

Rastreador recursivo de subespaços e ordem do modelo aplicado à estimação adaptativa do número de componentes harmônicos e inter-harmônicos em sinais elétricos

Guilherme Ogioni Vieira do Nascimento *

Marcelo Antônio Alves Lima *

Leandro Rodrigues Manso da Silva * Carlos Augusto Duque *

* *Laboratório de Processamento de Sinais e Telecomunicações, Faculdade de Engenharia, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, (e-mails: guilherme.ogioni@engenharia.ufjf.br, marcelo.lima@ufjf.edu.br, leandro.manso@ufjf.edu.br, carlos.duque@ufjf.edu.br).*

Abstract: In many applications it is necessary to know previously the exact number of sinusoidal components present in a signal, as is the case for the high frequency resolution parametric methods for estimating component parameters in electrical signals in presence of noise. This work proposes the use of a method for estimating the number of harmonic and interharmonic components in electrical signals based on subspace techniques and information theory. It is a recursive method that uses the PASTd (Projection Approximation Subspace Tracking with deflation) subspace tracker, which presents low computational complexity order $O(mr)$, where m is the input vector length and r is the signal subspace dimension. In addition, the method uses an order detector based on the information theory criteria derived from the AIC (Akaike Information Criterion) and MDL (Minimum Description Length). Results of several simulation tests are generated and discussed in order to characterize the method and identify possible strengths and weaknesses.

Resumo: Em muitas aplicações se faz necessário conhecer previamente o número exato de componentes senoidais presentes em um sinal, como é o caso dos métodos paramétricos de alta resolução de frequência para estimação de parâmetros de componentes em sinais elétricos na presença de ruído. Este trabalho propõe a utilização de um método para estimação do número de componentes harmônicos e inter-harmônicos em sinais elétricos baseado em técnicas de subespaços e em teoria da informação. Trata-se de um método recursivo que se utiliza do rastreador de subespaços PASTd (*Projection Approximation Subspace Tracking with deflation*), que apresenta complexidade computacional baixa de ordem $O(mr)$, onde m denota o tamanho do vetor de entrada e r a dimensão do subespaço de sinal. Além disso, o método utiliza um detector de ordem baseado nos critérios advindos da teoria da informação AIC (*Akaike Information Criterion*) e MDL (*Minimum Description Length*). Resultados de diversos testes de simulação serão gerados e discutidos com o intuito de caracterizar o método e identificar possíveis pontos fortes e fracos.

Keywords: Subspace tracking; Information theory; Harmonics and inter-harmonics; Model order estimation; Time-varying electrical signals.

Palavras-chaves: Rastreamento de subespaços; Teoria da informação; Harmônicos e inter-harmônicos; Estimação de ordem do modelo; Sinais elétricos variantes no tempo.

1. INTRODUÇÃO

Diversos métodos já foram propostos para estimar parâmetros de sinais elétricos contendo harmônicos e inter-harmônicos na presença de ruído. Tais métodos tipicamente estimam amplitudes e fases considerando uma quantidade pré-definida de frequências ou de bandas de frequência (Gu and Bollen, 2008; de Carvalho et al., 2009; Chang et al., 2009; Chen and Chen, 2018).

Embora a transformada de Fourier de tempo curto (STFT - *Short-Time Fourier Transform*) (Ashouri et al., 2019) seja um método simples e rápido, ela sofre das mesmas limitações da transformada rápida de Fourier (FFT - *Fast Fourier Transform*) (Lin, 2017) no que diz respeito a uma resolução de frequência baixa e fixa. A transformada Wavelet discreta (DWT - *Discrete Wavelet Transform*) (Duque et al., 2011) permite realizar uma Análise Multi-Resolução (AMR) no plano tempo-frequência, mas cada banda de frequência pode conter mais de um compo-

nente harmônico/inter-harmônico pelo fato das bandas de frequência não serem uniformes, não conseguindo-se assim a separação efetiva dos componentes do sinal.

Métodos paramétricos de alta resolução de frequência baseados em técnicas de subespaços têm sido aplicados com sucesso para análise espectral (Lobos et al., 2006), e geralmente fornecem estimativas com melhor acurácia do que as técnicas clássicas baseadas em transformadas tais como a FFT e a DWT. Exemplos típicos de técnicas paramétricas para tais propósitos são o algoritmo MUSIC (*Multiple Signal Classification*) (Zhang et al., 2017), o método de Prony (Chang et al., 2009) e o ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*) (Jain et al., 2013).

O número exato de componentes harmônicos e inter-harmônicos presentes em um sinal de tensão ou corrente real, também denominado ordem do modelo, geralmente não é conhecido a princípio. Para uma sequência de dados não-estacionários, esse parâmetro pode ser variante no tempo. No entanto, ele deve ser especificado toda vez antes de executar as técnicas paramétricas citadas acima. Uma especificação incorreta pode resultar em componentes espectrais espúrios. Em Jain and Singh (2012) é proposto um algoritmo de estimação da ordem do modelo a ser executado antes do ESPRIT, fornecendo assim para este uma estimativa da dimensão do subespaço de sinal, a qual é igual ao dobro do número de componentes harmônicos/inter-harmônicos do sinal. No entanto, o algoritmo proposto pode funcionar adequadamente apenas para sinais estacionários. Em Jain et al. (2013) é proposta uma técnica adaptativa para estimação de harmônicos e inter-harmônicos em sinais não-estacionários. No entanto, permanece a necessidade dos componentes do sinal serem estacionários por blocos, ou seja, deve existir segmentos estacionários do sinal. Em outras palavras, não pode haver variações contínuas nos parâmetros do sinal.

