

Rejeição de perturbações para sistemas discretos no tempo com controle baseado em eventos^{*}

E. S. Viana^{*} J. M. Gomes da Silva Jr.^{*} L. G. Moreira^{**}

^{*} Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE),
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS),
Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil.

(e-mail: everton.viana@ufrgs.br, jmgomes@ufrgs.br)

^{**} Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
Sul-rio-grandense (IFSul),
Charqueadas, Rio Grande do Sul, Brasil.
(e-mail: lucianomoreira@charqueadas.ifsul.edu.br)

Abstract: This work addresses the problem of designing an event-triggered strategy for disturbance rejection applied to uncertain discrete-time linear systems. Considering an observer-based controller, conditions in terms of linear matrix inequalities (LMIs) are derived for perfect and practical disturbance rejection under model uncertainties. The practical disturbance rejection is proposed using a relaxed criterion, in order to avoid the periodic behavior of the strategy in steady state, in the case of non-constant disturbances. Convex optimization problems are proposed to compute the trigger functions aiming at reducing the control updates. Finally, numerical examples illustrate the efficiency of the obtained results.

Resumo: Este trabalho aborda o projeto de uma estratégia de controle baseada em eventos para rejeição de perturbações, aplicada a sistemas lineares em tempo discreto incertos. Considerando uma lei de controle baseada em um observador de estados, condições em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs) são estabelecidas para rejeição perfeita e prática de perturbação mesmo na presença de incertezas de modelo. A rejeição prática é proposta usando um critério de disparo relaxado, a fim de evitar o comportamento periódico da estratégia em regime permanente no caso de perturbações não constantes. Problemas de otimização convexos são propostos para calcular os parâmetros das funções de disparo com o objetivo de reduzir as atualizações do sinal de controle. Por fim, exemplos numéricos ilustram a eficiência dos resultados obtidos.

Keywords: Event-triggered control; Disturbance rejection; Regulation problem; Uncertain systems.

Palavras-chaves: Controle baseado em eventos; Rejeição de perturbação; Problema de regulação; Sistemas incertos.

1. INTRODUÇÃO

Com a difusão dos sistemas de controle em rede ou *NCSs* (do inglês: *Network Control Systems*), muitas estratégias de controle com foco em estimação de estados, garantia de estabilidade em malha fechada e síntese de controladores, têm sido propostas para lidar com limitações de recursos computacionais, comunicação e consumo de energia (Lian et al., 1999), (Akyildiz et al., 2002), (Zhang et al., 2013). Neste contexto, por exemplo, é desejável que estes recursos sejam utilizados com eficiência, de modo que as ações de controle ocorram somente quando o sinal de controle aplicado à planta necessite efetivamente ser atualizado, ao contrário da abordagem clássica ou periódica, também chamada de *time-triggered control*, onde claramente pode

ocorrer desperdício de recursos de comunicação e consumo de energia.

Um paradigma comumente utilizado em *NCSs*, a fim de evitar o desperdício dos recursos acima mencionados, é o chamado controle baseado em eventos ou *ETC* (do inglês: *Event-triggered Control*). Nesta abordagem, a atualização do controle está condicionada à geração de um evento através da avaliação de uma função que depende da evolução dos estados ou da saída do sistema (Heemels et al., 2012). A partir dos trabalhos publicados em Åström and Bernhardsson (1999) e Årzén (1999), um grande número de aplicações tem motivado o estudo da estratégia *ETC* no campo de *NCSs*, conforme apresentado em Hespanha et al. (2007) e recentemente no *survey* descrito por Peng and Li (2018).

Assim, além da redução na ocupação do canal de comunicação, é interessante considerar outras questões de ordem

^{*} O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - (CAPES) - Código de Financiamento 001, CNPq (Projetos PQ 307449/2019-0e Univ 422992/2016-0) e IFSUL (projeto PD00190519/011).

prática na estratégia *ETC*. Um dos primeiros trabalhos nesse sentido é apresentado por Yook et al. (2002), no qual é proposta uma redução na utilização da largura de banda em *NCSs* em tempo discreto, considerando o uso de observadores em cada nó do sistema. Em Heemels and Donkers (2013), um modelo baseado em realimentação de saída é usado para estimar os estados da planta, mesmo quando não há informação atualizada do sensor, resultando em uma diminuição considerável entre as atualizações de controle. No entanto, a complexidade do sistema é aumentada. Groff et al. (2016) apresentam o uso da estratégia *ETC* para sistemas de tempo discreto com base em um observador de estados e fornecem condições de estabilidade em malha fechada através de desigualdades matriciais lineares ou *LMI*s (do inglês: Linear Matrix Inequalities), propondo problemas de otimização convexos para o cálculo dos parâmetros do critério de disparo.

