar{u} \in \mathbb{R}$. A imposição desses limites é uma estratégia importante em programação matemática para tratar problemas não lineares ou não convexos, para reduzir o espaço de busca de variáveis de decisão que não são originalmente limitadas.

4. REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDAS

O sistema em malha-fechada devido à realimentação do sistema (1) com a lei de controle DOF (6), pode ser reformulado como um sistema aumentado de ordem $n_a = n + n_c$ realimentado por uma lei de controle de tipo SOF aumentada, sendo esta formada pelas matrizes do controlador dinâmico. De forma clássica, considera-se variáveis fictícias de controle e saída, tais que $\tilde{u}(t) = p[x_c(t)]$ e $\tilde{y}(t) = x_c(t)$, respectivamente, e define-se os vetores aumentados seguintes:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_a}, \quad x_a(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_a}, \\ u_a(t) &= \begin{bmatrix} u(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_a}, \quad y_a(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \tilde{y}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p_a}, \end{aligned}$$

em que $m_a = m + n_c$ e $p_a = p + n_c$. Dessa forma, tem-se o sistema aumentado *a controlar*:

$$p_a[x_a(t)] = \mathbb{A}x_a(t) + \mathbb{B}u_a(t) \quad (19a)$$

$$y_a(t) = \mathbb{C}x_a(t), \quad (19b)$$

em que $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_c} \end{bmatrix}$, $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_c} \end{bmatrix}$,

e a lei de controle SOF aumentada:

$$u_a(t) = \mathbb{K}y_a(t), \quad \text{com } \mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Obtém-se, então, o sistema aumentado em malha-fechada, representado na forma:

$$p_a[x(t)] = (\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbb{K}\mathbb{C})x_a(t) \quad (21)$$

Além disso, visando adaptar a abordagem de projeto apresentada na seção anterior ao projeto DOF sob restrições, considera-se o conjunto $\mathcal{X}_a \subseteq \mathbb{R}^{n_a}$ formado a partir das restrições originais sobre os estados do sistema, além de adaptar-se a restrição sobre o vetor de controle e o conjunto de condições iniciais à representação aumentada, como segue:

$$\mathcal{X}_a = \{x_a(t) : \mathbb{G}x_a(t) \leq \mathbf{1}_{l_G}\}, \quad \text{com } \mathbb{G} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathcal{U}_a = \{u_a(t) : \mathbb{Z}u_a(t) \leq \mathbf{1}_{l_Z}\}, \quad \text{com } \tilde{Z} = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & \tilde{Z} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathcal{D}_a = \{x_a(0) : \mathbb{D}x_a(0) \leq \mathbf{1}_{l_D}\}, \quad \text{com } \mathbb{D} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \tilde{D} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

nas quais $\tilde{G} \in \mathbb{R}^{l_{\tilde{g}} \times n_c}$, $\tilde{Z} \in \mathbb{R}^{l_{\tilde{z}} \times n_c}$ e $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{l_{\tilde{d}} \times n_c}$ são matrizes auxiliares escolhidas pelo projetista, e $l_G = l_g + l_{\tilde{g}}$, $l_Z = l_z + l_{\tilde{z}}$ e $l_D = l_d + l_{\tilde{d}}$. Em particular, \tilde{G} é utilizada para impor limites à variável de estado do controlador, \tilde{Z} pode ser escolhida como uma matriz nula, e \tilde{D} pode ter valores suficientemente grandes de tal forma que as condições iniciais dos estados do controlador sejam consideradas praticamente nulas, ou seja, $x_c(0) \rightarrow 0$.

Ainda, para redefinir o problema de controle sob restrições associado ao caso DOF e obter soluções apropriadas para

esse problema, considera-se um conjunto poliédrico $\mathcal{L}_a \in \mathbb{R}^{n_a}$, tal que:

$$\mathcal{L}_a = \{x_a(t) : \mathbb{L}x_a(t) \leq \mathbf{1}_r\}, \quad (25)$$

em que $\mathbb{L} \in \mathbb{R}^{r \times n_a}$, $r > n_a$ e $\text{posto}(\mathbb{L}) = n_a$.