A maioria das implementações de técnicas baseadas em subespaços tem se fundamentado na decomposição de autovalores (ED - *Eigenvalue Decomposition*) em blocos ou batelada (*batch mode*) da matriz de covariância amostral do sinal de entrada, o que requer $O(m^3)$ operações computacionais para ser executada (Golub and Loan, 1996), sendo m correspondente à dimensão da matriz de covariância. Tal abordagem se torna não adequada para processamento adaptativo, já que a mesma requeria o cálculo repetido da ED para cada bloco de dados, sendo portanto uma tarefa que consumiria muito tempo. Neste contexto, cada execução da ED seria realizada integralmente para cada novo bloco de dados sem considerar os resultados das estimações que fossem realizadas para os blocos de dados anteriores. Por outro lado, a utilização de algoritmos recursivos de rastreamento de subespaços tende a reduzir substancialmente a complexidade computacional devido ao fato de operarem com dimensões menores e utilizarem informações de execuções anteriores. Um dos algoritmos mais conhecidos é o de rastreamento de subespaço por aproximação de projeção com deflação (PASTd - *Projection Approximation Subspace Tracking with deflation*) (Bin Yang, 1995b). O algoritmo PASTd demanda apenas $O(mr)$ operações computacionais para rastrear um subespaço de sinal de dimensão r , onde tipicamente $r \ll m$.

A maioria dos algoritmos de rastreamento de subespaços assume uma dimensão do subespaço de sinal, ou ordem do modelo, conhecida *a priori* e também fixa. Em aplicações reais, no entanto, o número de componentes e, portanto, o posto (*rank*) da matriz de covariância do sinal pode ser desconhecido ou até mesmo variante no tempo. As principais contribuições deste artigo residem na descrição e implementação do método proposto no trabalho de Bin Yang (1995a) para rastreamento de subespaços e estimação do número de componentes do subespaço de sinal, porém voltadas aqui para aplicações na estimação do número de componentes harmônicos e inter-harmônicos presentes em formas de onda de tensão ou corrente em sistemas elétricos. Tal informação é de extrema importância para que os métodos de estimação de componentes harmônicos e inter-harmônicos consigam extrair corretamente os parâmetros (frequências, amplitudes e fases) dos componentes do subespaço de sinal sem sofrerem efeito de informações do subespaço de ruído, evitando assim extrair componentes espectrais espúrios e também evitando sobrecargas computacionais devido a sobredeterminações da ordem do modelo.

O artigo está organizado da forma descrita como se segue. A Seção 2 descreve o modelo de sinal assumido neste trabalho bem como os algoritmos dos rastreadores de subespaços e da ordem do modelo implementados. A Seção 3 apresenta diversos resultados alcançados empregando a metodologia implementada com o intuito de se rastrear o número de componentes em sinais estacionários bem como em sinais com parâmetros variantes no tempo. Por fim, a Seção 4 apresenta as conclusões acerca da implementação executada e dos resultados alcançados.

2. DESCRIÇÃO DO ALGORITMO

2.1 Modelagem do sinal

Os sinais distorcidos do Sistema Elétrico de Potência (SEP) podem ser modelados como um somatório de senos imersos em um ruído (Chang et al., 2009), geralmente caracterizado como um ruído branco gaussiano. Na n -ésima amostra, o sinal $x[n]$ pode ser representado por:

$$x[n] = \sum_{i=1}^r a_i[n] \sin(2\pi f_i[n] T_s n + \theta_i[n]) + \nu[n], \quad (1)$$

onde $\nu[n]$ representa o ruído, r representa o número de componentes harmônicos e inter-harmônicos que fazem parte do sinal, $T_s = 1/F_s$ é o período de amostragem, F_s é a frequência de amostragem e $a_i[n]$, $f_i[n]$ e $\theta_i[n]$ correspondem, respectivamente, à amplitude, frequência e fase da n -ésima amostra para o i -ésimo componente. Deste modo, o i -ésimo componente ou fonte na n -ésima amostra pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} s_i[n] &= a_i \sin(2\pi f_i T_s n + \theta_i) \\ &= a_i \sin(2\pi f_i T_s n) \cos(\theta_i) + a_i \cos(2\pi f_i T_s n) \sin(\theta_i) \\ &= s_{i1} \sin(2\pi f_i T_s n) + s_{i2} \cos(2\pi f_i T_s n), \end{aligned} \quad (2)$$

onde $s_{i1} = a_i \cos(\theta_i)$ e $s_{i2} = a_i \sin(\theta_i)$. Além disso, os termos $a_i[n]$, $f_i[n]$ e $\theta_i[n]$ foram simplificados para a_i ,

f_i e θ_i . Desta forma, pode-se perceber que cada fonte s_i é composta por dois componentes senoidais ortogonais entre si. Com isto, a ordem do modelo de um sinal elétrico representado por (1) será o dobro do número de componentes harmônicos e inter-harmônicos que o compõem.

2.2 Rastreador de subespaços

Neste trabalho será utilizado o algoritmo PASTd (Bin Yang, 1995b) para rastreamento de subespaços. O algoritmo se encontra sumarizado na Tabela 1, onde: β é chamado fator de esquecimento ($0 < \beta < 1$); $\mathbf{w}_i[n]$ e $\lambda_i[n]$ ($1 \leq i \leq r$) são, respectivamente, as estimativas do i -ésimo autovetor e do i -ésimo autovalor da matriz de covariância do vetor de entrada m -dimensional $\mathbf{x}[n] = [x[n], x[n-1], \dots, x[n-m+1]]^T$. Os autovalores são assumidos estarem dispostos em ordem não-crescente.

Tabela 1. Algoritmo PASTd (Bin Yang, 1995b)

Inicialização:
Escolha $\lambda_i[-1]$ e $\mathbf{w}_i[-1]$ adequadamente
Para $n = 0, 1, \dots$, faça:
$\mathbf{x}_1[n] = \mathbf{x}[n]$
Para $i = 1, \dots, r$, faça:
$y_i[n] = \mathbf{w}_i^H[n-1]\mathbf{x}_i[n]$
$\lambda_i[n] = \beta\lambda_i[n-1] + y_i[n] ^2$
$\mathbf{e}_i[n] = \mathbf{x}_i[n] - \mathbf{w}_i[n-1]y_i[n]$
$\mathbf{w}_i[n] = \mathbf{w}_i[n-1] + \mathbf{e}_i[n]\frac{y_i^*[n]}{\lambda_i[n]}$
$\mathbf{x}_{i+1}[n] = \mathbf{x}_i[n] - \mathbf{w}_i[n]y_i[n]$
Fim
Fim

O algoritmo PASTd utiliza a técnica de deflação. Com isto, após o primeiro auto-componente $\{\mathbf{w}_1[n], \lambda_1[n]\}$ ser estimado, o algoritmo remove a projeção de $\mathbf{x}_1[n] = \mathbf{x}[n]$ na direção do primeiro autovetor. Este procedimento é realizado pela última equação da Tabela 1. Após isto, o segundo auto-componente do sinal se torna o dominante no vetor de amostras atualizado $\mathbf{x}_2[n]$ e pode ser extraído da mesma forma. Aplicando-se este procedimento repetidamente, obtém-se sequencialmente todos os r auto-componentes do sinal.

