

Controle Granular Fuzzy Evolutivo para Sistemas MIMO Não Lineares^{*}

Marcela O. Coelho^{*} Lucas Oliveira^{*} Valter J. S. Leite^{*}
Fernando Gomide^{**}

^{*} *Departamento de Engenharia Mecatrônica, CEFET-MG, Divinópolis, Minas Gerais, Brasil, (e-mail: mocoelho98@gmail.com, lqsoliveira@cefetmg.br, valter@ieee.org).*

^{**} *Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Campinas, São Paulo, Brasil (e-mail: gomide@dca.fee.unicamp.br)*

Abstract: Input-to-output feedback linearization is a nonlinear control technique that allows canceling the nonlinearities and obtaining a canonical linear system as a chain of integrators. However, the mismatch between model and system, for instance, due to parameter uncertainties or neglected dynamics, may deteriorate such an objective, which can compromise the closed-loop performance. This work presents a new approach to robustify the multiple inputs and multiple outputs feedback linearization method, allowing the use of uncertain nonlinear models. The proposed control scheme uses the evolving participatory learning algorithm to estimate online the model uncertainties and to mitigate their effects on the closed-loop. Simulations were run in a two-link planar robotic system to demonstrate and evaluate the performance of the proposed control method. The controller performance was by means of classical control indexes, and the results suggest that the proposed controller promotes a significant improvement in the performance of feedback linearization approach.

Resumo: A linearização por realimentação entrada-saída é uma técnica de controle não linear que permite cancelar as não linearidades do sistema e obter um sistema linear canônico por cadeia de integradores. No entanto, divergências de modelagem, como por exemplo, incertezas de parâmetros e dinâmicas negligenciadas podem deteriorar esse objetivo e comprometer o desempenho da malha de controle. Neste trabalho é proposta uma nova abordagem de robustificação para a linearização por realimentação de sistemas não lineares com múltiplas entradas e múltiplas saídas, permitindo o uso da técnica em sistemas incertos. A topologia de controle proposta faz uso do algoritmo evolutivo de aprendizado participativo para estimação *online* das incertezas e conseqüentemente mitigar seus efeitos na malha de controle. Simulações foram realizadas para um sistema robótico planar de dois links, com o objetivo de demonstrar e avaliar o controlador proposto. O desempenho da malha de controle foi quantificado com auxílio dos principais índices de desempenho e os resultados sugerem que o controlador proposto proporcionou uma significativa melhora no desempenho do sistema comparado à linearização por realimentação exata.

Keywords: Granular control; evolving systems; feedback linearization; robust control.

Palavras-chaves: Controle granular; sistemas evolutivos; linearização por realimentação; controle robusto.

1. INTRODUÇÃO

A linearização por realimentação (LR) é uma técnica de controle não linear que possibilita o cancelamento das não linearidades de um modelo por meio de uma lei de controle não linear. Como resultado, tem-se um sistema linearizado, descrito em uma forma canônica como uma cadeia de integradores (Sastrey, 1999). Outras abordagens na mesma linha incluem a utilização de uma representação em função do ponto de equilíbrio do modelo (Franco et al., 2006). Técnicas de linearização por realimentação

podem ser aplicadas tanto em sistemas com uma entrada e uma saída (SISO, do inglês *single-input single-output*) quanto a sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *multi-input multi-output*). Dentre os diversos sistemas MIMO que podem ser linearizados via realimentação destacam-se os processos químicos e petroquímicos que usam tanques acoplados (Zerar et al., 2004), sistemas robóticos (de Jesús Rubio, 2018), sistemas de energia trifásica (Bao et al., 2013), veículo aéreo não tripulado (Hu et al., 2018), climatização de estufas (Kalat, 2019) e outros. Apesar de promissora, a linearização por realimentação apresenta uma grande limitação quanto à sua aplicação em sistemas incertos. Na prática, quando o processo difere do modelo utilizado para representá-lo, a lei de controle linearizante obtida não promove o

^{*} Este trabalho contou com apoio financeiro do CEFET-MG, através do projeto BIC 10656/2018, e do CNPq, projetos 311208/2019 – 3 e 305906/2014 – 3.

cancelamento exato das não linearidades, levando a malha fechada a operar com baixo desempenho ou mesmo de forma instável (Aldhaferi and Khalil, 1996; Soares et al., 2011; Franco et al., 2016).

Essa fragilidade dos métodos de linearização tem sido objeto de estudo de vários trabalhos, buscando agregar robustez aos projetos de controle baseados na linearização por realimentação. A contribuição principal deste trabalho consiste em desenvolver um método baseado no uso do controle granular fuzzy para dar robustez às malhas de controle MIMO, incertas e linearizadas por realimentação. Várias tentativas nessa mesma direção podem ser localizadas na literatura: Chen and Chang (2009) propõem o uso de um algoritmo genético no processo de identificação dos parâmetros que compõem o sistema MIMO, levando à obtenção de um modelo no qual é aplicada a linearização por realimentação. O modelo resultante consiste numa linearização do sistema com incerteza variável no tempo. Essa incerteza é tratada via controle por modos deslizantes. Já em (Karimi and Motlagh, 2006), é desenvolvida uma linearização por realimentação robusta baseada na função de Lyapunov, capaz de lidar com incertezas do modelo do sistema MIMO não linearizável por realimentação. Shi and Li (2018) utilizam limites de desempenho prescritos para projetar um controlador fuzzy adaptativo equipado com a função de ganho do tipo Nussbaum para sistemas não-lineares incertos MIMO com direção de controle desconhecida. Em (Soares et al., 2011) os autores utilizam uma lei de controle linear robusta que assegura a estabilização da malha fechada na presença de erros de modelagem. A abordagem, no entanto, requer um esforço bastante elevado para determinação da faixa das incertezas em todos os parâmetros do sistema resultante da linearização. Em (Oliveira et al., 2019), é apresentada uma linearização por realimentação robusta que utiliza um algoritmo de aprendizagem participativa para estimar as incertezas de modelagem e mitigar seus efeitos na malha fechada de controle. Porém, a técnica proposta restringe-se ao caso SISO.