Outra consideração prática está no fato de que o projeto de um controlador baseado no modelo exato da planta se mostra uma tarefa difícil, visto que as informações disponíveis acerca dos parâmetros da planta são comumente incertas. Esta abordagem é investigada por Chen and Hao (2013) através de um observador baseado em eventos, propondo condições para garantia de estabilidade com base em *LMI*s, mas sem considerar a rejeição a perturbações. Recentemente, Chen et al. (2019) investigaram o uso da estratégia *ETC* em sistemas incertos, de forma a evitar que eventos sejam gerados em intervalos infinitesimais, também chamado comportamento de *Zeno*.

Uma abordagem com foco na redução da carga de comunicação em sistemas lineares de tempo discreto operando sob a estratégia *ETC* é apresentada em Khashooei et al. (2017). Neste trabalho é estabelecido um critério de desempenho para minimização de um custo médio quadrático, sendo a planta perturbada por processos estocásticos e as medidas contaminadas com ruído.

No presente trabalho, uma estratégia *ETC* baseada em observadores para rejeição de perturbações geradas por um sistema exógeno é proposta para um sistema linear incerto em tempo discreto. Esta abordagem é baseada nas ideias apresentadas por Sbarbaro et al. (2020), no qual o problema regulação de saída é tratado. No estudo realizado em Sbarbaro et al. (2020), a solução das equações de regulação (Saberri et al., 2003) é uma condição necessária, porém inviabiliza a garantia de robustez, visto que os estados do modelo de referência não são estimados. Do mesmo modo, no presente trabalho uma estratégia *ETC* que visa reduzir o número de atualizações do controle é apresentada. Além disso, consideramos a avaliação de robustez para o problema de rejeição de perturbação, não sendo necessária, neste caso, a solução das equações de regulação. Assumimos também que os ganhos da lei de controle são obtidos sob uma estratégia de atualização periódica (clássica) do controle, tal que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável e rejeite a perturbação de forma perfeita. Com base na teoria de Lyapunov, um primeiro resultado formal é fornecido para garantir que os estados convirjam para zero através da estratégia *ETC* proposta, *i.e.*, que a perturbação seja perfeitamente rejeitada em regime permanente mesmo na presença de incertezas de modelo limitadas em norma. Diferentemente de Sbarbaro et al. (2020) uma abordagem baseada na

aplicação do lema de Finsler é considerada. Considerando que a estratégia de controle baseado em eventos pode apresentar comportamento periódico em regime permanente no caso de perturbações não constantes, é então proposta uma condição de disparo relaxada. Este artifício tem como resultado prático a existência de um pequeno erro limitado em regime permanente para o sistema em malha fechada, sendo então necessário estabelecer um compromisso entre o erro em regime permanente e a redução das atualizações de controle. Nesse sentido, um segundo resultado formal é então apresentado. Em ambos os casos, condições para garantia de estabilidade em malha fechada com base em *LMI*s e problemas de otimização convexos são formulados para o cálculo dos parâmetros do critério de disparo.

O artigo está organizado como segue: A Seção 2 apresenta o sistema em tempo discreto incerto, operando sob uma estratégia de atualização periódica do controle. A Seção 3 apresenta a implementação da estratégia *ETC* para o controlador baseado em um observador de estados. A Seção 4 fornece condições de estabilidade para o sistema, considerando a estratégia *ETC* proposta. A Seção 5 apresenta a análise dos efeitos das condições de relaxamento do critério de disparo, no qual tolera-se um pequeno erro em regime permanente. Na Seção 6 são descritos os problemas de otimização que serão utilizados para calcular os parâmetros da função de disparo. A Seção 7 apresenta exemplos numéricos e simulações. Finalmente, na Seção 8 são apresentadas algumas considerações finais.

Notação: Para uma dada matriz M , M' denota sua transposta. Para matrizes simétricas M e N , $M > 0$ significa que M é positiva definida, e $M > N$ significa que $M - N > 0$. $tr(M)$ representa o traço da matriz M . I_* e 0_* são matrizes de dimensões apropriadas do tipo identidade e nula respectivamente. Nos blocos matriciais, $*$ denota um bloco simétrico. $diag(M_1, \dots, M_n)$ representa uma matriz do tipo bloco diagonal, cujos blocos são M_1, \dots, M_n .