O algoritmo PASTd requer $4mr + O(r)$ operações em cada instante n (Bin Yang, 1995b). Alguns algoritmos apresentam grande esforço computacional devido ao fato de atualizarem todos os m autovalores e autovetores em cada instante n . Uma redução no esforço computacional do PASTd é alcançada aqui ao se estimar a ordem r (tipicamente $r \ll m$) e fazer o algoritmo rodar de $i = 1$ até $i = r$ ao invés de rodar até $i = m$ em todo instante n (vide Tabela 1).

2.3 Rastreador da ordem do modelo

O primeiro passo para rastrear a ordem do modelo senoidal de um sinal é discriminar os autovalores de sinal daqueles de ruído. Assumindo-se ruído branco (possivelmente após uma etapa de pré-branqueamento do sinal de entrada), todos os autovalores do subespaço de ruído são idênticos (Roy and Kailath, 1989). Ao observar a Tabela 1, pode-se perceber que o último passo do algoritmo PASTd consiste

em calcular o vetor de amostras atualizado, $\mathbf{x}_{r+1}[n]$. O mesmo resulta do vetor de amostras original $\mathbf{x}_1[n] = \mathbf{x}[n]$ após r passos de deflação, e pode ser entendido como a projeção de $\mathbf{x}[n]$ no subespaço de ruído. Portanto, $\|\mathbf{x}_{r+1}[n]\|^2/(m-r)$ representa uma estimativa instantânea do autovalor de ruído. Uma estimativa exponencialmente ponderada do autovalor de ruído é então dada por (Bin Yang, 1995a):

$$\lambda_N[n] = \beta\lambda_N[n-1] + \|\mathbf{x}_{r+1}[n]\|^2/(m-r). \quad (3)$$

No instante n , as estimativas de todos os m autovalores podem ser dispostas da seguinte forma:

$$\lambda_1[n], \dots, \lambda_r[n], \lambda_{r+1}[n] = \lambda_N[n], \dots, \lambda_m[n] = \lambda_N[n], \quad (4)$$

onde $\lambda_N[n]$ é repetido $m-r$ vezes de forma a aproximar todos os autovalores do subespaço de ruído.

Em Bin Yang (1995a) é proposta a aplicação de dois critérios advindos da teoria da informação para estimar de forma *online* a dimensão do subespaço de sinal: o AIC (*Akaike Information Criterion*) e o MDL (*Minimum Description Length*) (Wax and Kailath, 1985). Eles são definidos respectivamente como:

$$\text{AIC}[k] = (m-k)L \ln(\alpha[k]) + k(2m-k), \quad (5)$$

$$\text{MDL}[k] = (m-k)L \ln(\alpha[k]) + k(2m-k)\frac{\ln L}{2}, \quad (6)$$

onde $k = 0, 1, \dots, m-1$, e

$$\alpha[k] = \frac{(\sum_{i=k+1}^m \lambda_i[n]) / (m-k)}{(\prod_{i=k+1}^m \lambda_i[n])^{1/(m-k)}} \quad (7)$$

é a razão entre a média aritmética e a média geométrica dos $m-k$ menores autovalores. O parâmetro L denota o comprimento efetivo da janela exponencial determinada pelo fator de esquecimento β . Assim, L pode ser calculado da seguinte forma:

$$L = \sum_{i=1}^n \beta^{n-i} = \frac{1-\beta^n}{1-\beta} \approx \frac{1}{1-\beta}, \quad (8)$$

onde a aproximação acima pode ser considerada para $n \gg 1$. A razão descrita por (7) é igual a 1 para aqueles valores de k para os quais as estimativas de autovalores são iguais (repetidas por definição), e maior que a unidade para os demais. Isto faz com que $\ln(\alpha[k]) = 0$ para os valores de k cujas estimativas de autovalores sejam repetidas e $\ln(\alpha[k]) > 0$ para os demais valores de k em (5) ou em (6). Isto por sua vez faz com que $\text{AIC}[k]$ ou $\text{MDL}[k]$ seja estritamente decrescente para $0 \leq k \leq r$ e estritamente crescente para $r \leq k \leq m-1$. Portanto, a estimativa da dimensão r do subespaço de sinal será dada pelo valor de k para o qual o critério ($\text{AIC}[k]$ ou $\text{MDL}[k]$) seja mínimo.

Agora, assumamos que $r[n]$ e $r_s[n]$ correspondam, respectivamente, ao número atualizado de auto-componentes e ao

número de fontes do subespaço de sinal detectados no instante n . Portanto, $r_s[n]$ corresponde à ordem do modelo senoidal do sinal de entrada estimada no instante n . Em Bin Yang (1995a) é proposta a implementação da equação $r[n] = r_s[n] + r_{\text{aux}}$, onde r_{aux} corresponde a um número auxiliar de auto-componentes utilizados. Esta estratégia é empregada porque deve-se sempre rastrear um ou alguns poucos auto-componentes a mais do que o número detectado de fontes do subespaço de sinal. Esses são auto-componentes do subespaço de ruído mas que se comportam como candidatos a novos auto-componentes do subespaço de sinal que possam vir a surgir no sinal monitorado $x[n]$. Por simplicidade, neste trabalho será assumido $r_{\text{aux}} = 1$.

O algoritmo completo para rastreamento se encontra na Tabela 2. Em cada instante n , tem-se a atualização de $r[n-1]$ auto-componentes do subespaço de sinal via o algoritmo PASTd e também a estimação do autovalor de ruído através de (3). Em seguida, o critério AIC ou MDL é aplicado às estimativas dos autovalores, dispostas conforme (4), para atualizar a ordem do modelo estimada $r_s[n]$. Uma de três situações distintas pode ocorrer a cada instante n em relação ao número de fontes r_s (ordem do modelo) estimadas no instante $n-1$: não se altera; alguma(s) fonte(s) desaparece(m), ou; nova(s) fonte(s) aparece(m). Essas três situações serão descritas a seguir.