Neste trabalho é proposta uma extensão da abordagem apresentada em (Oliveira et al., 2019), de forma a permitir malhas MIMO robustas com incertezas de parâmetros ou dinâmicas negligenciadas. O controlador proposto baseia-se no controle granular fuzzy evolutivo e faz uso do algoritmo evolutivo de aprendizagem participativa no procedimento de estimação das incertezas de parâmetros e erro de modelagem. A contribuição proposta é avaliada no problema de seguimento de trajetória para um robô planar de 2 links. Esse robô tem sido um *benchmark* na literatura, como pode ser visto em (Shi et al., 2017; Shi and Li, 2018; Boulkroune et al., 2012; Shi and Li, 2018; Boulkroune et al., 2012; Chen and Chang, 2009). Nas simulações são usadas perturbações dinâmicas, conforme sugerido em (Shi et al., 2017). O desempenho da malha fechada é quantificado com o auxílio de índices clássicos de desempenho: integral do erro absoluto (IAE), integral do erro absoluto multiplicado pelo tempo (ITAE), raiz do erro quadrático médio (RMSE), e integral da variabilidade do sinal de controle (IVU). Os valores obtidos sugerem que a abordagem proposta proporciona significativa melhora na performance da linearização por realimentação.

Na Seção 2 é apresentada uma breve revisão dos métodos e conceitos necessários para o desenvolvimento do trabalho. O problema da linearização por realimentação na ocorrência de dinâmicas negligenciadas ou incertezas paramétricas é desenvolvido na Seção 3. A Seção 4 apresenta a contribuição principal do trabalho: uma solução que consiste no uso do algoritmo evolutivo de aprendizagem participativa no processo de estimação da perturbação da malha fechada e desenvolvimento da lei de controle robusta para sistemas MIMO. O sistema robótico usado para avaliar o comportamento e desempenho da topologia de controle proposta é introduzido na Seção 5, em que são apresentadas simulações ilustrativas da potencialidade da abordagem proposta. A conclusão do trabalho é apresentada na Seção 6.

2. PRELIMINARES

Nesta seção é apresentada uma breve revisão da técnica de linearização por realimentação entrada/saída e do algoritmo de aprendizagem participativa.

2.1 Linearização por Realimentação Entrada/Saída

Considere a classe de sistemas não lineares MIMO,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x})u_1 + \dots + g_p(\mathbf{x})u_p \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}) \\ &\vdots \\ y_p &= h_p(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (1)$$

em que $\mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ representa os estados do sistema, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ são os vetores de entrada e saída do sistema, respectivamente. As funções não lineares $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ representam os campos vetoriais suaves definidos no subconjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$, isto é, $f(\mathbf{x}) : D \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, $g(\mathbf{x}) : D \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times p}$ e $h_j(\mathbf{x})$ são funções suaves (Sastry, 1999). Assumindo que o sistema (1) possua grau relativo definido por: $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p]$, em que $n_x = \sum_{j=1}^p \gamma_j$, então pode-se derivar a saída y_j em relação ao tempo γ_j vezes e obter:

$$y_j^{\gamma_j} = \mathcal{L}_f^{\gamma_j} h_j(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \mathcal{L}_{g_i} \mathcal{L}_f^{(\gamma_j-1)} h_j(\mathbf{x}) u_i, \quad (2)$$

o que resulta em,

$$\begin{bmatrix} y_1^{\gamma_1} \\ \vdots \\ y_p^{\gamma_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_f^{\gamma_1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{\gamma_p} h_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + A(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad (3)$$

com

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f^{(\gamma_1-1)} h_1(\mathbf{x}) & \dots & \mathcal{L}_{g_p} \mathcal{L}_f^{(\gamma_1-1)} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f^{(\gamma_p-1)} h_p(\mathbf{x}) & \dots & \mathcal{L}_{g_p} \mathcal{L}_f^{(\gamma_p-1)} h_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

em que \mathcal{L} é o operador de Lie, tal que: $\mathcal{L}_f h_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial h_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$, e assim, sucessivamente, até a derivada de ordem γ_j , que resulta em: $\mathcal{L}_f^{\gamma_j} h_j(\mathbf{x})$. Do mesmo modo, tem-se: $\mathcal{L}_{g_i} \mathcal{L}_f^{(\gamma_j-1)} h_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\mathcal{L}_f^{(\gamma_j-1)} h_j(\mathbf{x}) \right) g_i(\mathbf{x})$, com $A(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Assumindo que $A(\mathbf{x})$ seja não singular, ou seja, $\det(A(\mathbf{x})) \neq \mathbf{0} \quad \forall x \in D$, então o sistema (1) pode

ser linearizado pelo uso da seguinte lei de controle (Sastry, 1999):

$$\mathbf{u} = -A^{-1}(\mathbf{x})\mathcal{L}_f^\gamma \mathbf{h} + A^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad (5)$$

com $\mathcal{L}_f^\gamma \mathbf{h} = [\mathcal{L}_f^{\gamma_1} h_1(\mathbf{x}) \cdots \mathcal{L}_f^{\gamma_p} h_p(\mathbf{x})]^\top$, e $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_p]^\top \in \mathbb{R}^p$ é o sinal de controle linear.