Pode-se, então, definir o problema a seguir, adaptado a partir do Problema 1, que visa o cálculo de um controlador DOF em (6) que garanta o respeito das restrições (3a) e (3b) a partir das condições iniciais admissíveis de interesse em (4).

Problema 2. *Dado um sistema (19) sujeito às restrições (22) e (23), e considerando-se um conjunto de condições iniciais (24), encontrar uma lei de controle SOF aumentada (20) e determinar um conjunto positivamente invariante \mathcal{L}_a , (25), contrativo ao longo das trajetórias do sistema (21) e que satisfaça $\mathcal{D}_a \subseteq \mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{X}_a$, tais que as entradas de controle correspondentes sejam admissíveis, ou seja, $u(t) \in \mathcal{U}_a$.*

Neste caso DOF, o conjunto que garante a admissibilidade da ação de controle, $\mathcal{U}_a \in \mathbb{R}^{n_a}$ é definido a partir de (19a), (19b) e (20) como:

$$\mathcal{U}_a^y = \{x_a(t) : [I_m \ 0]Z\mathbb{K}\mathbb{C} \leq \mathbf{1}_m\} \quad (26)$$

4.1 Condições algébricas e problema de otimização bilinear

Em função da reformulação anterior, a Proposição 1 pode ser utilizada para solucionar o Problema 2 ao utilizar-se as seguintes substituições:

$$A \leftarrow \mathbb{A}, B \leftarrow \mathbb{B}, C \leftarrow \mathbb{C}, G \leftarrow \mathbb{G}, Z \leftarrow \mathbb{Z},$$

$$D \leftarrow \mathbb{D}, K \leftarrow \mathbb{K}, L \leftarrow \mathbb{L} \text{ e } U \leftarrow \mathbb{U}.$$

Proposição 2. *O Problema 2 tem solução formada por um controlador DOF em (6) e um poliedro $\mathcal{L}_a \in \mathbb{R}^{n_a}$ que garante a admissibilidade de $u(t)$ via a inclusão $\mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{U}_a^y$ se, e somente se, existem escalares $r > n_a$, γ_t , matrizes \mathbb{K} , \mathbb{L} tais que as condições (27)-(31) seguintes são verificadas:*

- Invariância positiva e contratividade de $\mathcal{L}_a \Leftrightarrow \exists \mathbb{H} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ não-negativa ou essencialmente não-negativa :

$$\mathbb{H}\mathbb{L} = \mathbb{L}(\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbb{K}\mathbb{C}) \quad (27a)$$

$$\mathbb{H}\mathbf{1}_r \leq \gamma_t \mathbf{1}_r, \quad (27b)$$

- $\mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{X}_a \Leftrightarrow \exists \mathbb{T} \in \mathbb{R}^{l_G \times r}$ não-negativa:

$$\mathbb{T}\mathbb{L} = \mathbb{G}, \quad (28a)$$

$$\mathbb{T}\mathbf{1}_r \leq \mathbf{1}_{l_G} \quad (28b)$$

- $\mathcal{L}_a \in \mathcal{U}_y^a \Leftrightarrow \exists \mathbb{Q} \in \mathbb{R}^{l_Z \times r}$ não-negativa:

$$\mathbb{Q}\mathbb{L} = \mathbb{Z}\mathbb{K}\mathbb{C} \quad (29a)$$

$$\mathbb{Q}\mathbf{1}_r \leq \mathbf{1}_{l_Z}; \quad (29b)$$

- $\mathcal{D}_a \subseteq \mathcal{L}_a \Leftrightarrow \exists \mathbb{V} \in \mathbb{R}^{r \times l_D}$ não-negativa:

$$\mathbb{V}\mathbb{D} = \mathbb{L}, \quad (30a)$$

$$\mathbb{V}\mathbf{1}_{l_D} \leq \mathbf{1}_r \quad (30b)$$

- $\text{Posto}(\mathbb{L}) = r > n_a \Leftrightarrow \exists \mathbb{U} \in \mathbb{R}^{n_a \times r}$:

$$\mathbb{U}\mathbb{L} = \mathbb{I}_{n_a} \quad (31)$$

□

De forma similar ao caso SOF, será definido agora o problema de otimização bilinear referente ao sistema aumentado (21). Note que além do esforço de controle, para

efeito de obtenção de resultados numéricos melhor condicionados, também se leva em conta o vetor de estado do controlador através da expressão:

$$\|\mathbb{K}\mathbb{C}\|_\infty \leq \phi, \quad \phi \in \mathbb{R}_+ \quad (32)$$