Tabela 2. Algoritmo completo para rastreamento de subespaços e ordem do modelo - inspirado em Bin Yang (1995a)

Para $n = 0, 1, \dots$, faça:

1. Realize a atualização de $\{\mathbf{w}_i[n], \lambda_i[n] | i = 1, \dots, r[n-1]\}, \lambda_N[n]$ utilizando o algoritmo PASTd e (3).
2. Calcule AIC[k] ou MDL[k] a partir dos autovalores atualizados em (4), estime o número de sinais $r_s[n]$, e faça $r[n] = r_s[n] + 1$.
3. Se $r[n] < r[n-1]$
Remova o(s) auto-componente(s)
 $\{\mathbf{w}_i[n], \lambda_i[n] | i = r[n] + 1, \dots, r[n-1]\}$.
Se $r[n] > r[n-1]$
Calcule um novo auto-componente auxiliar,
 $\{\mathbf{w}_{r[n]}[n], \lambda_{r[n]}[n]\}$, ao voltar ao passo 1.

Fim.

Se o número de fontes não se altera no instante n , tem-se então, nesse instante, $r_s[n-1]$ autovalores do subespaço de sinal, e o autovalor auxiliar $\lambda_{r[n-1]}[n]$ é tão pequeno quanto o autovalor médio de ruído $\lambda_N[n]$. Neste caso, o critério AIC ou MDL irá retornar $r_s[n] = r_s[n-1]$, ou seja, a ordem do modelo se manteve inalterada.

Se algumas fontes desaparecem, os últimos autovalores irão se aproximar do nível de $\lambda_N[n]$, e obtém-se uma estimativa menor da ordem do modelo $r_s[n] < r_s[n-1]$. Neste caso, remove-se os auto-componentes que não são mais necessários, $\{\mathbf{w}_i[n], \lambda_i[n] | i = r[n] + 1, \dots, r[n-1]\}$.

Se novas fontes aparecem, o autovalor auxiliar $\lambda_{r[n-1]}[n]$ se torna maior do que $\lambda_N[n]$, resultando em uma estimativa de ordem de modelo aumentada $r_s[n] = r_s[n-1] + 1 = r[n-1]$. Neste caso, aceita-se o auto-componente auxiliar $\{\mathbf{w}_{r[n-1]}[n], \lambda_{r[n-1]}[n]\}$ como um auto-componente adicional do subespaço de sinal.

3. RESULTADOS DE TESTES DO ALGORITMO PARA ESTIMAÇÃO DE ORDEM DO MODELO

Foram realizadas simulações do estimador de ordem, no *software* Matlab[®], com o intuito de checar a funcionalidade e robustez do mesmo. É desejável que o estimador apresente o menor transitório possível, convirja para a ordem correta e seja eficiente em reconhecer variações de ordem, amplitude e/ou frequência.

3.1 Sinal estacionário

O resultado esperado mais importante é a convergência correta da ordem do modelo. Portanto é interessante, como teste inicial, estimar o número de componentes de um sinal estacionário simples.

Tabela 3. Sinal Estacionário

a_i (p.u.)	1	1/3	1/5	1/7
f_i (Hz)	60	180	300	420
θ_i (°)	0			
F_s (Hz)	2400			

A Tabela 3 apresenta os parâmetros do sinal, gerado através de (1). Neste e em alguns outros testes neste trabalho, as amplitudes dos harmônicos serão adotadas como sendo o inverso da ordem do harmônico, inspirado pelo espectro de corrente de retificadores de n -pulsos (Abdollahi et al., 2013). O ruído presente no sinal é branco gaussiano aditivo com *Signal to Noise Ratio* (SNR) igual a 20 dB. Definiu-se uma janela de tamanho suficiente para englobar dois ciclos do componente fundamental, como explicitado em (9). Além disso, é interessante ter-se pelo menos um ciclo do sinal, ou seja, 40 amostras, contido na janela efetiva definida por L (vide (8)). Tem-se, portanto, β definido como se segue em (10).

$$m = \frac{2 \cdot F_s}{f_0} = \frac{2 \cdot 2400}{60} = 80 \quad (9)$$

$$\beta = 1 - \frac{1}{L} = 1 - \frac{1}{40} = 0,975 \quad (10)$$

Para mérito de comparação, calculou-se os autovalores da matriz de covariância do sinal de entrada. Como esse cálculo assume estacionariedade dos dados, ele só deve ser utilizado como referência nos casos de sinais que não sofrem variações em seus parâmetros ao longo da janela de tempo analisada. Pode-se perceber, de acordo com a Figura 1(a), que os autovalores rastreados pelo PASTd acompanham adequadamente as linhas pontilhadas, referentes aos autovalores da matriz de covariância. A característica serial, ou sequencial, do rastreador PASTd fica evidente através da análise gráfica dos transitórios, onde os autovalores maiores são rastreados primeiro. Pode-se perceber que a convergência dos autovalores menores só é alcançada após os maiores terem convergido. Também é interessante perceber que, após a convergência (amostra $n = 242$), o autovalor auxiliar, $\lambda_{\text{aux}}[n]$, passa a delimitar adequadamente uma fronteira de separação entre os autovalores de sinal e o autovalor estimado de ruído, $\lambda_N[n]$.

Na Figura 1(b) tem-se a estimação do número de autovalores referentes ao subespaço de sinal. Ele, portanto,