Aplicando (5) em (1) obtém-se o sistema linearizado em malha fechada,

$$[y_1^{\gamma_1} \cdots y_p^{\gamma_p}]^\top = [v_1 \cdots v_p]^\top. \quad (6)$$

A fim de garantir a estabilidade em malha fechada, pode-se definir a lei de controle linear, sendo, por exemplo, a realimentação de estados, o que resulta em, $\mathbf{v} = \mathbf{K}\mathbf{x}$, em que $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{p \times n_x}$ é o ganho da realimentação de estados, definido, por exemplo, através da alocação de autoestrutura no semiplano complexo esquerdo de forma a atender especificações de dinâmica desejada.

2.2 Algoritmo Evolutivo de Aprendizagem Participativa

Sistemas evolutivos são sistemas autoadaptáveis que conseguem evoluir e adaptar sua estrutura de regras e parâmetros. Esses sistemas são munidos de mecanismos adaptativos que constroem modelos em tempo real, baseados em regras do tipo SE-ENTÃO a partir do fluxo dos dados de entrada (Leite et al., 2015). O algoritmo evolutivo de aprendizagem participativa (ePL, do inglês *evolving participatory learning algorithm*) foi proposto por Lima et al. (2010) e adota regras fuzzy da forma:

$$\mathfrak{R}_i : \mathbf{SE} \mathbf{z}^k \text{ é } \mathcal{A}_i^k \text{ ENTÃO } y_i^k = f_i(\mathbf{z}^k) \quad (7)$$

$$i = 1, \dots, c^k,$$

em que \mathfrak{R}_i é a i -ésima regra fuzzy, c^k é o número de regras no instante k , $\mathbf{z}^k \in [0,1]^q$ é o vetor de entrada, q é a dimensão do espaço vetorial, y_i^k é a saída da i -ésima regra, $\mathcal{A}_i^k \in [0,1]^q$ a função de pertinência do antecedente e $f_i(\mathbf{z}^k)$ é uma função da entrada \mathbf{z}^k . A cada passo o ePL incorpora os dados de entrada à base de regras fuzzy através do processo de agrupamento ou clusterização (Oliveira et al., 2019). Dessa forma, cada regra fuzzy é representada por um agrupamento ou cluster cujo antecedente é associado a uma função gaussiana e o consequente é um modelo local definido por uma função afim. O ePL requer que o usuário defina os seguintes parâmetros: número inicial de clusters, taxa de aprendizagem $\xi \in [0,1]$, taxa do índice de alerta $\vartheta \in [0,1]$, limiar do índice de alerta $\tau \in [0,1]$, limiar de compatibilidade entre regras $\lambda \in [0,1]$ e a dispersão da curva gaussiana $\sigma \in [0,1]$.

As regras fuzzy são descritas por funções gaussianas, tal que:

$$\mu_i(\mathbf{z}^k) = e^{-\frac{\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}_i^k\|^2}{4\sigma^2}}, \quad (8)$$

em que $\mu_i(\mathbf{z}^k)$ é o grau de ativação da regra \mathfrak{R}_i , \mathbf{v}_i^k é o centro do i -ésimo cluster no instante k , e $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana. Após a iniciação dos dados, o algoritmo deve verificar para cada novo dado se um novo cluster deve ser criado ou se a base de regras deve ser atualizada. Além disso, verifica se há regras redundantes que devam ser excluídas. Nesse procedimento, utilizam-se as medidas de compatibilidade, ρ , e índice de alerta, a , no processo de

avaliação do novo dado de entrada, computados como se segue:

$$\rho_i^k = 1 - \frac{\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}_i^k\|}{\sqrt{q}}, \quad (9)$$

$$a_i^{k+1} = a_i^k + \vartheta(1 - \rho_i^k - a_i^k). \quad (10)$$

Neste caso, se o índice de alerta for maior que o limiar, τ , ou seja, se

$$\arg \min_{j=1, \dots, c^k} a_j^{k+1} > \tau,$$

então um novo cluster é criado. Caso contrário, o centro do cluster com maior compatibilidade é atualizado por:

$$\mathbf{v}_s^{k+1} = \mathbf{v}_s^k + \xi(\rho_s^k)^{[1-a_s^{k+1}]}(\mathbf{z}^k - \mathbf{v}_s^k),$$

$$s = \arg \max_{j=1, \dots, c^k} \rho_j^k. \quad (11)$$

Nessa etapa, atualiza-se também os consequentes das regras com auxílio de algum algoritmo recursivo, como, por exemplo, os mínimos quadrados recursivos – MQR. Uma vez que a base de regras encontra-se atualizada, o ePL verifica a redundância entre os clusters que formam a base de regra fuzzy. Para tal é calculado a compatibilidade entre os mesmo, tal que

$$\rho_{ij}^k = 1 - \frac{\|\mathbf{v}_i^k - \mathbf{v}_j^k\|}{\sqrt{q}} \quad (12)$$

em que $i, j = 1, \dots, c^k$, $j \neq i$. Se $\rho_{ij}^k \geq \lambda$, então o cluster de centro \mathbf{v}_j é declarado redundante e as regras i e j são fundidas ou uma delas é excluída. Caso contrário, a estrutura de regras é mantida.

Como o ePL usa funções fuzzy, então a saída y^k é a média ponderada das saídas de cada regra y_i^k . Dessa forma, y^k é dado por:

$$y^k = \frac{\sum_{i=1}^{c^k} \mu_i(\mathbf{z}^k) y_i^k}{\sum_{i=1}^{c^k} \mu_i(\mathbf{z}^k)}. \quad (13)$$

