

Controle Preditivo Não-Linear Robusto com Propagação de Incertezas via Zonotopos ^{*}

Victor M. Cunha ^{*} Tito L. M. Santos ^{*}

^{*} *Departamento de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Federal da Bahia, BA (e-mail: moreiracunha.victor@gmail.com, tlsantos@ufba.br).*

Abstract: This paper presents a new zonotopic-based method for computing the reachable sets that bound the disturbance propagation of nonlinear systems. These sets are used to design a robust nonlinear model predictive controller. The main objective is to reduce the conservativeness of the tighter constraints, which are employed to ensure recursive feasibility and input-to-state stability based on nominal prediction. The proposed disturbance propagation technique is applied to a simulation DC-DC converter benchmark case study to illustrate the benefits of the proposed approach.

Resumo: Este trabalho apresenta um novo método baseado em zonotopos para o cálculo de conjuntos alcançáveis que limitam a propagação de incertezas em sistemas não-lineares. Estes conjuntos são utilizados na definição de controladores preditivos robustos de sistemas não-lineares. O principal objetivo consiste na redução do conservadorismo das restrições recuadas, as quais são utilizadas para garantir factibilidade recursiva e estabilidade entrada-estado baseada em predições nominais. A técnica de propagação de incertezas proposta é aplicada a um conversor DC-DC com vistas a ilustrar os benefícios da técnica proposta.

Keywords: Robust Model Predictive Control; Non-Linear Control; Zonotopes; Set-Based State Estimation; Constraint-Tightening.

Palavras-chaves: Controle Preditivo Robusto; Controle Não-Linear; Zonotopos; Estimação de Estados Baseada em Conjuntos; Contração de Restrições.

1. INTRODUÇÃO

O controle preditivo (MPC) é amplamente utilizado para o controle ótimo de sistemas dinâmicos restritos lineares e não-lineares (Mayne, 2014). O controle preditivo nominal, embora possa apresentar algum grau de robustez inerente, não oferece qualquer garantia de factibilidade recursiva ou estabilidade na presença de perturbações. Para possibilitar tais garantias, o controle preditivo robusto vem sendo desenvolvido. O controle preditivo robusto considera a presença de incertezas desconhecidas, porém limitadas, no sistema e garante satisfação das restrições e estabilidade entrada-estado para qualquer sequência de perturbações dentro de um conjunto conhecido (Mayne et al., 2000).

Neste trabalho, estuda-se o problema do controle preditivo robusto para sistemas não-lineares baseado em predições nominais, no qual, a partir do cálculo da propagação de incertezas, restrições contraídas são aplicadas às predições nominais, forçando a satisfação das restrições pela trajetória real do sistema (Santos et al., 2019; Marruedo et al., 2002; Köhler et al., 2018). Em sistemas lineares, o cálculo exato de conjuntos delimitando a propagação das incertezas e, consequentemente, restringindo a diferença entre as trajetórias predita e real, é possível (Ferramosca et al., 2012). No caso não-linear, no entanto, os métodos

existentes para a propagação de incertezas, como os utilizando constantes de Lipschitz e funções- \mathcal{K} , tendem a ser conservadores, limitando a performance do controlador e reduzindo seu domínio de atração (Marruedo et al., 2002).

Zonotopos são poliedros convexos e compactos que podem ser representados pela soma de Minkowsky de segmentos de reta. Devido à flexibilidade e simplicidade da representação zonotópica, aliada ao baixo custo computacional de transformações lineares e somas de Minkowsky de zonotopos, tais conjuntos são extensamente utilizados na estimação de estados e detecção de falhas (Le et al., 2013; Alamo et al., 2005; Scott et al., 2016).

Neste trabalho, é proposto um novo método para a propagação de incertezas em sistemas não-lineares, baseado na extensão de valor médio de zonotopos proposta em Alamo et al. (2005), que apresenta resultados menos conservadores que a estimação via constantes de Lipschitz. É também estudada a influência da lei de realimentação de estado na propagação de perturbações. A abordagem proposta também pode ser aplicada a problemas não-lineares com perturbação estocástica (Santos et al., 2019).

O trabalho está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 são apresentadas as discussões preliminares, na Seção 3 apresenta-se a técnica baseada em zonotopos, o estudo de caso é analisado na Seção 4 e os comentários finais são discutidos na Seção 5.

^{*} O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Notações. Dados os conjuntos $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ e a matriz $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$, a soma de Minkowsky é definida por $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^m : x = a + b, a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$, a diferença de Pontryagin por $\mathcal{A} \ominus \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^m : x + b \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{B}\}$, o mapeamento linear por $R\mathcal{A} = \{y \in \mathbb{R}^n : y = Ra, a \in \mathcal{A}\}$ e o produto cartesiano por $\mathcal{A} \times \mathcal{C} = \{z \in \mathbb{R}^{m+n} : z = (a^\top c^\top)^\top, a \in \mathcal{A}, c \in \mathcal{C}\}$. x_k representa o valor de um sinal no instante k , enquanto $x_{k+j|k}$ representa o valor predito em k para x_{k+j} (note que $x_{k|k} = x_k$). Dados dois inteiros a e b ($a < b$), $\mathbb{Z}_{[a,b]} = \{j \in \mathbb{Z} : a \leq j \leq b\}$ e $\mathbf{v}_{[a,b]} = \{v_a, v_{a+1}, \dots, v_b\}$. Uma função $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função- \mathcal{K} se ela é contínua, estritamente crescente e $\alpha(0) = 0$. Uma função $f : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita de classe \mathcal{C}^1 se ela é diferenciável e apresenta derivadas contínuas. Neste caso, sua matriz jacobiana é representada por $\nabla^\top f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$. Dadas as matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $A \leq (\geq) B$ representa as mn inequações $a_{ij} \leq (\geq) b_{ij}$. Uma norma de um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é dada por $\|v\|$, enquanto sua norma-infinito, por $\|v\|_\infty$. Para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\|A\|$ ($\|A\|_\infty$) é a norma(-infinito) induzida da transformação linear $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. O módulo $|A|$ de uma matriz deve ser tomado termo-a-termo. A caixa unitária m -dimensional é descrita por $\mathcal{B}_\infty^m = \{\xi \in \mathbb{R}^m : \|\xi\|_\infty \leq 1\}$ e o conjunto dos intervalos reais compactos é dado por $\mathbb{I} = \{[a, b], a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. Dado um conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathbb{I}(\mathcal{A}) \in \mathbb{I}^m$ representa a casca intervalar de \mathcal{A} . Matrizes intervalares são representadas por $\mathbf{J} \in \mathbb{I}^{n \times m}$, com $\text{mid}(\mathbf{J})$ e $\text{rad}(\mathbf{J})$ representando seu ponto médio e raio, respectivamente.