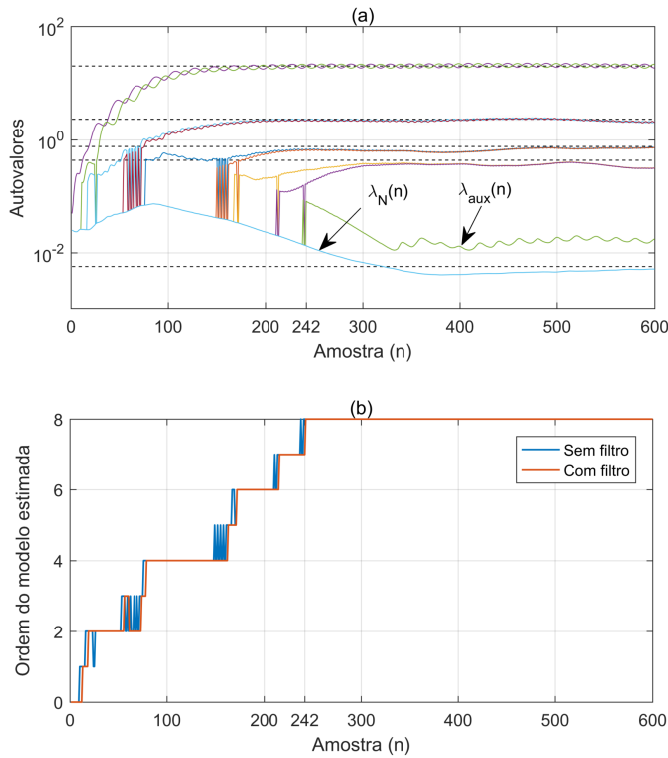


Figura 1. Estimação para o sinal estacionário: (a) rastreamento dos autovalores; (b) estimação da ordem do modelo.

se refere ao dobro do número estimado de componentes senoidais (afinal, cada par de autovalores é referente a um componente senoidal presente no sinal). O algoritmo se demonstrou eficaz na estimação correta da ordem do modelo do sinal analisado, que tem em si o componente fundamental e três harmônicos. Para evitar oscilações rápidas demais que não irão significar necessariamente uma mudança autêntica da ordem do modelo, implementou-se um filtro de média móvel recursivo de comprimento pequeno na saída do estimador.

Percebeu-se durante as simulações que um β alto (tornando L maior do que um ciclo da frequência fundamental do sinal) é desnecessário e torna o transitório do PASTd mais lento. É importante perceber que a parcela transitória do estimador de ordem do modelo é devida ao transitório do rastreador de subespaço PASTd, já que somente após o autovalor auxiliar ($\lambda_{aux}[n]$) se separar do autovalor estimado de ruído ($\lambda_N[n]$), em $n = 242$, é que a ordem do modelo estimada alcançou o valor correto e entrou em regime permanente.

O erro acumulado devido à característica sequencial do rastreador de subespaço (ordem decrescente de estimação de autovalores) diminui a exatidão dos autovalores de sinal menores (ainda assim, vale observar que a escala apresentada na Figura 1(a) é logarítmica, o que torna a parte inferior do gráfico mais sensível e pode gerar a sensação de imprecisão). A estimativa do autovalor de ruído, $\lambda_N[n]$, também está susceptível a este efeito indesejado, inviabilizando a eficácia do algoritmo PASTd

diante de sinais com SNR alta, pois o erro acumulado nestes casos poderá ser alto o suficiente para manter as primeiras estimativas de autovalores de ruído acima da estimativa calculada através de (3). Quando isso acontece, o estimador de ordem do modelo se confunde e considera-as como estimativas de autovalores de sinal, superestimando a ordem do modelo. Na Seção 3.5 será analisado em detalhes um caso com SNR alta. Nas demais seções de resultados, serão tratados apenas sinais ruidosos.

3.2 Sinal com variações no número de componentes senoidais

O estimador se demonstrou funcional em contabilizar corretamente os componentes em um sinal estacionário. É importante também que o algoritmo seja capaz de continuar fiel à ordem verdadeira mesmo quando esta varia no tempo. Propõe-se o sinal da Tabela 4, com F_s , θ , β , m e SNR mantidos iguais aos do caso estacionário apresentado anteriormente (2400 Hz, 0° , 0,975, 80, 20 dB, respectivamente). As amplitudes dos componentes senoidais do sinal são iguais ao inverso da ordem harmônica de cada um.

Tabela 4. Sinal com variações no número de componentes senoidais

Amostra (n)	Componentes harmônicos							Ordem
1 : 2400	1°	3°	5°	7°	9°	11°	13°	14
2401 : 4800	1°	3°	5°					6
4801 : 7200	1°	3°	5°	7°	9°	11°		12

Os resultados obtidos na simulação e apresentados na Figura 2 atestam a eficácia do algoritmo em estimar a ordem do modelo correta mesmo quando há mudanças na mesma. Os transitórios de rastreo das mudanças da ordem do modelo (em $n = 2401$ e $n = 4801$) foram bastante rápidos, como pode ser percebido na Figura 2(b).

A Figura 2(a) mostra claramente quatro pares de autovalores saindo do subespaço de sinal e entrando no subespaço de ruído em caso de decremento da ordem (após $n = 2401$, ordem estimada indo de 14 para 6), e três pares de autovalores saindo do subespaço de ruído e indo para o subespaço de sinal em caso de incremento da ordem (após $n = 4801$, ordem estimada indo de 6 para 12). Também é interessante notar que as estimativas dos maiores autovalores (em ordem decrescente, referentes aos harmônicos 1° , 3° e 5° , respectivamente) se mantiveram constantes em média, já que esses três componentes se mantiveram inalterados ao longo das três faixas do sinal. Em $n = 2401$ caíram os autovalores referentes aos harmônicos 7° ao 13° , e em $n = 4801$ subiram os autovalores referentes aos harmônicos 7° ao 11° .

3.3 Sinal com variações em amplitudes dos componentes senoidais

Além de estimar corretamente a ordem do modelo de sinais, é importante que o algoritmo seja capaz de se manter robusto quando a amplitude de algum componente variar. O sinal da Tabela 5 tem como objetivo testar a capacidade do algoritmo de rastrear componentes com amplitudes que variem no tempo. Os valores de F_s , θ , β , m e SNR foram mantidos iguais aos dos dois casos anteriores (2400 Hz, 0° , 0,975, 80, 20 dB, respectivamente).