3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere que o sistema não linear (1) apresente incertezas nos parâmetros e/ou dinâmicas negligenciadas, de forma que os campos vetoriais possam ser descritos com auxílio de incertezas aditivas, como segue:

$$f(\mathbf{x}) = f_n(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x})$$

$$g_i(\mathbf{x}) = g_{in}(\mathbf{x}) + \Delta g_i(\mathbf{x}) \quad (14)$$

em que o índice n se refere aos termos nominais que representam a parte conhecida durante a modelagem do sistema. Por sua vez, os termos $\Delta f(\mathbf{x})$ e $\Delta g_i(\mathbf{x})$ representam os termos desconhecidos, ou seja, o erro de modelagem. Assumindo que esse erro não altere o grau relativo no sistema, ao substituir (14) em (2), tem-se a derivada perturbada da saída, tal que:

$$y_j^{\gamma_j} = \mathcal{L}_{f_n + \Delta f}^{\gamma_j} h_j(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \mathcal{L}_{g_{in} + \Delta g_i} \mathcal{L}_{f_n + \Delta f}^{(\gamma_j - 1)} h_j(\mathbf{x}) u_i. \quad (15)$$

Ao desenvolver (15) obtém-se:

$$y_j^{\gamma_j} = \mathcal{L}_{f_n}^{\gamma_j} h_j(\mathbf{x}) + \Delta P_j + \sum_{i=1}^p \mathcal{L}_{g_{in}} \mathcal{L}_{f_n}^{(\gamma_j - 1)} h_j(\mathbf{x}) u_i$$

$$+ \sum_{i=1}^p \mathcal{L}_{\Delta g_i} \mathcal{L}_{f_n}^{(\gamma_j - 1)} h_j(\mathbf{x}) u_i + \sum_{i=1}^p \mathcal{L}_{g_{in}} \Delta Q_j u_i + \sum_{i=1}^p \mathcal{L}_{\Delta g_i} \Delta Q_j u_i$$

em que $\Delta P_j \in \mathbb{R}$, $\Delta Q_j \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\Delta P_j = \mathcal{L}_{f_n + \Delta f}^{\gamma_j} h_j(\mathbf{x}) - \mathcal{L}_{f_n}^{\gamma_j} h_j(\mathbf{x}) \quad (16)$$

$$\Delta Q_j = \mathcal{L}_{f_n + \Delta f}^{\gamma_j - 1} h_j(\mathbf{x}) - \mathcal{L}_{f_n}^{\gamma_j - 1} h_j(\mathbf{x}). \quad (17)$$

A partir de (15)-(17), pode-se, após algumas manipulações algébricas, reescrever o sistema (3) como,

$$\begin{bmatrix} y_1^{\gamma_1} \\ \vdots \\ y_p^{\gamma_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{f_n}^{\gamma_1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{f_n}^{\gamma_p} h_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + A(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} + \Delta S \quad (18)$$

em que $\Delta S \in \mathbb{R}^p$ é uma perturbação oriunda do erro de modelagem, representada por:

$$\Delta S = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \vdots \\ \Delta P_p \end{bmatrix} + \Delta A(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad (19)$$

com $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} = \Delta A(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, em que

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathcal{L}_{\Delta g_1} \mathcal{L}_{f_n}^{(\gamma_1 - 1)} h_1(\mathbf{x}) + \mathcal{L}_{g_{1n}} \Delta Q_1 + \mathcal{L}_{\Delta g_1} \Delta Q_1, \\ a_{1p} &= \mathcal{L}_{\Delta g_p} \mathcal{L}_{f_n}^{(\gamma_1 - 1)} h_1(\mathbf{x}) + \mathcal{L}_{g_{pn}} \Delta Q_1 + \mathcal{L}_{\Delta g_p} \Delta Q_1, \\ a_{p1} &= \mathcal{L}_{\Delta g_1} \mathcal{L}_{f_n}^{(\gamma_p - 1)} h_p(\mathbf{x}) + \mathcal{L}_{g_{1n}} \Delta Q_p + \mathcal{L}_{\Delta g_1} \Delta Q_p, \\ a_{pp} &= \mathcal{L}_{\Delta g_p} \mathcal{L}_{f_n}^{(\gamma_p - 1)} h_p(\mathbf{x}) + \mathcal{L}_{g_{pn}} \Delta Q_p + \mathcal{L}_{\Delta g_p} \Delta Q_p. \end{aligned}$$

Aplicando a lei de controle (5) em (18), obtém-se a dinâmica em malha fechada para o sistema linearizado perturbado:

$$\begin{bmatrix} y_1^{\gamma_1} & \cdots & y_p^{\gamma_p} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_p \end{bmatrix}^\top + \Delta S. \quad (20)$$

A perturbação ΔS , uma vez presente na malha fechada de controle, pode promover efeitos inesperados na dinâmica do sistema e/ou mesmo levá-lo à instabilidade (Sastry, 1999; Oliveira et al., 2019).

Portanto, o objetivo deste trabalho consiste em projetar o sinal $\mathbf{u}_c(\mathbf{x}, \hat{\Delta S}) \in \mathbb{R}^p$ tal que a lei de controle

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \hat{\Delta S}) = \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_c(\mathbf{x}, \hat{\Delta S}) \quad (21)$$

com $\mathbf{u}_n(\mathbf{x})$ computado por (5), seja robusta. Isto é, que ao fechar a malha do sistema perturbado (18) com (21), sejam mitigados os efeitos das incertezas oriundas da presença da perturbação ΔS , além de assegurar a estabilidade da malha fechada.

4. CONTROLE GRANULAR FUZZY EVOLUTIVO

Conforme apresentado na Seção 3, a presença de erro de modelagem, incerteza nos parâmetros do sistema ou de dinâmicas negligenciadas, torna-se uma perturbação para a malha fechada de controle. Essa perturbação pode ocasionar à malha de controle um comportamento não esperado ou mesmo levar o sistema à instabilidade. A fim de mitigar esses efeitos, é proposto neste trabalho a inclusão de um sinal de compensação que visa reduzir e eliminar o efeito oriundo da dinâmica parasita, o qual é computado como segue:

$$\mathbf{u}_c(\mathbf{x}, \hat{\Delta S}) = -A^{-1}(\mathbf{x}) \hat{\Delta S} \quad (22)$$

em que A é definida por (4) e $\hat{\Delta S} \in \mathbb{R}^p$ é o valor estimado para a perturbação com o uso do algoritmo ePL. Note que por hipótese, $A(x)$ é não-singular para todo $x \in D \subseteq \mathbb{R}$.