2. NMPC ROBUSTO BASEADO EM PREDIÇÕES NOMINAIS

2.1 Descrição do Sistema

Considere o seguinte sistema não-linear:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k, \quad (1)$$

sendo $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle, $w_k \in \mathbb{R}^n$ a perturbação aditiva e f descreve as equações do modelo. Assume-se, sem perda de generalidade, que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema (1), de modo que $f(0, 0) = 0$.

Embora a perturbação aditiva seja desconhecida, considera-se que ela seja limitada por um conjunto compacto $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ com a origem em seu interior, de modo que $w_k \in \mathcal{W}, \forall k \in \mathbb{N}$. O sistema (1) está sujeito a restrições poliédricas nos estados e entradas, ou seja, existem conjuntos compactos $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : H_x x \leq g_x\}$ e $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^{n_u} : H_u u \leq g_u\}$, sendo H_x e H_u matrizes e g_x e g_u vetores de dimensões apropriadas que definem os semi-espacos das restrições poliedrais do estado e entrada, de modo que:

$$(x_k^\top \ u_k^\top)^\top \in \mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{U}. \quad (2)$$

Assume-se também que a função $f : \mathbb{R}^{n+n_u} \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja de classe \mathcal{C}^1 em \mathcal{Z} .

Considere a lei de controle linear

$$u_k = \pi(x_k, v_k) = v_k + K_v x_k, \quad (3)$$

sendo $v_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada virtual, que cumpre o papel de satisfação de restrições e otimização, e $K_v \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ a matriz de realimentação de estado, a qual permite atenuar a propagação de perturbações. Deste modo, o sistema em malha fechada é descrito por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, v_k + K_v x_k) + w_k \\ &= f_\pi(x_k, v_k) + w_k, \end{aligned} \quad (4)$$

e as restrições $[x_k^\top \ u_k^\top]^\top \in \mathcal{Z}$ podem ser reescritas em termos do estado e da entrada virtual como

$$\begin{pmatrix} x_k \\ v_k \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}_\pi = \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+n_u} : \begin{pmatrix} H_x & 0 \\ H_u K_v & H_u \end{pmatrix} z \leq \begin{pmatrix} g_x \\ g_u \end{pmatrix} \right\}. \quad (5)$$

A lei de controle (3), definida a partir da escolha da matrix K_v , pode ser definida conforme proposto no Apêndice A. O sistema (4) será usado para o projeto do controle preditivo, com as entradas virtuais $v_{k+j|k}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ como variáveis de otimização, sendo $\hat{\mathbf{v}}_{[k, k+N-1]} = \{v_{k|k} \ v_{k+1|k} \ \dots \ v_{k+N-1|k}\}$ uma sequência de controles futuros.

2.2 Propagação das Perturbações

A trajetória do sistema (4) partindo do estado inicial $x_k \in \mathcal{X}$ é dada por

$$x_{k+j} = \phi_\pi(j, x_k, \mathbf{v}_{[k, k+j-1]}, \mathbf{w}_{[k, k+j-1]}), \quad j \geq 0. \quad (6)$$

As predições nominais são dadas por

$$x_{k+j|k} = \phi_\pi(j, x_k, \hat{\mathbf{v}}_{[k, k+j-1]}, \mathbf{0}), \quad j \geq 0. \quad (7)$$

Para garantir factibilidade recursiva do MPC na presença de perturbações, conjuntos $\mathcal{S}(j) \subseteq \mathbb{R}^n$, $j = 0 \dots N$ satisfazendo a Condição 1 são definidos iterativamente de modo a limitar a propagação das perturbações (Santos et al., 2019; Marruedo et al., 2002).

Condição 1. Os conjuntos $\mathcal{S}(j)$, $j = 0 \dots N$ devem satisfazer as seguintes condições:

- i $\mathcal{S}(0)$ é um conjunto compacto que contém \mathcal{W} .
- ii $\mathcal{S}(j)$, $j = 1 \dots N$ é um conjunto compacto tal que, para todos x_a , x_b e v com $(x_a^\top \ v^\top)^\top \in \mathcal{Z}_\pi \ominus (\mathcal{S}(j-1) \times \{0\})$ e $x_b - x_a \in \mathcal{S}(j-1)$, tem-se $f_\pi(x_b, v) - f_\pi(x_a, v) \in \mathcal{S}(j)$.

Fazendo $x_b = x_{k+1}$ e $x_a = x_{k+1|k} = f_\pi(x_k, v_k)$, tem-se $x_b - x_a \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{S}(0)$. Consequentemente, pela Condição 1, tem-se $x_{k+j|k+1} \in x_{k+j|k} \oplus \mathcal{S}(j-1)$, $j = 1 \dots N+1$ para toda sequência de controles $\hat{\mathbf{v}}_{[k, k+N]}$ admissível. Logo, os conjuntos $\mathcal{S}(j)$ permitem limitar a diferença entre as predições realizadas em k e as realizadas em $k+1$.

No caso linear, os menores conjuntos $\mathcal{S}^*(j)$ que satisfazem a Condição 1 podem ser diretamente computados como $\mathcal{S}^*(j) = (A + BK_v)^j \mathcal{W}$ (Ferramosca et al., 2012). Para sistemas não-lineares, no entanto, não há algoritmos eficientes para o cálculo exato dos $\mathcal{S}^*(j)$ (Köhler et al.,

2018). Limitantes mais conservadores, levando em conta o pior-caso de propagação da perturbação, devem então ser utilizados.