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere uma planta em tempo discreto incerta descrita pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} x_s[k+1] &= Ax_s[k] + B(u[k] + d[k]) + Dp[k], \\ p[k] &= \Delta[k]q[k], \\ q[k] &= Ex_s[k], \\ y_s[k] &= Cx_s[k], \end{aligned} \quad (1)$$

onde $x_s[k] \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u[k] \in \mathbb{R}$ é a entrada, $y_s[k] \in \mathbb{R}$ é a saída, $d[k] \in \mathbb{R}$ é o sinal de perturbação, $p[k] \in \mathbb{R}^m$ e $q[k] \in \mathbb{R}^l$ são vetores auxiliares, $\Delta[k] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz que satisfaz a relação $\Delta[k]' \Delta[k] \leq I$, $\forall k \in \mathbb{N}$, A , B e C são matrizes reais constantes de dimensões apropriadas do modelo nominal e D e E são matrizes reais constantes de dimensões apropriadas que definem a estrutura da incerteza sobre a matriz A .

Note que neste caso, tem-se a presença de perturbação na entrada de controle, sendo este sinal supostamente gerado pelo seguinte sistema exógeno (*exosystem*), (Saberri et al., 2003):

$$\begin{aligned} x_d[k+1] &= A_d x_d[k], \\ d[k] &= C_d x_d[k], \end{aligned} \quad (2)$$

onde $x_d[k] \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de estados do modelo dinâmico da perturbação, $d[k] \in \mathbb{R}$ é o sinal de perturbação e A_d e C_d são matrizes reais de dimensões apropriadas.

Com base nas equações (1) e (2), o seguinte observador em tempo discreto é apresentado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_o[k+1] \\ x_{do}[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BC_d \\ 0_{r \times n} & A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o[k] \\ x_{do}[k] \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} B \\ 0_{r \times 1} \end{bmatrix} u[k] - \begin{bmatrix} K_{o1} \\ K_{o2} \end{bmatrix} (y_s[k] - y_o[k]), & \quad (3) \\ y_o[k] &= Cx_o[k], \\ d_o[k] &= C_dx_{do}[k], \end{aligned}$$

onde $x_o[k] \in \mathbb{R}^n$ e $x_{do}[k] \in \mathbb{R}^r$ são os estados do observador, $u[k] \in \mathbb{R}$ é a entrada, $y_o[k] \in \mathbb{R}$ é a saída estimada da planta e $d_o[k] \in \mathbb{R}$ é o sinal de perturbação estimado. $K_{o1} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $K_{o2} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ são os ganhos do observador. Considera-se assim, uma lei de controle que realimenta os estados estimados da planta e da perturbação, dada por:

$$u[k] = K_c x_o[k] - C_d x_{do}[k], \quad (4)$$

sendo $K_c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ é o ganho de realimentação estabilizante. Definindo o erro de observação como sendo:

$$\tilde{x}[k] = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1[k] \\ \tilde{x}_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s[k] - x_o[k] \\ x_d[k] - x_{do}[k] \end{bmatrix}, \quad (5)$$

temos então que o sistema em malha fechada pode ser obtido conectando as equações (1), (2), (3) e (4):

$$\tilde{x}[k+1] = (A_o + K_o C_o) \tilde{x}[k] + D_o \Delta[k] E (\tilde{x}_1[k] + x_o[k]), \quad (6)$$

$$x_o[k+1] = (A + BK_c) x_o[k] - K_{o1} C_o \tilde{x}[k], \quad (7)$$

sendo:

$$\begin{aligned} A_o &= \begin{bmatrix} A & BC_d \\ 0_{r \times n} & A_d \end{bmatrix}, K_o = \begin{bmatrix} K_{o1} \\ K_{o2} \end{bmatrix}, \\ C_o &= [C \ 0_{1 \times r}], D_o = \begin{bmatrix} D \\ 0_{r \times m} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Assumindo que os ganhos K_c e K_o são obtidos sob uma estratégia de controle com atualização periódica no tempo, tal que $(A_o + K_o C_o)$ e $(A + BK_c)$ sejam Schur-estáveis e garantam a estabilidade robusta do sistema em malha fechada (6)-(7), conclui-se que $\tilde{x} \rightarrow 0$, logo, $x_o[k] \rightarrow x_s[k]$ e $x_o[k] \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

3. ESTRATÉGIA ETC

Nesta seção, é apresentada a implementação da estratégia ETC para o controlador baseado no observador de estados, definido através das equações (3) e (4). Esta estratégia pode ser descrita por um mecanismo que realiza uma amostragem periódica dos estados ou da saída do sistema, e que a partir da violação de uma determinada regra ou condição de disparo, gera um evento para atualização efetiva do sinal de controle aplicado à planta.