Logo, o problema de otimização bilinear a seguir, considerando que $r > n_a$, e os limitantes escalares $\underline{\gamma}_t$, $\bar{\gamma}_t$ e $\bar{\phi}$ são escolhidos *a priori*:

$$\begin{aligned} & \underset{\Gamma}{\text{minimizar}} && \Phi(\gamma_t, \phi) = \gamma_t + \alpha\phi \\ & \text{sujeito a} && (27) - (32) \\ & && 0 \leq \underline{\gamma}_t \leq \gamma_t \leq \bar{\gamma}_t, \\ & && 0 \leq \phi \leq \bar{\phi}, \\ & && f_\ell(\cdot) \leq \varphi_\ell, \end{aligned} \quad (33)$$

com $\Gamma = (\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{U}, \mathbb{H}, \mathbb{T}, \mathbb{Q}, \mathbb{V}, \gamma_t, \phi)$ e $\ell = 1, \dots, \bar{\ell}$.

Como anteriormente, no problema (33) pode-se ponderar através de α a velocidade de convergência das trajetórias, associada ao coeficiente de contratividade γ_t , e o esforço de controle associado a ϕ . Além disso, com as substituições devidas, o programa computacional que implementa o problema de otimização (18) pode ser adaptado e utilizado para implementar (33).

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nos exemplos numéricos mostrados nesta seção, os seguintes limites inferior e superior foram atribuídos aos elementos de \mathbb{L} , \mathbb{U} e \mathbb{K} : $\underline{l} = \underline{u} = -1000$, $\bar{l} = \bar{u} = 1000$, $\underline{k} = -10$ e $\bar{k} = 10$. Além disso, a partir das desigualdades que envolvem as matrizes não-negativas ou essencialmente não-negativas \mathbb{H} , seus elementos são superiores limitados por $\bar{h} = 1$. Ainda, os escalares não-negativos γ_t e ϕ são delimitados por $\bar{\lambda} = 0,99999$, $\bar{\epsilon} = 100$ e $\bar{\phi} = 10$. Os resultados numéricos são obtidos usando o solver KNITRO (Byrd et al., 2006).

5.1 Exemplo 1: Sistema em tempo discreto

Considere o sistema (1) discreto no tempo, adaptado de Gupta and Falcone (2019), representado pelas seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0],$$

cujas restrições não-simétricas sobre os estados, \mathcal{X} , e o controle, \mathcal{U} , são definidas a partir das matrizes:

$$G = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \quad \text{e} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,25 \end{bmatrix}.$$

O conjunto de condições iniciais admissíveis de interesse, \mathcal{D} , é definido como um polígono hexagonal, com:

$$D = \begin{bmatrix} 1,5 & 1,5 & -1,5 & -1,5 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

A- Projeto por Realimentação Estática de Saídas: Os resultados obtidos a partir do problema de otimização (18) para diferentes opções do parâmetro de otimização α espaçados de 0,1 no intervalo $[0, 1]$, considerando $\bar{\lambda} = 0,9999$ e $r = 3n = 6$, estão resumidos na Tabela 1. Neste exemplo, os valores numéricos para $\alpha \in [0, 3, 0, 8]$ foram iguais aos valores obtidos para $\alpha = 0, 2$.