Um método simples de obtenção de conjuntos $\mathcal{S}(j)$ é utilizando constantes de Lipschitz (Marruedo et al., 2002). Dados $L_x \in \mathbb{R}$, com $\|f_\pi(x_a, v) - f_\pi(x_b, v)\| \leq L_x \|x_b - x_a\|$ para quaisquer $(x_a^\top v^\top)^\top, (x_b^\top v^\top)^\top \in \mathcal{Z}_\pi$, e $\mathcal{S}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq w_m\} \supseteq \mathcal{W}$, conjuntos $\mathcal{S}_i(j)$ que satisfazem a Condição 1 são dados por

$$\mathcal{S}_i(j) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq L_x^j w_m\}, \quad j = 0 \dots N. \quad (8)$$

Os conjuntos assim obtidos, no entanto, tendem a ser conservadores, uma vez que tal abordagem propaga o pior caso com relação ao ganho de forma idêntica em todas as direções. A principal contribuição deste trabalho é o desenvolvimento de um novo algoritmo para o cálculo dos $\mathcal{S}(j)$ baseado em zonotopos, o qual não apresenta este tipo de conservadorismo.

2.3 Projeto do Controlador

Esta seção apresenta como conjuntos $\mathcal{S}(j)$ satisfazendo a Condição 1 podem ser utilizados para o projeto de um controlador preditivo não-linear robusto (NMPC) baseado em predições nominais para o sistema (1) sujeito a perturbações $w_k \in \mathcal{W}$.

Dados o horizonte de predição $N \in \mathbb{N}$ e o conjunto de restrições inicial $\mathcal{Z}_\pi(0) = \mathcal{Z}_\pi$, conjuntos de restrições contraídos $\mathcal{Z}_\pi(j)$, $j = 1 \dots N$, são construídos iterativamente por

$$\mathcal{Z}_\pi(j+1) = \mathcal{Z}_\pi(j) \ominus (\mathcal{S}(j) \times \{0\}). \quad (9)$$

Deste modo, a cada instante de amostragem k , mede-se o estado x_k e soluciona-se o problema de otimização $P_N(x_k)$ definido por

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{v}}_{[k, k+N-1]}} & \sum_{j=0}^{N-1} L_\pi(x_{k+j|k}, v_{k+j|k}) + V_f(x_{k+N|k}) \\ \text{s.a. : } & \begin{cases} x_{k|k} = x_k \\ x_{k+j+1|k} = f_\pi(x_{k+j|k}, v_{k+j|k}), & j \in \mathbb{Z}_{[0, N-1]} \\ (x_{k+j|k}^\top v_{k+j|k}^\top)^\top \in \mathcal{Z}_\pi(j), & j \in \mathbb{Z}_{[0, N-1]} \\ x_{k+N|k} \in \mathcal{X}_f \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

tal que $\hat{\mathbf{v}}_{[k, k+N-1]}$ são as entradas virtuais futuras, variáveis do problema de otimização, $L_\pi(x_{k+j|k}, v_{k+j|k})$ é o custo de etapa, $V_f(x_{k+N|k})$ é o custo terminal e \mathcal{X}_f é o conjunto terminal.

O conjunto de pontos iniciais $x_0 \in \mathcal{X}$ tais que o problema (10) é factível é chamado domínio de atração e representado por \mathcal{X}_N . A solução de $P_N(x_k)$ e seu custo associado são dados respectivamente por $\hat{\mathbf{v}}_{[k, k+N-1]}^*(x_k)$ e $V_N^*(x_k)$.

As funções-custo $L_\pi: \mathcal{Z}_\pi \rightarrow \mathbb{R}$ e $V_f: \mathcal{X}_f \rightarrow \mathbb{R}$ devem ser uniformemente contínuas e satisfazer às condições

$$L_\pi(x, v) \geq \alpha_L(\|x\|) \quad (11a)$$

$$\alpha_V(\|x\|) \leq V_f(x) \leq \beta_V(\|x\|), \quad (11b)$$

tal que α_L , α_V e β_V são funções- \mathcal{K} . Em particular, pode-se fazer $L_\pi(x, v) = x^\top Qx + u^\top Ru$ ($u = v + K_v x$) e $V_f(x) = x^\top Px$, com Q , R e P matrizes definidas positivas.

O conjunto terminal \mathcal{X}_f deve ser um conjunto robusto positivamente invariante¹, havendo uma lei de controle estabilizante $v_t: \mathcal{X}_f \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$, $v_t(0) = 0$, tal que:

- i O conjunto $\mathcal{Z}_{\pi, t} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x^\top v_t^\top(x))^\top \in \mathcal{Z}_\pi(N)\}$ é compacto e contém a origem, tendo-se $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{Z}_{\pi, t}$.
- ii Tem-se $f_\pi(x, v_t(x)) \oplus \mathcal{S}(N) \subseteq \mathcal{X}_f$ para todo $x \in \mathcal{X}_f$.

Finalmente, $V_f(x)$ deve ser uma função de Lyapunov para o controlador terminal, tendo-se $V_f(f_\pi(x, v_t(x))) - V_f(x) \leq -L_\pi(x, v_t(x))$ para todo $x \in \mathcal{X}_f$.

Pelo princípio do horizonte deslizante, a lei de controle MPC é dada por

$$u_k = \kappa(x_k) = v_k^* + K_v x_k \quad (12)$$

e, como mostrado em Marruedo et al. (2002) e Santos et al. (2019), tem-se factibilidade recursiva e estabilidade entrada-estado do sistema (1) sujeito à lei de controle (12).

Note que ao reduzir o conservadorismo no cálculo dos conjuntos $\mathcal{S}(j)$, reduz-se a contração das restrições. Deste modo, os conjuntos $\mathcal{Z}_\pi(j)$ e, conseqüentemente, o conjunto terminal \mathcal{X}_f aumentam, relaxando as restrições do problema de otimização e permitindo um maior domínio de atração \mathcal{X}_N e menores custos $V_N^*(\cdot)$.

3. PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS VIA ZONOTOPOS

Zonotopos são uma classe particular de poliedros convexos, compactos e simétricos (Le et al., 2013). Eles podem ser descritos pela soma de Minkowsky de segmentos de reta ou, alternativamente, pela imagem afim de uma caixa unitária $\mathcal{B}_\infty^{n_g}$

$$Z = \{G, c\} = c \oplus G\mathcal{B}_\infty^{n_g}, \quad (13)$$

tal que $c \in \mathbb{R}^n$ é o centro e as colunas de $G \in \mathbb{R}^{n \times n_g}$ são geradores do zonotopo. O número de geradores $n_g \geq n$ determina a complexidade do zonotopo, com $n_g = n$ em paralelotos. Um zonotopo é dito centrado quando seu centro é a origem ($c = 0$).