Ao aplicar (21) em (18), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} y_1^{\gamma_1} \\ \vdots \\ y_p^{\gamma_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} + \Delta S - \hat{\Delta S}. \quad (23)$$

Assumindo que o valor estimado pelo ePL, seja tal que: $\hat{\Delta S} = \Delta S + \delta$, então a dinâmica (23) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} y_1^{\gamma_1} \\ \vdots \\ y_p^{\gamma_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_p \end{bmatrix} \quad (24)$$

em que $\delta = [\delta_1 \cdots \delta_p]^\top \in \mathbb{R}^p$ é uma perturbação que irá desaparecer com o tempo, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_i = 0$. Nesse caso, tem-se um sistema com dinâmica definida pela lei de controle linear, como esperado em (6).

Nesta abordagem, as regras fuzzy do algoritmo ePL (7) são reescritas na seguinte forma:

$$\mathfrak{R}_i : \mathbf{SE} \mathbf{z}^k \text{ é } \mathcal{A}_i^k \text{ ENTÃO } \Delta \hat{S}_i^k = \text{diag}(\pi_i^k \chi^k) \quad (25)$$

$$i = 1, \dots, c^k,$$

em que $\mathbf{z}^k = [\mathbf{x}^\top \ \varepsilon^\top]^\top = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{n_x} \ \varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \cdots \ \varepsilon_p]^\top$ é formado pelos estados do sistema e os erros de rastreamento da trajetória desejada para as saídas do sistema, computados por: $\varepsilon = \mathbf{r}_y(t) - \mathbf{y}(t)$, em que $\mathbf{r}_y(t) = [r_1 \ \cdots \ r_p]^\top$, em que r_1 é a referência para a saída y_1 , e assim sucessivamente até a saída y_p , cuja referência é r_p . $\Delta \hat{S}_i^k$ corresponde à estimação da perturbação na i -ésima regra no passo k , $\pi_i^k \in \mathbb{R}^{p \times (n_x + 2)}$ é a matriz dos consequentes e $\chi^k \in \mathbb{R}^{(n_x + 2) \times p}$ é a matriz construída a partir de \mathbf{z}^k como segue:

$$\chi^k = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_x} & x_{n_x} & \cdots & x_{n_x} \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_p \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Note que os consequentes das regras são atualizados com o auxílio do algoritmo MQR (Ljung, 1999). Nesse procedimento, o algoritmo MQR é executado recursivamente em um ciclo p vezes, em que a cada ciclo atualiza-se somente a linha j da matriz π_i^k , para $j = 1, 2, \dots, p$. Logo, faz-se

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}^k &= \frac{\Phi_{ij}^{k-1} \chi_j^k}{(\chi_j^k)^T \Phi_{ij}^{k-1} \chi_j^k + \zeta} \\ \pi_{ij}^k &= \pi_{ij}^{k-1} + \Lambda_{ij}^k (K_i \sum_{s=0}^k e^{sT} + K_p e^k - \pi_{ij}^{k-1} \chi_j^k) \\ \Phi_{ij}^k &= \frac{1}{\zeta} \left[\Phi_{ij}^{k-1} - \frac{\Phi_{ij}^{k-1} \chi_j^k (\chi_j^k)^T \Phi_{ij}^{k-1}}{(\chi_j^k)^T \Phi_{ij}^{k-1} \chi_j^k + \zeta} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

em que $\Lambda_i^k \in \mathbb{R}^{(n_x + 2) \times p}$ é o ganho de Kalman tal que Λ_{ij}^k se refere à coluna j da matriz Λ_i^k . $\Phi_i^k \in \mathbb{R}^{p \times (n_x + 2) \times (n_x + 2)}$ é o vetor das matrizes de covariância em que Φ_{ij}^k é a matriz de covariância relativa à saída j . Já $K_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $K_p \in \mathbb{R}^{p \times p}$ são constantes a serem definidas.

A saída do ePL, $\Delta \hat{S}$, é computada usando (13). Mais detalhes em relação aos cálculos do controlador são apresentados no pseudocódigo do Algoritmo 1.

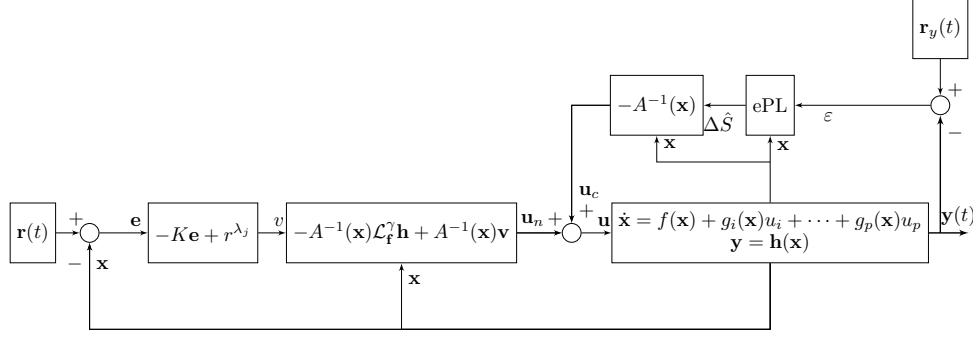


Figura 1. Topologia do controlador granular robusto via linearização por realimentação entrada/saída.