α	λ	ϕ	K	$\sigma(A + BKC)$
0	0,8571	7,5072	[-0,5714]	$\{0, 4286 \pm 0, 4949i\}$
0,1	0,8571	0,5714	[-0,5714]	$\{0, 4286 \pm 0, 4949i\}$
0,2	0,8660	0,5000	[-0,5000]	$\{0, 5000 \pm 0, 5000i\}$
0,4	0,8660	0,5000	[-0,5000]	$\{0, 5000 \pm 0, 5000i\}$
0,9	0,9580	0,3880	[-0,3880]	$\{0, 6119 \pm 0, 4873i\}$
1	0,9999	0,3450	[-0,3450]	$\{0, 6550 \pm 0, 4754i\}$

Tabela 1. Projetos SOF com $r = 6$

Visando mostrar a eficiência da função objetivo $\Phi(\lambda, \phi)$ escolhida no problema de otimização, pode-se observar que com o aumento do fator de ponderação α : *i*) o valor do coeficiente de contratividade aumenta, o que implica no aumento de magnitude dos autovalores de $(A + BKC)$ e, conseqüente, diminuição da velocidade de convergência das trajetórias; e *ii*) tem-se valores menores dos coeficientes ϕ e, portanto, da magnitude do ganho proporcional K .

Na Figura 1, pode-se visualizar e comparar graficamente as soluções obtidas para $\alpha = 0, 1$ e $\alpha = 0, 9$ em termos do conjunto invariante \mathcal{L} e das trajetórias de estado partindo de um dos vértices do conjunto D . Nota-se que, em ambos os casos, as trajetórias evoluem no interior de \mathcal{L} , mas tendem para a origem diferentemente, refletindo os coeficientes de contratividade distintos obtidos nos dois casos. As matrizes L obtidas para $\alpha = 0, 1$ e $\alpha = 0, 9$ são:

$$L_{0,1} = \begin{bmatrix} 0,7499 & -1,1666 \\ 1,0404 & -0,2290 \\ 0,0079 & 1,0235 \\ 0,1666 & -1,1666 \\ -0,6990 & 1,2262 \\ -1,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} \quad e \quad L_{0,9} = \begin{bmatrix} 0,3682 & -1,3333 \\ 0,2577 & 0,9372 \\ -1,0000 & 0,0000 \\ -0,2336 & -1,0437 \\ -0,4795 & 1,3333 \\ 1,0632 & -0,4549 \end{bmatrix}$$

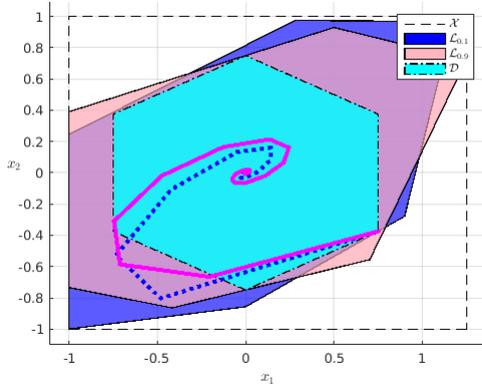


Figura 1. Projeto SOF para $\alpha = 0, 1$ e $\alpha = 0, 9$

As ações de controle correspondentes às trajetórias citadas são mostradas na Figura 2, na qual se verifica que um menor coeficiente de contratividade foi obtido em detrimento de uma ação de controle com amplitude mais importante nas amostras iniciais. A energia correspondente aos dois sinais de controle, cujo valor é aproximado por $\|u(t)\|_{\ell_2} \approx \sum_{t=0}^{25} u(t)^2$, é: $\|u_{0,1}\|_{\ell_2} = 0,3516$ e $\|u_{0,9}\|_{\ell_2} = 0,3197$.

B- Projeto por Realimentação Dinâmica de Saídas: Os projetos de controladores dinâmicos por DOF de ordem reduzida, $n_c = 1$, são reformulados como um sistema aumentado de ordem $n_a = 3$. Para tanto, o sistema (21) é representado pelas seguintes matrizes aumentadas:

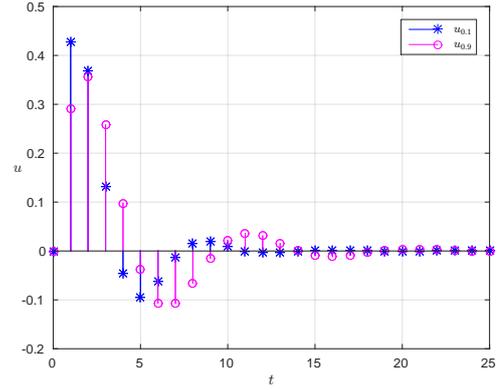


Figura 2. Ação de controle para $\alpha = 0, 1$ e $\alpha = 0, 9$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Atribuindo-se $\tilde{G} = [1 \ -1]^T$, ou seja, $|x_c(t)| \leq 1$ e $\tilde{Z} = 0$, as restrições de estado e controle nos espaços aumentados são definidas por:

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \quad e \quad \mathbb{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1,25 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainda, para aproximar o conjunto de formato hexagonal, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$, no espaço aumentado, considerou-se $\tilde{D} = [d \ -d]$, com $d = 10^4$, obtendo-se:

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} 1,5 & 1,5 & -1,5 & -1,5 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3d & -3d \end{bmatrix}^T.$$

Os resultados obtidos a partir de (33) estão resumidos na Tabela 2, seguindo os mesmos parâmetros de otimização α anteriores, e para $r = 3n_a = 9$. É interessante observar que, comparativamente ao projeto SOF anterior, a utilização do controlador DOF permitiu obter coeficientes de contratividade menores (portanto, autovalores com magnitudes também menores) quando se pondera menos o esforço de controle ($\alpha = 0; 0, 1$ e $0, 2$). Por outro lado, para os valores de $\alpha = 0, 9$ e 1 , foram obtidos valores menores para o limitante ϕ da ação de controle. Na Figura 3 pode-

α	λ	ϕ	$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}$	$\sigma(\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbb{K}\mathbb{C})$
0	0,8027	9,4471	$\begin{bmatrix} -0,570 & -0,141 \\ -0,428 & 0,047 \end{bmatrix}$	$\{0, 498 \pm 0, 437i, -0,091\}$
0,1	0,8028	0,7018	$\begin{bmatrix} -0,570 & -0,131 \\ -0,459 & -0,241 \end{bmatrix}$	$\{0, 489 \pm 0, 463i, -0,361\}$
0,2	0,8121	0,6454	$\begin{bmatrix} -0,560 & 0,085 \\ 0,622 & -0,022 \end{bmatrix}$	$\{0, 498 \pm 0, 452i, -0,139\}$
0,4	0,8660	0,5000	$\begin{bmatrix} -0,500 & -0,000 \\ -0,028 & -0,044 \end{bmatrix}$	$\{0, 500 \pm 0, 500i, -0,044\}$
0,9	0,9999	0,3333	$\begin{bmatrix} -0,333 & 0,000 \\ 0,012 & -0,036 \end{bmatrix}$	$\{0, 666 \pm 0, 471i, -0,036\}$
1	0,9999	0,3333	$\begin{bmatrix} -0,333 & 0,000 \\ 0,007 & -0,099 \end{bmatrix}$	$\{0, 666 \pm 0, 471i, -0,099\}$

Tabela 2. Projetos DOF com $r = 9$

se visualizar graficamente a solução obtida para $\alpha = 0, 2$, cujo conjunto $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^3$ é determinado pela matriz:

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} -1,0000 & 1,1245 & 0,1751 & 1,1219 & \dots \\ 0,0000 & -0,4057 & -1,2455 & -0,4223 & \dots \\ 0,0000 & 0,0083 & 0,3277 & 1,7494 & \dots \\ -0,8872 & -0,6666 & -1,0775 & 0,6666 & -0,2627 \\ 0,8907 & 1,3333 & 0,5109 & -1,3333 & 1,3332 \\ 0,8221 & -0,0089 & -2,0166 & 0,0480 & -0,4098 \end{bmatrix}^T$$