A utilização de zonotopos para estimação de estados está ligada à simplicidade e eficiência da transformação linear e da soma de Minkowsky de zonotopos (Alamo et al., 2005; Scott et al., 2016). De fato, dados $Z_1 = \{G_1, c_1\}$, $Z_2 = \{G_2, c_2\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$RZ_1 = \{RG_1, Rc_1\}, \quad (14a)$$

$$Z_1 \oplus Z_2 = \{(G_1 \ G_2), c_1 + c_2\}. \quad (14b)$$

¹ Um conjunto $\mathcal{X}_f \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito Robusto Positivamente Invariante (RPI) em relação ao sistema (4) sujeito à lei de controle $v_k = v_t(x_k)$ e à perturbação $w_k \in \mathcal{W}_f$ caso para todos $x \in \mathcal{X}_f$ e $w \in \mathcal{W}_f$, tenha-se $f_\pi(x, v_t(x)) + w \in \mathcal{X}_f$.

Logo, tais operações podem ser efetuadas algebricamente, com baixo custo computacional.

3.1 Cálculo dos Conjuntos $\mathcal{S}(j)$

Com o intuito de calcular conjuntos $\mathcal{S}_z(j)$ que satisfaçam a Condição 1 utilizando zonotos, se faz necessário um algoritmo para a obtenção da imagem de um zonotopo $X = \{G, c\} \subseteq \mathbb{R}^m$ por uma função não-linear $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Em particular, deve-se encontrar um zonotopo $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ que satisfaça $\varphi(X) \subseteq Y$.

O Lema 2, proposto em Alamo et al. (2005) e Rego et al. (2020), permite a obtenção de uma extensão zonotópica do produto de uma matriz intervalar por uma caixa unitária. Lema 2. Dado um zonotopo centrado $X = MB_\infty^{n_g} \subseteq \mathbb{R}^m$ e uma matriz intervalar $\mathbf{J} \in \mathbb{I}^{n \times m}$, considere a família de zonotos $\mathbf{Z} = \mathbf{J}X$. Uma inclusão zonotópica $\diamond(\mathbf{Z})$ é definida por

$$\diamond(\mathbf{Z}) = \text{mid}(\mathbf{J})X \oplus PB_\infty^n, \quad (15)$$

sendo P uma matriz diagonal satisfazendo

$$P_{ii} = \sum_{j=1}^{n_g} \sum_{k=1}^m \text{rad}(\mathbf{J})_{ik} |M_{kj}|, \quad i = 1 \dots n. \quad (16)$$

A partir destas definições, tem-se $\mathbf{Z} \subseteq \diamond(\mathbf{Z})$.

Partindo do Lema 2 e do teorema do valor médio, o Teorema 3, apresentado em Alamo et al. (2005) e Rego et al. (2020), caracteriza a extensão de valor médio para zonotos.

Teorema 3. Sejam $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe \mathcal{C}^1 , $X = h \oplus MB_\infty^{n_g} \subseteq \mathbb{R}^m$ um zonotopo e $\mathbf{J} \in \mathbb{I}^{n \times m}$ uma matriz intervalar satisfazendo $\nabla^\top \varphi(X) \subseteq \mathbf{J}$. Deste modo, tem-se

$$\begin{aligned} \varphi(X) &\subseteq \varphi(h) \oplus \diamond(\mathbf{J}(X - h)) \\ &= \varphi(h) \oplus (\text{mid}(\mathbf{J})M - P)B_\infty^{n_g+n}, \end{aligned} \quad (17)$$

sendo P definida como em (16).

Uma matriz intervalar $\mathbf{J} \in \mathbb{I}^{n \times m}$ satisfazendo $\nabla^\top \varphi(X) \subseteq \mathbf{J}$ pode ser encontrada a partir de $\mathbb{I}(X)$ por meio de aritmética intervalar (Moore et al., 2009).

Partindo da extensão de valor médio do Teorema 3, um algoritmo pode ser desenvolvido para o cálculo iterativo de zonotos $\mathcal{S}_z(j) \subseteq \mathbb{R}^n$ satisfazendo a Condição 1.

Teorema 4. Considere o sistema não-linear com perturbações aditivas (1), e seja $\mathbf{J}_\pi \in \mathbb{I}^{n \times n}$ uma matriz intervalar satisfazendo $\nabla_x^\top f_\pi(\mathcal{Z}_\pi) \subseteq \mathbf{J}_\pi$. Sejam os zonotos $\mathcal{S}_z(j)$, $j = 0 \dots N$ definidos por

- i $\mathcal{S}_z(0)$ é um zonotopo centrado que contém \mathcal{W} .
- ii $\mathcal{S}_z(j) = \diamond(\mathbf{J}_\pi \mathcal{S}_z(j-1))$, $j = 1 \dots N$.

Tais conjuntos satisfazem a Condição 1.

Prova. A condição $\mathcal{S}_z(0)$ compacto com $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{S}_z(0)$ é trivial. Para cada $j = 1 \dots N$ e dados x_a e v quaisquer,

com $(x_a^\top \ v^\top)^\top \oplus (\mathcal{S}_z(j-1) \times \{0\}) \subseteq \mathcal{Z}_\pi$, considere a função $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(x) = f_\pi(x, v)$.

De $X_a = x_a \oplus \mathcal{S}_z(j-1)$, como $X_a \times \{v\} \subseteq \mathcal{Z}_\pi$, tem-se $\nabla^\top \varphi(X_a) \subseteq \mathbf{J}_\pi$. Logo, pelo Teorema 3,

$$\begin{aligned} f_\pi(X_a, v) &= \varphi(X_a) \subseteq \varphi(x_a) \oplus \diamond(\mathbf{J}_\pi \mathcal{S}_z(j-1)) \\ f_\pi(X_a, v) &\subseteq f_\pi(x_a, v) \oplus \mathcal{S}_z(j). \end{aligned}$$

Portanto, $\forall x_b \in X_a$, $f_\pi(x_b, v) \in f_\pi(x_a, v) \oplus \mathcal{S}_z(j)$. \square

Os conjuntos $\mathcal{S}_z(j)$ dados pelo Teorema 4 podem portanto ser utilizados para a contração das restrições descrita em (9). Vale ressaltar que há métodos algébricos simples para o cálculo da diferença de Pontryagin de um poliedro por um zonotopo (Alvarado, 2007).