Algoritmo 1: Controlador Granular Robusto

Entrada: \mathbf{z}^k ;

Saída: $\hat{\Delta S}^k$;

Escolha os parâmetros do ePL: $\xi, \vartheta, \tau, \lambda, \sigma, \zeta, K_p, K_i$;

para $i = 1$ até c_i **faça**

 Leia um novo dado: $\mathbf{z}^k \leftarrow [\mathbf{x}^k \ \varepsilon^k]$;

 Crie os clusters iniciais: $\mathbf{v}_i \leftarrow \mathbf{z}^k$

fim

enquanto $k < \infty$ **faça**

 Leia um novo dado: $\mathbf{z}^k \leftarrow [\mathbf{x}^k \ \varepsilon^k]$;

 Calcule a compatibilidade, ρ^k , usando (9);

 Calcule o índice de alerta, a^{k+1} , usando (10);

se $\arg \min (a^{k+1}) > \tau$ **então**

 Atualize o número de regras: $c^k = c^k + 1$;

 Crie uma nova regra: $\mathbf{v}_{c^k} \leftarrow \mathbf{z}^k$;

senão

 Atualize os antecedentes da regra de maior

 compatibilidade, \mathbf{v}_s^k , usando (11);

 Atualize os consequentes da regra usando (27);

fim

para $i = 1$ até $c^k - 1$ **faça**

para $j = 1$ até c^k **faça**

 Calcule a compatibilidade entre as regras,

ρ_{ij} , usando (12);

se $\rho_{ij} > \lambda$ **então**

 Elimine a regra redundante;

fim

fim

fim

para $i = 1$ até c^k **faça**

 Calcule o grau de ativação das regras, $\mu_i(\mathbf{z}^k)$,
 usando (8);

fim

Calcule a saída do ePL, $\hat{\Delta S}$, usando (13);

retorna $\hat{\Delta S}$;

fim

Por fim, ao considerar o problema de seguimento de trajetória e ao assumir funções continuamente diferenciáveis, tal que: $\mathbf{r}(t) = [r_1 \dots r_1^{\lambda_1-1} \dots r_p \dots r_p^{\lambda_p-1}]$, pode-se, então, computar o erro de seguimento de referência para os estados como segue: $\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{x}$. Nesse caso, ao adotar lei de controle linear via realimentação de estados, $\mathbf{v} = \mathbf{r}^{\lambda_j} - \mathbf{K}\mathbf{e}$, tem-se na Figura 1 a malha de controle proposta neste

trabalho para sistemas linearizáveis por realimentação via entrada/saída com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

5. ESTUDO DE CASO

Nesta seção, o controlador granular robusto proposto no presente trabalho é avaliado em um robô planar com duas juntas racionais, o qual tem sido um *benchmark* para avaliação de robustez em sistemas MIMO em diversos trabalhos (Slotine and Li, 1991; Shi and Li, 2018; Shi et al., 2017; Boulkroune et al., 2012; Chen and Chang, 2009). Além disso, o desempenho do controlador é quantificado com o uso dos seguintes índices de desempenho: a integral do erro absoluto (IAE), integral do erro absoluto multiplicado pelo tempo (ITAE), integral da variabilidade ponderada do sinal de controle (IVU), e raiz quadrada do erro quadrático médio (RMSE). O esquemático do robô planar em estudo neste trabalho é apresentado na Figura 2, enquanto sua dinâmica é dada por (Slotine and Li, 1991):

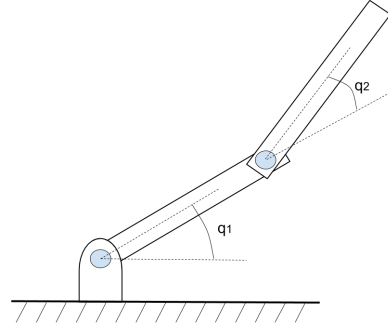


Figura 2. Desenho esquemático do robô planar 2R.

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

em que q_i, \dot{q}_i e \ddot{q}_i são posição, velocidade e aceleração angular (*rad, rad/s, rad/s²*) dos links 1 e 2, respectivamente. As variáveis de controle: u_1 e u_2 descrevem o torque (*N.m*) aplicado a cada link. A matriz M descreve a inércia dos links, tal que:

$$\begin{aligned} M_{11} &= a_1 + 2a_3 \cos(q_2) + 2a_4 \sin(q_2) \\ M_{12} &= M_{21} = a_2 + a_3 \cos(q_2) + a_4 \sin(q_2) \\ M_{22} &= a_2 \end{aligned}$$

em que a_i para $i = 1, \dots, 4$ são constantes físicas do sistema robótico, com $h = a_3 \sin(q_2) - a_4 \cos(q_2)$. Esse sistema pode ser reescrito como (1). Para tal, define-se novas

variáveis para os estados, tal que: $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^\top = [q_1 \ \dot{q}_1 \ q_2 \ \dot{q}_2]^\top$, o que resulta no seguinte sistema não linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = f(\mathbf{x}) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_{22}}{\det(M)} \\ 0 \\ \frac{-M_{21}}{\det(M)} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-M_{12}}{\det(M)} \\ 0 \\ \frac{M_{11}}{\det(M)} \end{bmatrix} u_2, \quad (29)$$

com

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{M_{22}2hx_2x_4 + M_{22}hx_4^2 + M_{12}hx_2^2}{\det(M)} \\ x_4 \\ \frac{-M_{21}2hx_2x_4 - M_{21}hx_4^2 - M_{12}hx_2^2}{\det(M)} \end{bmatrix}.$$

O sistema (29) possui grau relativo $\gamma = n_x = 4$, com $\gamma_1 = \gamma_2$. Desse modo, ao aplicar a álgebra de Lie, conforme apresentado na seção 2.1 obtém-se a lei de controle para linearização por realimentação entrada/saída, dada por:

$$\mathbf{u} = M(\mathbf{x}) \left(\mathbf{v} - \begin{bmatrix} \frac{M_{22}2hx_2x_4 + M_{22}hx_4^2 + M_{12}hx_2^2}{\det(M)} \\ \frac{-M_{21}2hx_2x_4 - M_{21}hx_4^2 - M_{12}hx_2^2}{\det(M)} \end{bmatrix} \right). \quad (30)$$