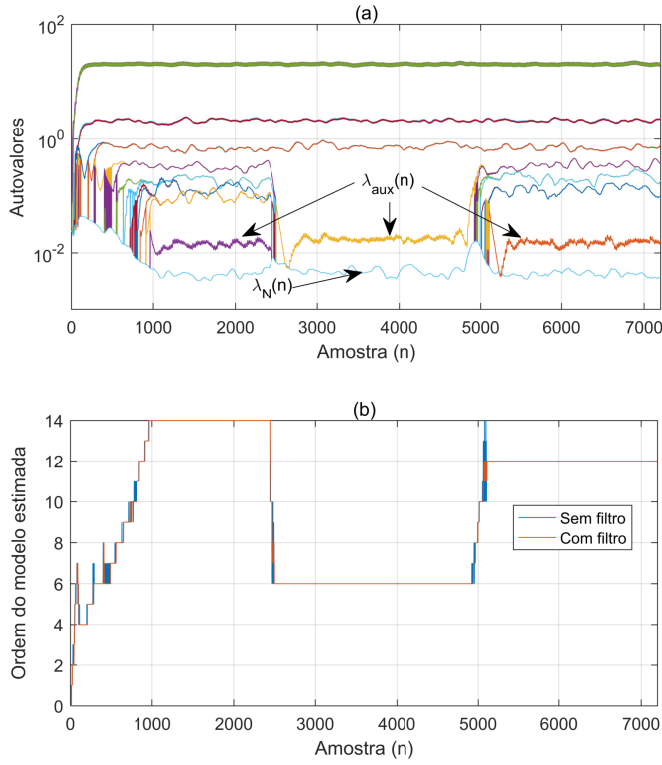


Figura 2. Estimação para o sinal com número variável de componentes senoidais: (a) rastreamento dos autovalores; (b) estimação da ordem do modelo.

O número baixo de componentes harmônicos do sinal visa apenas facilitar a visualização clara e interpretação do gráfico presente na Figura 3, que representa o resultado da simulação para o sinal da Tabela 5.

Tabela 5. Sinal com Amplitudes Variáveis

Amostra (n)	Amplitudes (p.u.)			Frequências (Hz)		
1 : 2400	1	1/5	1/9	60	300	540
2401 : 4800	1	1/5	1			
4801 : 7200	1/2	1/5	1			

Através do resultado de rastreamento de autovalores mostrado na Figura 3(a), pode-se perceber que quando um dos componentes tem sua amplitude alterada (seja um incremento, como em $n = 2401$ para o componente de 540 Hz, ou um decremento, como em $n = 4801$ para o componente de 60 Hz), a diferença acaba sendo tratada como erro até que o algoritmo PASTd convirja para o novo patamar de energia do par de autovalores do componente. O erro instantâneo eleva algumas estimativas de autovalores do subespaço de ruído para o subespaço de sinal, o que consequentemente eleva a ordem do modelo estimada, apresentando um transitório caracterizado por uma superestimação de componentes de sinal, como pode ser visto na Figura 3(b) logo após $n = 2401$ e $n = 4801$. Entretanto percebe-se que passados os transitórios devido às variações de amplitudes, a ordem do modelo passa a ser estimada corretamente.

É também perceptível que a ordem decrescente e sequencial de energia das estimativas dos autovalores é mantida

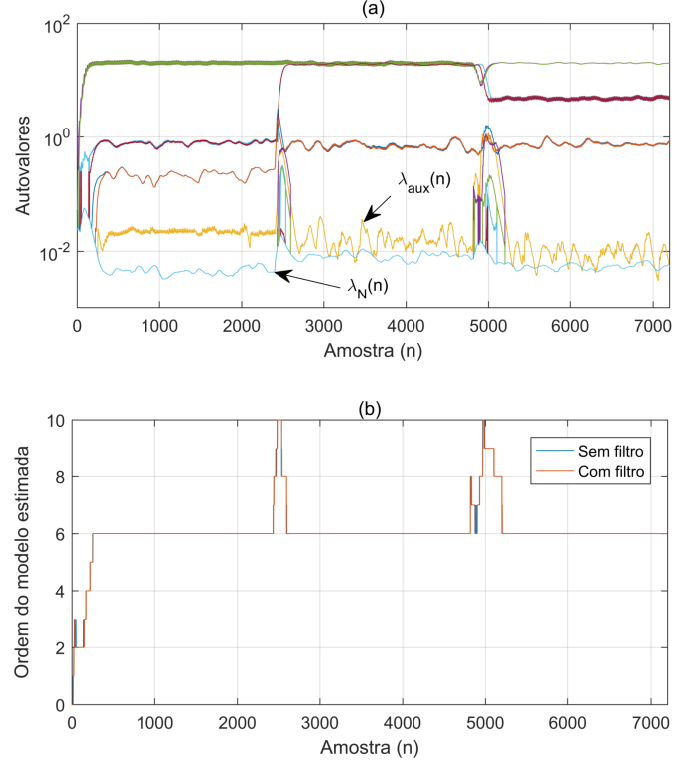


Figura 3. Estimação para o sinal com amplitudes variáveis: (a) rastreamento dos autovalores; (b) estimação da ordem do modelo.

ao longo do processo. Por exemplo, na Figura 3(a) em $n = 2401$, o par de linhas que antes representavam os autovalores do componente de amplitude 1/9 (laranja e azul escura) não subiu até o patamar dos autovalores dos componentes de amplitude 1 (linhas verdes), mas subiu para o patamar dos autovalores do componente de amplitude 1/5, ao passo que o par de linhas que antes representavam os autovalores do componente de amplitude 1/5 (roxa e azul clara) subiu para o patamar dos autovalores dos componentes de amplitude 1 (linhas verdes). Também pode ser percebido que os patamares de energia dos autovalores estão relacionados exclusivamente às amplitudes dos componentes, e não a suas frequências. Por exemplo, o patamar superior (amplitude 1) acomodou tanto autovalores do componente de 60 Hz (intervalo $n = 1 : 4800$) quanto do componente de 540 Hz (intervalo $n = 2401 : 7200$).

3.4 Sinal com variações em amplitudes, frequências e número de componentes senoidais

Até agora, analisou-se sinais contendo apenas componentes harmônicos. Entretanto, não há limitação com relação ao rastreamento de componentes inter-harmônicos, dada a característica de alta resolução de frequência inerente às técnicas de subespaços, que é o caso do algoritmo PASTd.