Pelo algoritmo descrito no Teorema 4, o conjunto $\mathcal{S}_z(j)$ apresenta n_j geradores a mais que $\mathcal{S}_z(0)$. Portanto, a complexidade dos zonotos cresce com o número de estados e horizonte de predição. Métodos de redução de complexidade de zonotos (Le et al., 2013; Scott et al., 2016) podem ser utilizados para manter o número de geradores abaixo de um valor predeterminado.

Uma matriz intervalar \mathbf{J}_π satisfazendo $\nabla_x^\top f_\pi(\mathcal{Z}_\pi) \subseteq \mathbf{J}_\pi$ pode ser calculada diretamente a partir de $\mathbb{I}(\mathcal{Z}_\pi)$ e f_π . Alternativamente, se $\mathbf{J}_x \in \mathbb{I}^{n \times n}$ e $\mathbf{J}_u \in \mathbb{I}^{n \times m}$ são tais que $\nabla_x^\top f(\mathcal{X}, \mathcal{U}) \subseteq \mathbf{J}_x$ e $\nabla_u^\top f(\mathcal{X}, \mathcal{U}) \subseteq \mathbf{J}_u$, tem-se

$$\mathbf{J}_\pi = \mathbf{J}_x + \mathbf{J}_u K_v, \quad (18)$$

tal que os produtos e as somas em (18) devem ser efetuados conforme a aritmética intervalar (Moore et al., 2009). A Equação (18) enfatiza o efeito da matriz de realimentação em \mathbf{J}_π e, consequentemente, nos conjuntos $\mathcal{S}_z(j)$, e pode ser utilizada para a escolha de uma matriz K_v que reduza a propagação das incertezas (Apêndice A).

Note que, no caso de sistemas lineares, com $f(x, u) = Ax + Bu$, tem-se $\mathbf{J}_x = A$, $\mathbf{J}_u = B$ e $\mathbf{J}_\pi = A + BK_v$ representa o sistema em malha-fechada. Logo, os conjuntos $\mathcal{S}_z(j)$ calculados pelo Teorema 4 se resumem a $\mathcal{S}_z(j) = (A + BK_v)^j \mathcal{W} = \mathcal{S}^*(j)$.

3.2 Comparação com o Critério de Lipschitz

Visando a obtenção de uma constante de Lipschitz para a função $f_\pi: \mathcal{Z}_\pi \rightarrow \mathbb{R}^n$, o seguinte teorema clássico do cálculo multivariável (Lima, 2014) será utilizado.

Teorema 5. Dados uma função $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 , um conjunto convexo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e uma norma $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, um número real $L > 0$ é uma constante de Lipschitz para φ no conjunto X , ou seja

$$\|\varphi(x_b) - \varphi(x_a)\| \leq L \|x_b - x_a\|, \quad \forall x_a, x_b \in X, \quad (19)$$

se e somente se a jacobiana $\nabla^\top \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfaz

$$\|\nabla^\top \varphi(x)\| \leq L, \quad \forall x \in X, \quad (20)$$

tal que $\|\cdot\|$ em (20) representa a norma induzida da transformação linear.

Deste modo, sendo $\mathbf{J}_\pi \in \mathbb{I}^{n \times n}$ uma matriz intervalar, com $\nabla_x^\top f_\pi(\mathcal{Z}_\pi) \subseteq \mathbf{J}_\pi$, uma constante de Lipschitz L_x satisfazendo

$$\|f_\pi(x_b, v) - f_\pi(x_a, v)\|_\infty \leq L_x \|x_b - x_a\|_\infty \quad (21)$$

para quaisquer $(x_a^\top \ v^\top)^\top, (x_b^\top \ v^\top)^\top \in \mathcal{Z}_\pi$ é descrita por

$$L_x = \max_{J \in \mathbf{J}_\pi} \|J\|_\infty, \quad (22)$$

sendo a norma-infinito utilizada para simplificar comparações entre os conjuntos $\mathcal{S}_l(j)$ obtidos por (8) e os $\mathcal{S}_z(j)$ obtidos pelo método proposto no Teorema 4.

Sendo assim, o Teorema 6, cuja prova é dada no Apêndice B, demonstra que o método de obtenção de conjuntos $\mathcal{S}(j)$ proposto neste trabalho é menos conservador que o utilizando o critério de Lipschitz norma-infinito.

Este resultado é esperado, conforme discutido anteriormente, na medida em que o pior caso de ganho é propagado pelo critério de Lipschitz de maneira idêntica em todas as direções do espaço. A aborgadem baseada em zonotos permite evitar este tipo de conservadorismo indesejado na definição dos conjuntos alcançáveis.

Teorema 6. Considere o sistema (4) e $\mathbf{J}_\pi \in \mathbb{I}^{n \times n}$ uma matriz intervalar satisfazendo $\nabla_x^\top f_\pi(\mathcal{Z}_\pi) \subseteq \mathbf{J}_\pi$. Sejam $\mathcal{S}_z(j)$ zonotos obtidos pelo método proposto no Teorema 4 e $\mathcal{S}_l(j)$ dados por:

$$\mathcal{S}_l(j) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq L_x^j w_m\}, \quad j = 0 \dots N, \quad (23)$$

com $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{S}_z(0) \subseteq \mathcal{S}_l(0)$ e $L_x = \max_{J \in \mathbf{J}_\pi} \|J\|_\infty$. Tem-se $\mathcal{S}_z(j) \subseteq \mathcal{S}_l(j)$ para todo $j = 0 \dots N$.

A restrição $\mathcal{S}_z(0) \subseteq \mathcal{S}_l(0)$ pode ser trivialmente satisfeita fazendo $\mathcal{S}_z(0) = \mathcal{S}_l(0)$, uma vez que toda caixa é um zonotopo. A liberdade de considerar qualquer zonotopo como $\mathcal{S}_z(0)$ pode ainda proporcionar uma outra fonte de redução de conservadorismo.