Para fins de simulação, utilizou-se a forma discretizada por Euler para o sistema (29), com período de amostragem, $T = 0,0025$ s. Além disso, adotou-se os parâmetros físicos do sistema conforme sugerido em (Slotine and Li, 1991) com: $a_1 = 3,34$, $a_2 = 0,97$, $a_3 = 1,04$ e $a_4 = 0,60$. De acordo com o diagrama de controle apresentado na Figura 1, projetou-se a lei de controle linear por realimentação de estados via alocação de polos, o que resultou no ganho de realimentação:

$$K = \begin{bmatrix} 59,103 & 15,469 & 5,261 & 0,717 \\ 5,261 & 0,717 & 55,897 & 15,031 \end{bmatrix}.$$

A fim de avaliar o desempenho do controlador proposto, o sistema foi submetido ao problema de seguimento de trajetória definido por: $\mathbf{r}_y(t) = 0,5 [\sin(t) \ \cos(t)]^\top$, conforme sugerido em (Shi and Li, 2018). Nesse caso, adotou-se a mesma condição inicial para ambos links, tal que, $\mathbf{x}(0) = [15^\circ \ 0 \ 15^\circ \ 0]^\top$. Ademais, ao sistema (29) foi adicionado a seguinte dinâmica negligenciada:

$$\Delta S(t) = [0 \ 0,2 \sin(3t)e^{-0,2t} \ 0 \ 0,2 \cos(3t)e^{-0,1t}]^\top,$$

conforme apresentado em (Shi et al., 2017). Por fim, o controlador robusto granular teve seus parâmetros sintonizados como segue: $\xi = 0,2$, $\vartheta = 0,019$, $\tau = 0,19$, $\lambda = 0,875$, $\sigma = 0,02$, $\zeta = 0,98$ e ganhos $K_i = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $K_p = \begin{bmatrix} 720 & 0 \\ 0 & 1680 \end{bmatrix}$. Note que esses parâmetros foram escolhidos conforme procedimento proposto em (Lima et al., 2010).

O sistema foi simulado com as seguintes malhas de controle e condições: linearização por realimentação entrada/saída (LR_n) sem a presença da dinâmica negligenciada (sistema nominal), ou seja, $\Delta S(t) = \mathbf{0}$. Contudo, essa mesma malha (LR) foi reavaliada sob a presença da perturbação junto ao sistema. Do mesmo modo, o controlador granular robusto (CGR) proposto neste trabalho foi avaliado sob as mesmas condições. O comportamento do sistema em malha fechada para os controladores em estudo é apresentado no gráfico da Figura 3.

Conforme pode-se verificar no gráfico da Figura 3, em situação ideal, em que o modelo usado no projeto da lei de controle linearizante (5) representa exatamente a

dinâmica do sistema a ser controlado, verifica-se que o sistema comporta-se como o desejado (linha contínua azul). No entanto, quando há a presença da dinâmica parasita na malha de controle, ou seja, quando existe uma diferença entre o modelo e sistema real, o controlador LR apresenta comportamento completamente diferente do desejado (linha contínua vermelha). Por sua vez, tal comportamento não é verificado para o controlador CGR (linha contínua verde), uma vez que o mesmo atua em ordem de mitigar os efeitos indesejados proporcionados pela presença da perturbação na malha de controle.

O desempenho dos controladores foi quantificado, através do uso de índices: IAE, ITAE, RMSE e IVU (Ogata, 1998). Os resultados obtidos podem ser vistos na Tabela 1. Conforme pode-se verificar na Tabela 1, o controlador

Tabela 1. Índices de desempenho dos controladores.

Controlador	IAE	ITAE	RMSE	IVU
LR_n	0,3464	2,2326	0,0480	2,6704
CGR_n	0,0873	0,1394	0,0305	84,27
LR	7,7227	47,250	0,5686	147,19
CGR	0,4990	2,5592	0,0507	194,73

proposto melhorou, significativamente, o desempenho da malha de controle via linearização por realimentação.

6. CONCLUSÕES

Foi apresentada uma metodologia, baseada no algoritmo de participação evolutiva, que é capaz de proporcionar robustez à linearização por realimentação aplicada em sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Em particular, essa abordagem adequa-se a processos reais, cujas dinâmicas são representadas por modelos com parâmetros incertos e que negligenciam dinâmicas não dominantes. O método proposto é ilustrado por um estudo de caso que trata do controle de posição de um braço robótico planar com dois links de atuação e posicionamento. São realizadas comparações da metodologia proposta com o uso do controle sem a compensação de incertezas e dinâmicas negligenciadas. Os resultados obtidos ilustram a superioridade do desempenho obtido no posicionamento do braço robótico ao utilizar a metodologia proposta.

REFERÊNCIAS

- Aldhaferi, R.W. and Khalil, H.K. (1996). Effect of unmodeled actuator dynamics on output feedback stabilization of nonlinear systems. *Automatica*, 31(9), 1323–1327.
- Bao, X., Zhuo, F., Tian, Y., and Tan, P. (2013). Simplified feedback linearization control of three-phase photovoltaic inverter with an LCL filter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 28(6), 2739–2752.
- Boukroune, A., M'saad, M., and Farza, M. (2012). Fuzzy approximation-based indirect adaptive controller for multi-input multi-output non-affine systems with unknown control direction. *IET Control Theory & Applications*, 6(17), 2619–2629.
- Chen, J.L. and Chang, W.D. (2009). Feedback linearization control of a two-link robot using a multi-crossover genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36(2), 4154–4159.