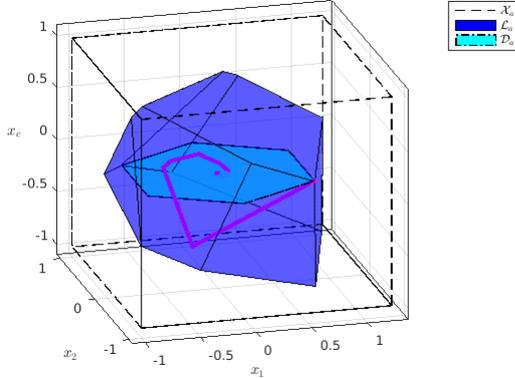


Figura 3. Projeto DOF para $\alpha = 0, 1$

Observa-se, em particular, que a trajetória dos estados evolui agora no espaço de estados aumentado, muito embora tenha iniciado no interior do conjunto \mathcal{D} definido originariamente no espaço de estados do sistema a controlar. Na Figura 4, apresenta-se ação de controle $u(t)$ associada à trajetória traçada na Figura 3, bem como a evolução do estado do controlador dinâmico, $x_c(t)$. A energia deste sinal de controle associado ao coeficiente de contratividade $\lambda_{DOF} = 0,8121$, é aproximada por $\|u(t)\|_{\ell_2} \approx \sum_{t=0}^{25} u(t)^2 = 0,7568$, a qual é mais significativa do que o valor $\|u_{0,1}\|_{\ell_2} = 0,3516$ obtido no caso SOF, com $\lambda_{SOF} = 0,8571$.

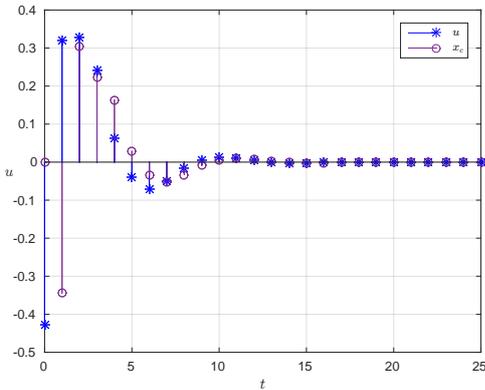


Figura 4. Ação de controle e estado do controlador para $\alpha = 0, 1$

5.2 Exemplo 2: Sistema em tempo contínuo

Considera-se o sistema contínuo no tempo (1), definido pelas seguintes matrizes adaptadas de Blanchini and Miani (2015):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

para o qual $Z = [0, 125 \ -0, 125]^T$ determina as restrições simétricas de controle \mathcal{U} , e as de estados, \mathcal{X} , são definidas pela matriz:

$$G = \begin{bmatrix} 0,3333 & 0 & -0,3333 & -0,3333 & 0 & 0,3333 \\ 0,25 & 0,25 & -0,0833 & -0,25 & -0,25 & 0,0833 \end{bmatrix}^T.$$

O conjunto de condições iniciais admissíveis de interesse, \mathcal{D} , é definido como um polígono retangular, com:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

A lei de controle considerada neste caso é do tipo realimentação estática de estados, $u(t) = Kx(t)$, com $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$. Os resultados obtidos a partir de (18) são expostos na Tabela 3, com parâmetros de otimização espaçados de 0,1 no intervalo $[0, 0, 4]$, $-\epsilon = (-100, -0,00001)$ e $r = 6$. Também pode-se observar o compromisso devido a escolha do fator α , entre a velocidade de convergência das trajetórias para a origem através do coeficiente ϵ , e da ação de controle através de ϕ . Ademais, neste exemplo em tempo contínuo, obtém-se um dos autovalores igual, ou bem próximo, à abscissa espectral $-\epsilon$.

α	ϵ	ϕ	K	$\sigma(A+BKC)$
0	1,4127	9,3986	[-3,8571 -4,1429]	{-1,4127, -2,7302}
0,1	1,3273	7,1061	[-3,2958 -3,8104]	{-1,3273, -2,4831}
0,2	0,9999	4,3333	[-1,6667 -2,6667]	{-1,0000, -1,6667}
0,3	0,2368	1,2287	[-0,1900 -1,0388]	{-0,2369, -0,8019}
0,4	0,0001	0,5002	[-0,0001 -0,5002]	{-0,0001, -0,5001}

Tabela 3. Projetos de $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ com $r = 6$