4. ESTUDO DE CASO

Considere o conversor DC-DC Buck-Boost, extensamente utilizado como sistema de referência na literatura de controle preditivo (Lazar et al., 2008; Santos et al., 2019). O sistema não-linear em tempo discreto do conversor, com o equilíbrio transladado para a origem, é representado por (1), com

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha x_2 + \left(\beta - \frac{T}{L} x_2\right) u \\ \delta x_1 + \left(1 - \frac{T}{RC}\right) x_2 + \left(\frac{T}{C} x_1 + \gamma\right) u \end{pmatrix}, \quad (24)$$

tal que x_1, x_2 e u representam, respectivamente, a corrente no indutor, a tensão de saída e o *duty-cycle*, transladados em relação ao ponto de equilíbrio. Os parâmetros $T = 0,65ms$, $C = 2,2mF$ e $L = 4,2mH$ são, respectivamente, o período de amostragem, a capacitância e a indutância do conversor, e $R = 85\Omega$ é a resistência de carga. O ponto

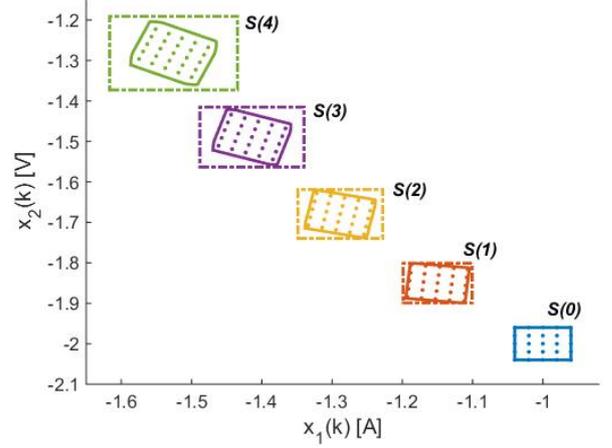


Figura 1. Comparação dos conjuntos $\mathcal{S}(j)$ pelos métodos zonotópico e de Lipschitz. Os conjuntos $\mathcal{S}_z(j)$ são representados por linhas cheias, enquanto os $\mathcal{S}_l(j)$, por linhas tracejadas.

de operação considerado é $V_{in} = 15V$ e $V_{out} = -16V$, a partir do qual os parâmetros α, β, γ e δ são obtidos (Lazar et al., 2008). As seguintes restrições nos estados e entrada são consideradas

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 3\} \\ \mathcal{U} &= \{u \in \mathbb{R} : \|u\|_\infty \leq 0,3\}, \end{aligned} \quad (25)$$

e o sistema é sujeito a perturbações aditivas, limitadas pela caixa $\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^2 : \|w\|_\infty \leq 0,04\}$. Pelo método proposto no Apêndice A, tem-se $K_v = (0 \ 0)$, com constante de Lipschitz norma-infinito $L_x = 1,228$. Para o projeto do controlador NMPC, foi escolhido um horizonte de predição $N = 4$ e uma função custo $L(x, v) = x^\top Q x + u^\top R u$, com $Q = I$ e $R = 1$. A lei estabilizante e a função-custo terminais foram obtidas pelo método proposto em Kothare et al. (1996), resultando em $K_t = (-0,2534 \ 0,3150)$ e $V_f(x) = x^\top P x$, $P = \begin{pmatrix} 3,398 & -5,079 \\ -5,079 & 27,67 \end{pmatrix}$.

Inicialmente, com vistas a avaliar o efeito da abordagem proposta na redução do conservadorismo dos conjuntos alcançáveis, serão avaliados os conjuntos de propagação de perturbação $\mathcal{S}(j)$, para $j = 0 \dots N$. Estes conjuntos foram calculados pelo método zonotópico proposto (Teorema 4) e por Lipschitz norma-infinito (8). Para comparação e verificação de que a Condição 1 é satisfeita, foram simuladas as trajetórias nominais do sistema (24), com $u = K_v x$, para uma malha de pontos do conjunto $x_0 \oplus \mathcal{W}$, com x_0 um ponto de \mathcal{X} tal que as trajetórias assim obtidas satisfaçam as restrições de estado e entrada. O resultado é mostrado na Figura 1.

Conforme esperado, tanto os zonotos $x_{j|0} \oplus \mathcal{S}_z(j)$ como as caixas $x_{j|0} \oplus \mathcal{S}_l(j)$ contêm as trajetórias nominais de todos os pontos em $x_0 \oplus \mathcal{W}$ (Condição 1). Os $\mathcal{S}_z(j)$, no entanto, estão contidos (Teorema 6) e são consideravelmente menores que os $\mathcal{S}_l(j)$, principalmente para maiores valores de j (horizontes maiores de predição). Deste modo, eles proporcionam limites menos conservadores para tais trajetórias, estimando melhor a propagação das incertezas.

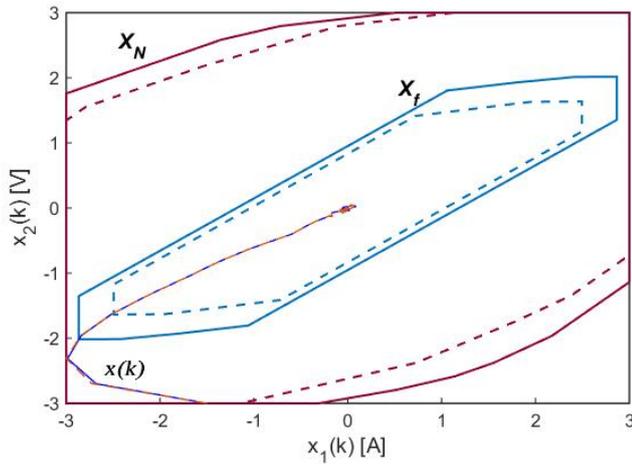


Figura 2. Comparação dos conjuntos terminais, domínios de atração e trajetórias dos controladores preditivos. Novamente, resultados referentes aos métodos zonotópico e de Lipschitz são representados por linhas cheias e tracejadas, respectivamente.

Foram então projetados controladores preditivos pelo método descrito na Seção 2.3, um partindo dos zonótopos $\mathcal{S}_z(j)$ e outro das caixas $\mathcal{S}_l(j)$. A Figura 2 compara os conjuntos terminais \mathcal{X}_f , obtidos pelo método proposto no Apêndice C, e os domínios de atração referentes a cada controlador. Foram também simuladas as respostas dos controladores ao estado inicial $x_0 = (-1, 5 \ -3)^T$, com um tempo de simulação $N_{sim} = 40$ e a mesma sequência aleatória de perturbações $\mathbf{w}_{[0, N_{sim}-1]} \in \mathcal{W}^{N_{sim}}$ com distribuição uniforme e gerada pelo *Mersenne Twister* com semente unitária.

Neste trabalho, optou-se pela formulação robusta baseada num modelo de perturbação determinístico, mas desconhecido. Não obstante, o método proposto pode ser aplicado diretamente à abordagem com restrições probabilísticas na presença de um modelo de perturbação estocástico (Santos et al., 2019).