Para este teste, que irá englobar simultaneamente todas as situações ocorridas nos testes anteriores, propõe-se um sinal bastante interessante para demonstrar a robustez do método quando há componentes que não são múltiplos inteiros do componente fundamental, ou seja, são inter-

harmônicos. O sinal foi extraído de Jain et al. (2013). Os parâmetros de frequência e amplitude de seus componentes são apresentados na Tabela 6. Os ângulos de fase são iguais a zero para todos os componentes, e $\text{SNR} = 20$ dB. A frequência fundamental nominal do sinal é 50 Hz. A frequência de amostragem utilizada foi $F_s = 2400$ Hz. O comprimento do vetor de entrada do algoritmo PASTd foi $m = 80$ amostras. O sinal consiste inicialmente de quatro harmônicos mais a fundamental. Em $n = 2401$, o harmônico par é descartado e dois inter-harmônicos são incluídos junto com algumas alterações nas amplitudes dos harmônicos remanescentes. Em $n = 4801$, ocorrem apenas alterações em amplitudes. Em $n = 7201$, a frequência fundamental é desviada de seu valor nominal e um inter-harmônico é descartado. Finalmente, em $n = 9601$, seis componentes com frequências próximas, incluindo dois inter-harmônicos e dois harmônicos pares, são introduzidos dentro de um curto intervalo de 49,5-198 Hz.

Tabela 6. Sinal com número de componentes, frequências e amplitudes variáveis

Amostra (n)	Amplitudes	Frequências (Hz)
1 : 2400	5 1,1 3 2 1	50 100 250 350 550
2401 : 4800	5,2 1,5 1 3,5 2,2 1	50 82 172 250 350 550
4801 : 7200	4,5 1,6 1 3,3 1,7 0,9	50 82 172 250 350 550
7201 : 9600	5 1,3 3,4 2,3 1	49,5 82 247,5 346,5 544,5
9601 : 12000	4,5 1,6 1 3,3 1,7 0,9	49,5 82 99 140 158 198

É importante observar que o sinal possui, respectivamente em cada faixa de amostras, 5, 6, 6, 5 e 6 componentes, e que a ordem do modelo foi corretamente estimada em todas as faixas, conforme apresentado na Figura 4(b).

Pode-se observar na Figura 4(a) que na última faixa do sinal o PASTd perdeu bastante precisão, apresentando um rastreamento mais oscilatório dos autovalores. O período transitório do PASTd também foi maior na última variação que o sinal sofreu, já que nesta houve variação simultânea de amplitudes, número de componentes, além das frequências terem se tornado muito mais próximas umas das outras. Entretanto, pode-se observar na Figura 4(b) que o algoritmo de estimação da ordem do modelo se mostrou robusto mesmo para este sinal mais complexo, e apresentou resultados corretos assim que o PASTd alcançava sua convergência após cada variação que o sinal sofria. Por fim, pode-se afirmar que o estimador de ordem do modelo funcionou corretamente porque, assim como nos casos anteriores, tanto o autovalor auxiliar $\lambda_{\text{aux}}[n]$, delimitador da fronteira de separação entre os subespaços, quanto o autovalor residual de ruído $\lambda_N[n]$, foram estimados com níveis adequados de energia, no sentido de que acima da fronteira só existem autovalores de sinal. Na próxima seção será apresentado um caso em que esta situação não prevalece.

3.5 Sinal com SNR alta

Como discutido no final da Seção 3.1, o rastreador PASTd pode propagar um erro ao algoritmo de estimação de ordem do modelo. Quando tem-se um ruído de baixa energia no sinal, o autovalor $\lambda_N[n]$ estimado através de (3) também se torna baixo, porém os primeiros autovalores do subespaço de ruído estimados pelo PASTd não o acompanham, pois estes recebem o erro acumulado nas

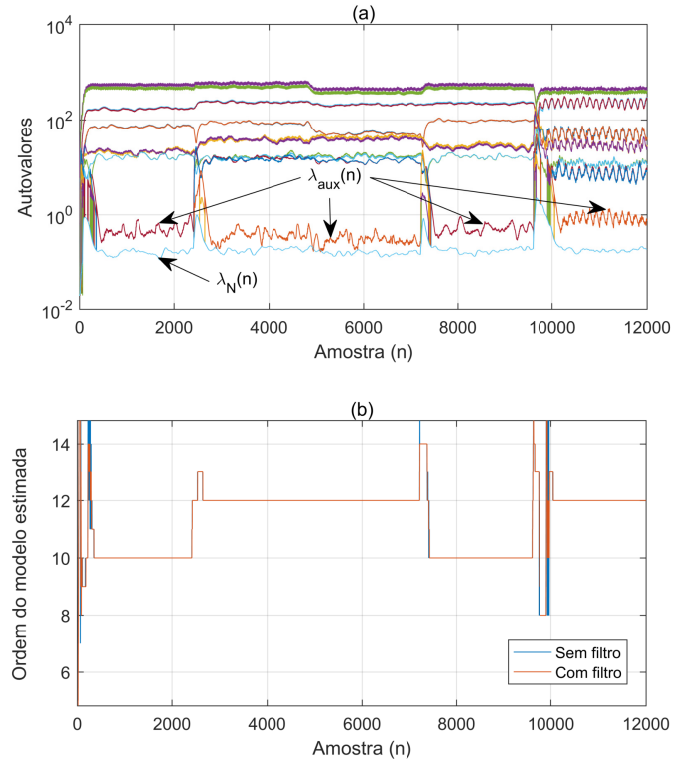


Figura 4. Estimação para o sinal da Tabela 6: (a) rastreamento dos autovalores; (b) estimação da ordem do modelo.

estimativas sequenciais de autovalores do subespaço de sinal, os quais possuem energia bem mais elevada.

Propõe-se então, para verificar o comportamento do algoritmo diante de diferentes SNRs, um sinal com componentes de amplitudes $[1 \ 0,8 \ 0,6]$ p.u. e frequências $[60 \ 180 \ 300]$ Hz, respectivamente. Os valores de F_s , θ , β e m foram mantidos iguais aos dos casos anteriores (2400 Hz, 0° , 0,975, 80, respectivamente).

A Tabela 7 apresenta como se deu a variação de SNR por faixa de amostras do sinal e também o erro na estimação da ordem, caracterizado por uma superestimação que cresce com o aumento da SNR. A Figura 5 deixa explícito o problema evidenciado, pois pode-se ver claramente que $\lambda_N[n]$ diminui com o aumento da SNR, porém as estimativas dos primeiros autovalores do subespaço de ruído ($\lambda_{\text{ruído}}$) não convergem para o valor correto (que deveria ser menor que $\lambda_{\text{aux}}[n]$) e acabam sendo categorizados como autovalores de sinal pelo estimador de ordem do modelo.