Nas Figuras 5 e 6, pode-se comparar graficamente as soluções obtidas para três valores de α , em termos do conjunto invariante \mathcal{L} e das trajetórias de estado partindo de um dos vértices do conjunto \mathcal{D} . Nestas figuras, tem-se: $\alpha = 0, 1$ com trajetórias pontilhadas (\cdots); $\alpha = 0, 2$ com trajetórias contínuas ($-$); e $\alpha = 0, 3$ com trajetórias tracejadas ($- -$). Na Figura 5, observe nos três casos que as trajetórias evoluem no interior de \mathcal{L} correspondente, porém convergem para a origem de formas distintas, com base nos coeficientes de contratividade associados.

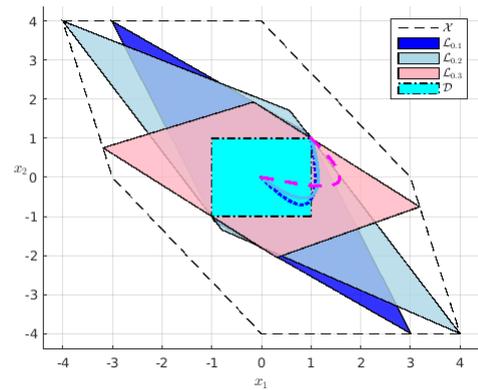


Figura 5. Projeto StF para $\alpha = 0, 1, 0, 2$ e $0, 3$

As matrizes L obtidas para $\alpha = 0, 1, 0, 2$ e $0, 3$ são:

$$L_{0,1} = \begin{bmatrix} -0,7128 & -0,2871 \\ 0,0156 & 0,0333 \\ -0,4014 & -0,5524 \\ -0,0520 & 0,0002 \\ 0,4010 & 0,5521 \\ 0,7128 & 0,2871 \end{bmatrix}, \quad L_{0,2} = \begin{bmatrix} 0,2508 & 0,5008 \\ -0,4346 & -0,2339 \\ -0,6249 & -0,3750 \\ 0,6249 & 0,3750 \\ -0,3103 & -0,5603 \\ -0,1749 & 0,0146 \end{bmatrix},$$

$$L_{0,3} = \begin{bmatrix} -0,1181 & -0,0033 \\ 0,2055 & -0,4559 \\ 0,4450 & 0,5549 \\ -0,1944 & 0,5027 \\ -0,4450 & -0,5549 \\ -0,3210 & -0,1352 \end{bmatrix}.$$

A energia correspondente aos sinais de controle, cujo valor é aproximado por $\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2} \approx \int_{t=0}^{10} u(t)^2 dt$, é: $\|u_{0,1}\|_{\mathcal{L}_2} = 223,5862$, $\|u_{0,2}\|_{\mathcal{L}_2} = 91,0360$ e $\|u_{0,3}\|_{\mathcal{L}_2} = 7,8576$.

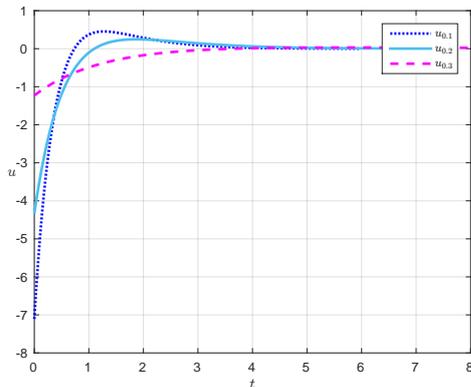


Figura 6. Ação de controle para $\alpha = 0, 1, 0, 2$ e $0, 3$

6. CONCLUSÃO

Uma abordagem baseada em programação bilinear foi proposta para a síntese de leis de controle por realimentação de saídas, com o intuito de determinar um conjunto poliédrico positivamente invariante que garanta a estabilidade assintótica local das trajetórias partindo de um dado conjunto de condições iniciais, respeitando as restrições impostas sobre as variáveis de estado e controle. Através da escolha do parâmetro de projeto α , a função objetivo considerada permite ponderar como critérios de desempenho a velocidade de convergência das trajetórias e o esforço de controle. As soluções ótimas locais foram obtidas de forma eficiente pelo *solver* KNITRO. A proposta possui capacidade de lidar com os três controladores clássicos fundamentais e, em especial, de tratar restrições não simétricas e de considerar compensadores de ordem reduzida, o que não é um recurso frequentemente encontrado em outras abordagens como as baseadas em LMIs (Tarbouriech et al., 2011). Assim, pode-se adaptar tal abordagem para considerar outros objetivos de controle ou estruturas de controle específicas, como PI¹ ou PID².