5. CONCLUSÃO

Neste artigo apresentou-se um novo método de propagação de incertezas baseado em zonótopos, mostrando comparativamente a redução de conservadorismo por ele proporcionada. É também considerado o projeto da matriz de realimentação K_v de modo a reduzir os conjuntos $\mathcal{S}(j)$ de propagação de incertezas. Finalmente, este método é aplicado ao projeto de um controlador preditivo robusto para um sistema de referência, o conversor Buck-Boost. Trabalhos futuros podem investigar outras fontes de conservadorismo do MPC robusto de sistemas não-lineares, em particular no cálculo de conjuntos invariantes robustos, necessário para a obtenção do conjunto terminal.

REFERÊNCIAS

Alamo, T., Bravo, J., and Camacho, E. (2005). Guaranteed state estimation by zonotopes. *Automatica*, 41(6), 1035 – 1043. doi:<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2004.12.008>.

- Alvarado, I. (2007). *Model Predictive control for tracking constrained linear systems*. Ph.D. thesis, Universidad de Sevilla, Sevilla.
- Ferramosca, A., Limon, D., González, A.H., and Camacho, E.F. (2012). Robust mpc for tracking zone regions based on nominal predictions. *Journal of Process Control*, 22(10), 1966 – 1974. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2012.08.013>.
- Kolmanovsky, I. and Gilbert, E.G. (1998). Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 4, 317 – 367. doi:<https://doi.org/10.1155/S1024123X980008668>.
- Kothare, M.V., Balakrishnan, V., and Morari, M. (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(10), 1361 – 1379. doi:[https://doi.org/10.1016/0005-1098\(96\)00063-5](https://doi.org/10.1016/0005-1098(96)00063-5).
- Kouvaritakis, B. and Cannon, M. (2016). *Model Predictive Control*. Springer International Publishing, New York.
- Köhler, J., Müller, M.A., and Allgöwer, F. (2018). A novel constraint tightening approach for nonlinear robust model predictive control. In *2018 Annual American Control Conference (ACC)*, 728–734.
- Lazar, M., Heemels, W., Roset, B., Nijmeijer, H., and Bosch, P.V.D. (2008). Input-to-state stabilizing sub-optimal nmpc with an application to dc-dc converters. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18, 890 – 904.
- Le, V.T.H., Stoica, C., Alamo, T., Camacho, E.F., and Dumur, D. (2013). *Zonotopes - From Guaranteed State-estimation to Control*. ISTE Ltd, London.
- Lima, E.L. (2014). *Curso de Análise vol.2 - 11ª edição*. Projeto Euclides - IMPA, Rio de Janeiro.
- Marruedo, D.L., Alamo, T., and Camacho, E.F. (2002). Input-to-state stable mpc for constrained discrete-time nonlinear systems with bounded additive uncertainties. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002.*, volume 4, 4619 – 4624.
- Mayne, D.Q. (2014). Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*, 50(12), 2967 – 2986. doi:<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.10.128>.
- Mayne, D., Rawlings, J., Rao, C., and Sokaert, P. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6), 789 – 814. doi:[https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00214-9](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00214-9).
- Moore, R.E., Kearfott, R.B., and Cloud, M.J. (2009). *Introduction to Interval Analysis*. Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Rego, B.S., Raffo, G.V., Scott, J.K., and Raimondo, D.M. (2020). Guaranteed methods based on constrained zonotopes for set-valued state estimation of nonlinear discrete-time systems. *Automatica*, 111, 108614. doi:<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108614>.
- Santos, T., Bonzanini, A.D., Heirung, T.A.N., and Mesbah, A. (2019). A constraint-tightening approach to nonlinear model predictive control with chance constraints for stochastic systems. 1641 – 1647. doi:10.23919/ACC.2019.8814623.
- Scott, J.K., Raimondo, D.M., Marseglia, G.R., and Braatz, R.D. (2016). Constrained zonotopes: A new tool for set-based estimation and fault detection. *Automatica*, 69, 126 – 136. doi:<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.09.016>.

Apêndice A. CÁLCULO DA MATRIX DE REALIMENTAÇÃO K_v

É apresentado aqui um procedimento para a escolha da matriz de realimentação K_v à luz da nova formulação proposta neste trabalho, que busca minimizar os conjuntos de propagação de incertezas $\mathcal{S}_z(j)$. Dado o Teorema 6, uma forma de reduzir os conjuntos $\mathcal{S}_z(j)$ é minimizando a constante de Lipschitz $L_x = \max_{J \in \mathbf{J}_\pi} \|J\|_\infty$.

A partir de (18), sendo $\mathbf{A} = \mathbf{J}_x$ e $\mathbf{B} = \mathbf{J}_u$ obtidos previamente por aritmética intervalar, tem-se

$$\begin{aligned} mid(\mathbf{J}_\pi) &= mid(\mathbf{A}) + mid(\mathbf{B})K_v = M_a + M_b K_v \\ rad(\mathbf{J}_\pi) &= rad(\mathbf{A}) + rad(\mathbf{B})|K_v| = R_a + R_b |K_v|, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

e a constante de Lipschitz L_x é dada por:

$$\begin{aligned} L_x &= \max_i \sum_{j=1}^n (|mid(\mathbf{J}_\pi)_{ij}| + rad(\mathbf{J}_\pi)_{ij}) \\ &= \max_i \sum_{j=1}^n (|(M_a + M_b K_v)_{ij}| + (R_a + R_b |K_v|)_{ij}). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Logo, a matriz K_v que minimiza L_x pode ser obtida por meio da solução do seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \min_{K_v, P, \gamma} \quad & \gamma \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} P \geq |M_a + M_b K_v| + (R_a + R_b |K_v|) \\ \gamma \geq \sum_{j=1}^n P_{ij}, \quad i = 1 \dots n \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

que pode ser convertido em um programa linear com $n(n + 2n_u) + 1$ variáveis e $2n(n + n_u) + n$ restrições.

Apêndice B. PROVA DO TEOREMA 6

Segue a prova do Teorema 6, que garante que os conjuntos $\mathcal{S}_z(j)$ obtidos pelo método proposto são menos conservadores que os conjuntos $\mathcal{S}_l(j)$ calculados utilizando o critério de Lipschitz norma-infinito.