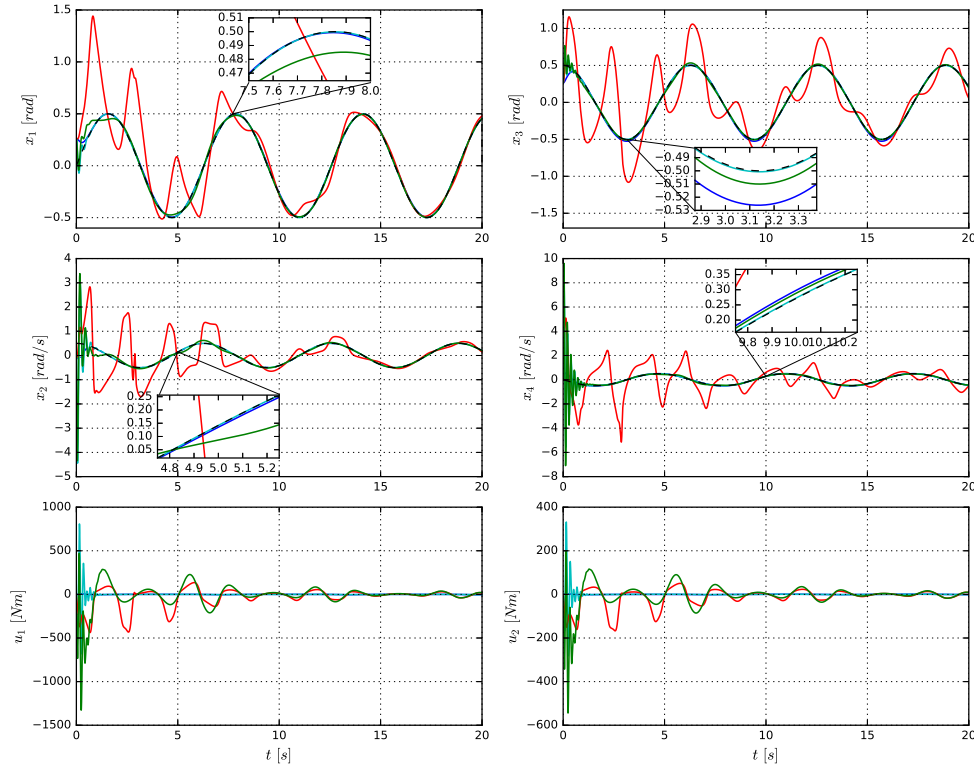


Figura 3. Comportamento da dinâmica do sistema em malha fechada com o sistema nominal: **linha contínua azul** – LR_n , **linha contínua ciana** – CGR_n , já para o sistema perturbado: **linha contínua vermelha** – LR , **linha contínua verde** – CGR , enquanto a linha tracejada preta descreve a trajetória desejada para cada link.

- de Jesús Rubio, J. (2018). Robust feedback linearization for nonlinear processes control. *ISA transactions*, 74, 155–164.
- Franco, A.E.O., Oliveira, L.S., and Leite, V.J.S. (2016). Síntese de ganhos para compensação robusta de sistemas linearizados por realimentação. In *XXI Congresso Brasileiro de Automação*, 2695–2700.
- Franco, A.L.D., Bourles, H., De Pieri, E.R., and Guillard, H. (2006). Robust nonlinear control associating robust feedback linearization and H_∞ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(7), 1200–1207. doi:10.1109/TAC.2006.878782.
- Hu, X., Zhao, Y., Xu, B., and Hu, C. (2018). Robust adaptive fuzzy tracking control for uncertain MIMO nonlinear nonminimum phase system. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*.
- Kalat, A.A. (2019). A robust direct adaptive fuzzy control for a class of uncertain nonlinear MIMO systems. *Soft Computing*, 23(19), 9747–9759.
- Karimi, H.R. and Motlagh, M.R.J. (2006). Robust feedback linearization control for a non linearizable MIMO nonlinear system in the presence of model uncertainties. In *2006 IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics*, 965–970. IEEE.
- Leite, D., Palhares, R.M., Campos, V.C.S., and Gomide, F. (2015). Evolving granular fuzzy model-based control of nonlinear dynamic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 23(4), 923–938. doi:10.1109/TFUZZ.2014.2333774.
- Lima, E., Hell, M., Ballini, R., and Gomide, F. (2010). *Evolving Fuzzy Modeling Using Participatory Learning*, 67–86. Wiley-IEEE Press.
- Ljung, L. (1999). *System Identification: Theory for the User*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 2nd edition.
- Ogata, K. (1998). *Engenharia de Controle Moderno*. Editora LTC, São Paulo, 3rd edition.
- Oliveira, L., Leite, V., Bento, A., and Gomide, F. (2019). Granular robust feedback linearization. In *2019 International Conference on Fuzzy Systems (Fuzz-IEEE)*.
- Sastry, S. (1999). *Nonlinear Systems - Analysis, Stability and Control*. Springer-Verlag, Mineloa, New York, 1st edition.
- Shi, W. and Li, B. (2018). Adaptive fuzzy control for feedback linearizable mimo nonlinear systems with prescribed performance. *Fuzzy Sets and Systems*, 344, 70–89.
- Shi, W., Wang, D., and Li, B. (2017). Indirect adaptive fuzzy prescribed performance control of feedback linearizable mimo non-linear systems with unknown control direction. *IET Control Theory & Applications*, 11(7), 953–961.
- Slotine, J.E. and Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*. Pearson, Upper Saddle River, NJ, 1st edition.
- Soares, S., Leite, V., and Nepomuceno, E. (2011). Controle de um robô móvel omnidirecional baseado em linearização por realimentação robusta. In *X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 815–820.
- Zerar, M., Cazaurang, F., and Zolghadri, A. (2004). Robust tracking of nonlinear mimo uncertain flat systems. In *2004 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (IEEE Cat. No. 04CH37583)*, volume 1, 536–541. IEEE.