REFERÊNCIAS

- Berman, A. and Plemmons, R.J. (1994). *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, volume 9. SIAM.
- Blanchini, F. (1999). Set invariance in control. *Automatica*, 35(11), 1747–1767. doi:10.1016/S0005-1098(99)00113-2.
- Blanchini, F. and Miani, S. (2015). *Set-theoretic methods in control*. Birkhäuser Basel, Boston, MA, 2nd edition.

- Brião, S.L., Pedrosa, M.V., Castelan, E.B., Camponogara, E., and de Assis, L.S. (2018). Explicit computation of stabilizing feedback control gains using polyhedral lyapunov functions. In *2018 IEEE International Conference on Automation/XXIII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA)*, 1–6. IEEE.
- Brião, S.L. (2019). *Estabilização de Sistemas Lineares com Cálculo Explícito dos Ganhos de Realimentação via Conjuntos Invariantes Poliédricos*. Ph.D. thesis, PPGEAS/UFSC.
- Byrd, R.H., Nocedal, J., and Waltz, R.A. (2006). Knitro: An integrated package for nonlinear optimization. In G. Di Pillo and M. Roma (eds.), *Large-Scale Nonlinear Optimization*. Springer, Boston.
- Castelan, E.B. and Hennet, J.C. (1993). On invariant polyhedra of continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 38(11), 1680–1685.
- Conn, A.R., Scheinberg, K., and Vicente, L.N. (2009). *Introduction to derivative-free optimization*, volume 8. Siam.
- Dantas, A.D., Dantas, A.F., and Dórea, C.E.T. (2018). Static output feedback control design for constrained linear discrete-time systems using data cluster analysis. *IET Control Theory & Applications*, 12(18), 2541–2550.
- Dórea, C.E.T. (2009). Output-feedback controlled-invariant polyhedra for constrained linear systems. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, 5317–5322. doi:10.1109/CDC.2009.5399594.
- Dórea, C.E.T., Castelan, E.B., and Ernesto, J.G. (2020). Robust positive invariant polyhedral sets and constrained control using fuzzy t-s models: a bilinear optimization design strategy. *IFAC*.
- Gupta, A. and Falcone, P. (2019). Full-complexity characterization of control-invariant domains for systems with uncertain parameter dependence. *IEEE Control Systems Letters*, 3(1), 19–24. doi:10.1109/LCSYS.2018.2849714.
- Hennet, J.C. (1995). Discrete time constrained linear systems. *Control and Dynamic Systems*, 71, 157–214.
- Kennedy, J. and Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. In *Proceedings of ICNN'95-International Conference on Neural Networks*, volume 4, 1942–1948. IEEE.
- Milani, B.E.A., Castelan, E.B., and Tarbouriech, S. (1996). Linear regulator design for bounded uncertain discrete-time systems with additive disturbances. *IFAC Proceedings Volumes*, 29(1), 3192 – 3197. doi:https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)58167-7.
- Milani, B.E.A. and Dórea, C.E.T. (1996). On invariant polyhedra of continuous-time systems subject to additive disturbances. *Automatica*, 32(5), 785 – 789. doi: https://doi.org/10.1016/0005-1098(96)00002-7.
- Santos, M.M.D., Castelan, E.B., and Hennet, J.C. (1997). A linear programming approach for regional pole placement under pointwise constraints. *IFAC Proceedings Volumes*, 30(16), 297–302.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., da Silva Jr, J.M.G., and Queinnec, I. (2011). *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science.

¹ Proporcional Integral

² Proporcional Integral Derivativo