Prova. Como $\mathcal{S}_z(0) \subseteq \mathcal{S}_l(0)$, é suficiente, por indução, mostrar que $\mathcal{S}_z(j) \subseteq \mathcal{S}_l(j) \Rightarrow \mathcal{S}_z(j+1) \subseteq \mathcal{S}_l(j+1)$.

Sendo $\mathcal{S}_z(j) = M\mathcal{B}_\infty^{n_g}$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_z(j+1) &= \diamond(\mathbf{J}_\pi \mathcal{S}_z(j)) \\ &= (mid(\mathbf{J}_\pi)M \ P) \mathcal{B}_\infty^{n_g+n}. \end{aligned}$$

Sendo $\bar{M} = (mid(\mathbf{J}_\pi)M \ P)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \|\bar{M}\|_\infty &\leq \max_i \left(P_{ii} + \sum_{j=1}^{n_g} \sum_{k=1}^n |mid(\mathbf{J}_\pi)_{ik}| |M_{kj}| \right) \\ &= \max_i \left(\sum_{j=1}^{n_g} \sum_{k=1}^n J_{ik}^* |M_{kj}| \right) \\ &= \|J^* |M|\|_\infty, \end{aligned}$$

sendo $J^* = |mid(\mathbf{J}_\pi)| + rad(\mathbf{J}_\pi)$. Note que, da hipótese de indução $\mathcal{S}_z(j) \subseteq \mathcal{S}_l(j)$, $\|\bar{M}\|_\infty = \|M\|_\infty \leq L_x^j w_m$. Tem-se também $\|J^*\|_\infty = \max_{J \in \mathbf{J}_\pi} \|J\|_\infty = L_x$, logo:

$$\|\bar{M}\|_\infty \leq \|J^* |M|\|_\infty \leq \|J^*\|_\infty \|M\|_\infty \leq L_x^{j+1} w_m,$$

o que corresponde a $\mathcal{S}_z(j+1) \subseteq \mathcal{S}_l(j+1)$. \square

Apêndice C. CÁLCULO DO CONJUNTO TERMINAL

Para o calculo do conjunto terminal $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{Z}_{\pi,t}$, foi utilizado o método iterativo de cálculo do máximo conjunto robusto positivamente invariante (MRPI) para sistemas lineares descrito em Kolmanovsky and Gilbert (1998), com as não-linearidades tratadas como perturbações adicionais.

Em particular, foi considerado para o cálculo do MRPI o conjunto ampliado de restrições $\mathcal{W}_{amp} = \mathcal{S}(N) \oplus \mathcal{W}_{nl}$, com \mathcal{W}_{nl} representando o máximo desvio entre o sistema real e o linearizado, ou seja

$$\delta(x) = f(x, K_t x) - A_f x \in \mathcal{W}_{nl}, \quad \forall x \in \mathcal{Z}_{\pi,t}, \quad (\text{C.1})$$

tal que a lei de controle terminal é dada por $u_t(x) = v_t(x) + K_v x = K_t x$ e a matriz A_f do sistema linearizado em malha fechada é definida por $A_f = A + B K_t$. No entanto, devido ao conservadorismo decorrente da consideração das não-linearidades como perturbações aditivas, a aplicação do método proposto em Kolmanovsky and Gilbert (1998) ao cálculo de conjuntos terminais de sistemas não-lineares pode resultar em conjuntos vazios.

Para reduzir este conservadorismo, o conjunto $\mathcal{Z}_{\pi,t}$ pode ser reescalonado por um parâmetro $\lambda \in (0, 1]$, obtendo conjuntos $\mathcal{Z}_{\pi,t}(\lambda) = \lambda \mathcal{Z}_{\pi,t}$. Com a contração das restrições terminais, os desvios entre o sistema real e linearizado são reduzidos. Em particular, pode ser obtida uma função- \mathcal{K} $\alpha(\lambda)$ tal que

$$\mathcal{W}_{nl}(\lambda) \subseteq \alpha(\lambda) \mathcal{W}_{nl}. \quad (\text{C.2})$$

No caso do conversor buck-boost, tem-se $\alpha(\lambda) = \lambda^2$, uma vez que a não linearidade decorre de produtos entre estados e entrada. De modo geral, tem-se $\alpha(\lambda)$ α -pequeno de λ , e os conjuntos $\mathcal{W}_{nl}(\lambda)$ se reduzem mais rapidamente que os $\mathcal{Z}_{\pi,t}(\lambda)$.

São então calculados, pelo método descrito na Seção 3.2.2 de Kouvaritakis and Cannon (2016), limites superiores para os mínimos conjuntos robustos positivamente invariantes (mRPI) do sistema linearizado sujeito às perturbações $\mathcal{S}(N)$ e \mathcal{W}_{nl} (\mathcal{R}_∞^S e \mathcal{R}_∞^{nl} , respectivamente) e a existência de um conjunto RPI do sistema linearizado sujeito à restrição

$\mathcal{Z}_{\pi,t}(\lambda)$ e à perturbação $\mathcal{W}_{amp}(\lambda) = \mathcal{S}(N) \oplus \mathcal{W}_{nl}(\lambda)$ é equivalente à condição

$$\mathcal{R}_{\infty}^{\mathcal{S}} \oplus \alpha(\lambda)\mathcal{R}_{\infty}^{nl} \subseteq \lambda\mathcal{Z}_{\pi,t}. \quad (\text{C.3})$$

Deste modo, é buscado (caso exista) o maior valor de $\lambda \in (0, 1]$ tal que (C.3) seja satisfeita, e um conjunto terminal \mathcal{X}_f não-vazio pode então ser obtido a partir de $\mathcal{Z}_{\pi,t}(\lambda^*)$ e $\mathcal{W}_{amp}(\lambda^*)$. Para os controladores propostos na seção 4, obteve-se $\lambda_z^* = 1$ e $\lambda_l^* = 0,875$ para os métodos zonotópico e de Lipschitz, respectivamente.

Deve-se ressaltar que esta abordagem escalonada generaliza o cálculo do invariante robusto poliedral para sistemas não-lineares por meio de aproximação linear usada em Santos et al. (2019). Caso a técnica de escalonamento das restrições não fosse empregada ($\lambda_z^* = \lambda_l^* = 1$), o conjunto terminal baseado na constante de Lipschitz seria vazio, confirmando os benefícios da técnica baseada em zonotos. Esta generalização também é uma das contribuições deste trabalho.