Sob esta abordagem, a atualização do sinal de controle irá ocorrer somente nos instantes de tempo n_i ($i = 0, 1, 2, \dots$). Considerando a lei de controle descrita em (4) assumimos então que:

$$\begin{aligned} u[k] &= u[n_i] = K_c x_o[n_i] - d_o[n_i], \\ \forall k \in [n_i, n_{i+1}). \end{aligned} \quad (9)$$

Conforme as ideias propostas em Tabuada (2007) e Heemels et al. (2011), definimos:

$$\begin{aligned} \delta_x[k] &\triangleq x_o[n_i] - x_o[k], \\ \delta_d[k] &\triangleq d_o[n_i] - d_o[k], \end{aligned} \quad (10)$$

i.e., $\delta_j[k]$, com $j = x, d$ sendo a medida da diferença entre a variável usada na última atualização de controle e a atualmente observada. Estas medidas serão utilizadas na seguinte função de disparo quadrática:

$$\begin{aligned} f(\delta_x[k], \delta_d[k], x_o[k]) &= \delta_x[k]' Q_{\delta_x} \delta_x[k] + \delta_d[k]' Q_{\delta_d} \delta_d[k] \\ &\quad - x_o[k]' Q_\sigma x_o[k], \end{aligned} \quad (11)$$

onde $Q_{\delta_x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_{\delta_d} \in \mathbb{R}$ e $Q_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes simétricas positivas definidas que serão calculadas. O seguinte algoritmo é então aplicado:

Algoritmo 1 Estratégia de controle baseado em eventos

```

if  $f(\delta_x[k], \delta_d[k], x_o[k]) > 0$  then
  Gera evento
   $i \leftarrow i + 1$ 
   $n_i \leftarrow k$ 
  Calcula  $u[n_i]$ 
   $u[k] \leftarrow u[n_i]$ 
else
   $u[k] \leftarrow u[n_i]$ 
end if

```

O Algoritmo 1 estabelece que se em um dado instante de tempo $k \in \mathbb{N}$ a função de disparo $f(\delta_x[k], \delta_d[k], x_o[k])$ for positiva, o sinal de controle é calculado e transmitido para o dispositivo atuador, *i.e.*, a entrada de controle da planta é efetivamente atualizada. Caso contrário, o valor de controle aplicado no último evento é mantido.

O desafio consiste em projetar as matrizes Q_{δ_x} , Q_{δ_d} e Q_σ da função de disparo $f(\delta_x[k], \delta_d[k], x_o[k])$, tal que a origem de (1) em malha fechada com a lei de controle (9) seja assintoticamente estável e a geração de eventos seja reduzida, ou, equivalentemente, que ocorra uma redução nas atualizações do controle.

4. CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE

Nesta seção são apresentadas condições descritas na forma de *LMI*s para garantia de estabilidade assintótica do sistema em malha fechada sob a estratégia ETC. Estas condições serão utilizadas posteriormente para formular problemas de otimização convexos para determinação dos parâmetros da função de disparo.

Com base nas equações (3), (9) e (10), podemos descrever o sistema incerto em malha fechada sob a estratégia de controle baseado em eventos através do seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} x_o[k+1] &= (A + BK_c) x_o[k] + BK_c \delta_x[k] \\ &\quad - B \delta_d[k] - K_{o1} C_o \tilde{x}[k], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}[k+1] &= (A_o + K_o C_o) \tilde{x}[k] + D_o p[k], \\ p[k] &= \Delta[k] q[k], \\ q[k] &= E (\tilde{x}_1[k] + x_o[k]). \end{aligned} \quad (13)$$

Definindo as seguintes matrizes aumentadas

$$A_a = \begin{bmatrix} A + BK_c & -K_o C_o \\ 0_{(n+r) \times n} & A_o + K_o C_o \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} BK_c \\ 0_{(n+r) \times n} \end{bmatrix},$$

$$B_{da} = \begin{bmatrix} -B \\ 0_{(n+r) \times 1} \end{bmatrix}, D_a = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ D_o \end{bmatrix}, \quad (14)$$

podemos reescrever (12) e (13) de forma compacta como segue:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \Pi \xi_1[k], \\ p[k] &= \Delta[k] q[k], \\ q[k] &= E_a x[k], \end{aligned} \quad (15)$$