Tabela 7. Sinal com variação de SNR

Amostra (n)	SNR	Superestimação de ordem
1 : 1200	20	0
1201 : 2400	35	3
2401 : 3600	50	5

4. CONCLUSÃO

Em cenários com baixa SNR, o método foi capaz de rastrear dinamicamente a ordem do modelo de sinais

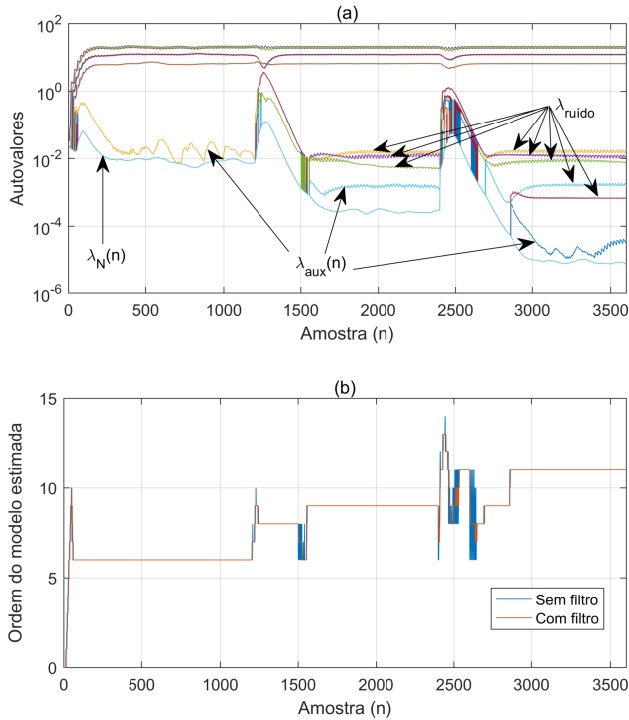


Figura 5. Estimação para o sinal com diferentes valores de SNR: (a) rastreamento dos autovalores; (b) estimação da ordem do modelo.

contendo componentes harmônicos e inter-harmônicos com variações temporais de amplitudes, frequências e número de componentes do sinal. Isso é um ótimo resultado, afinal baixas SNR, em geral, dificultam o rastreo. Outro ponto forte do algoritmo é sua baixa demanda computacional. Porém, é importante observar que a demanda é variável e aumenta de acordo com a ordem do modelo (faixas do sinal que apresentarem muitos componentes demandarão maior processamento).

O estimador é extremamente dependente do rastreo adequado dos autovalores para determinar corretamente a fronteira de separação entre sinal e ruído. Para o estudo de sinais com alta SNR, recomenda-se a utilização de um rastreador não-serial para que o erro não seja acumulado nos autovalores de ruído, o que atrapalha o funcionamento do estimador de ordem do modelo. Um rastreador mais complexo pode modificar drasticamente o tempo de transitório e a demanda computacional. Deve-se, portanto, analisar as características dos sinais que serão processados e equilibrar de forma inteligente os prós e contras de cada método. Combinar o rastreador PASTd e o estimador baseado em MDL, como apresentado neste trabalho, é recomendado para projetos que tenham poder de processamento limitado e foco na estimação de ordem de sinais ruidosos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UFJF pela Bolsa de Iniciação Científica (BIC) concedida e às agências de suporte à Pesquisa CNPq, CAPES, FAPEMIG e INERGE.

REFERÊNCIAS

- Abdollahi, A., Zhang, P., Xue, H., and Li, S. (2013). Enhanced subspace-least mean square for fast and accurate power system measurement. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 28(1), 383–393.
- Ashouri, M., Silva, F.F.D., and Bak, C.L. (2019). Application of short-time Fourier transform for harmonic-based protection of meshed vsc-mtdc grids. *The Journal of Engineering*, 2019(16), 1439–1443.
- Bin Yang (1995a). An extension of the PASTd algorithm to both rank and subspace tracking. *IEEE Signal Processing Letters*, 2(9), 179–182. doi:10.1109/97.410547.
- Bin Yang (1995b). Projection approximation subspace tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(1), 95–107. doi:10.1109/78.365290.
- Chang, G.W., Chen, C., and Liang, Q. (2009). A two-stage ADALINE for harmonics and interharmonics measurement. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(6), 2220–2228.
- Chen, C. and Chen, Y. (2018). Application of adaptive model-based scheme for harmonic diagnosis and compensation of grid-connected converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 65(1), 770–777.
- de Carvalho, J.R., Duque, C.A., Ribeiro, M.V., Cerqueira, A.S., Baldwin, T.L., and Ribeiro, P.F. (2009). A PLL-based multirate structure for time-varying power systems harmonic/interharmonic estimation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 24(4), 1789–1800.
- Duque, C.A., Silveira, P.M., and Ribeiro, P.F. (2011). Visualizing time-varying harmonics using filter banks. *Electric Power Systems Research*, 81(4), 974 – 983.
- Golub, G.H. and Loan, C.F.V. (1996). *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, third edition.
- Gu, I.Y. and Bollen, M.H.J. (2008). Estimating interharmonics by using sliding-window ESPRIT. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 23(1), 13–23.
- Jain, S.K. and Singh, S.N. (2012). Exact model order ESPRIT technique for harmonics and interharmonics estimation. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 61(7), 1915–1923.
- Jain, S.K., Singh, S.N., and Singh, J.G. (2013). An adaptive time-efficient technique for harmonic estimation of nonstationary signals. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 60(8), 3295–3303.
- Lin, H.C. (2017). Development of interharmonics identification using enhanced-FFT algorithm. *The Journal of Engineering*, 2017(7), 333–342.
- Lobos, T., Leonowicz, Z., Rezmer, J., and Schegner, P. (2006). High-resolution spectrum-estimation methods for signal analysis in power systems. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 55(1), 219–225.
- Roy, R. and Kailath, T. (1989). ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(7), 984–995.
- Wax, M. and Kailath, T. (1985). Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 33(2), 387–392.
- Zhang, M., Zhang, X., Yao, H., and He, S. (2017). A tunable resolution MUSIC algorithm for interharmonic analysis. *Journal of Power and Energy Engineering*, 5, 1–13.