com

$$\xi_1[k] \triangleq \begin{bmatrix} x[k] \\ \delta_x[k] \\ \delta_d[k] \\ p[k] \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\Pi \triangleq [A_a \ B_a \ B_{da} \ D_a], \quad (17)$$

$$E_a \triangleq E [I_n \ I_n \ 0_{n \times r}], \quad (18)$$

$$x[k] \triangleq [x_o[k]' \ \tilde{x}[k]']'. \quad (19)$$

Note que $x[k] \in \mathbb{R}^{(2n+r)}$, $\delta_x[k] \in \mathbb{R}^n$ e $\delta_d[k] \in \mathbb{R}$. Considerando que os ganhos K_c e K_o foram obtidos *a priori*, sob uma estratégia de controle com atualização periódica no tempo, de forma a garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada (6)-(7) podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1. Se existir uma matriz $L \in \mathbb{R}^{(5n+2r+1+m) \times (2n+r)}$, matrizes simétricas definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{(2n+r) \times (2n+r)}$, $Q_{\delta_x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_{\delta_d} \in \mathbb{R}$, $\bar{Q}_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um escalar positivo α tais que

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0_{(2n+r) \times (3n+r+1+m)} \\ * & -\Psi_o - \alpha \Psi_1 - \Psi_2 \\ * & * \end{bmatrix} + L \Pi_a + \Pi'_a L' & U_a \\ & -\bar{Q}_\sigma \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

seja verificada, sendo

$$\Psi_o = \begin{bmatrix} P & 0_{(2n+r) \times (n+1+m)} \\ * & 0_{(n+1+m)} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} 0_{(3n+r+1)} & 0_{(3n+r+1) \times m} \\ * & I_m \end{bmatrix} - \Pi'_o \Pi_o, \quad (22)$$

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} 0_{(2n+r)} & 0_{(2n+r) \times n} & 0_{(2n+r) \times 1} & 0_{(2n+r) \times m} \\ * & Q_{\delta_x} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times m} \\ * & * & Q_{\delta_d} & 0_{1 \times m} \\ * & * & * & 0_m \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\Pi_o = [E_a \ 0_n \ 0_{n \times 1} \ 0_{n \times m}], \quad (24)$$

$$\Pi_a = [-I_{(2n+r)} \ \Pi], \quad (25)$$

$$U = [I_n \ 0_{n \times (n+r)}], \quad (26)$$

$$U_a = [0_{n \times (2n+r)} \ U \ 0_n \ 0_{n \times 1} \ 0_{n \times m}]', \quad (27)$$

então as trajetórias do sistema (15) em malha fechada, sob a estratégia de controle baseado em eventos proposta no Algoritmo 1, com a função de disparo definida em (11), tal que $Q_\sigma = \bar{Q}_\sigma^{-1}$, convergem assintoticamente para a origem.

Prova. Definindo um vetor aumentado de estados, dado por:

$$\xi_a[k] \triangleq [x[k+1]' \ \xi_1[k]']'. \quad (28)$$

Como a partir da equação (15) $\Pi_o \xi_a[k] = 0$, então através do Lema de Finsler e considerando o complemento de Schur tal que $Q_\sigma = \bar{Q}_\sigma^{-1}$, (20) é equivalente a:

$$\xi_a[k]' \begin{bmatrix} P & 0_{(2n+r) \times (3n+r+1+m)} \\ * & -\Psi_o - \alpha \Psi_1 - \Lambda \end{bmatrix} \xi_a[k] < 0, \quad (29)$$

$$\forall \xi_a[k] \text{ tal que } \Pi_a \xi_a[k] = 0,$$

com

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -U' Q_\sigma U & 0_{(2n+r) \times n} & 0_{(2n+r) \times 1} & 0_{(2n+r) \times m} \\ * & Q_{\delta_x} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times m} \\ * & * & Q_{\delta_d} & 0_{1 \times m} \\ * & * & * & 0_m \end{bmatrix}, \quad (30)$$

Levando em conta que $f(\cdot) = f(\delta_x[k], \delta_d[k], x_o[k]) = \xi_1[k]' \Lambda \xi_1[k]$, temos que:

$$\xi_a[k]' \begin{bmatrix} P & 0_{(2n+r) \times (3n+r+1+m)} \\ * & -\Psi_o - \alpha \Psi_1 \end{bmatrix} \xi_a[k] < f(\cdot). \quad (31)$$

Uma vez que $\Delta[k]' \Delta[k] \leq I$ é verificada, então $\forall \alpha > 0$ tem-se que $\alpha(p[k]' p[k] - q[k]' q[k]) \leq 0$. Esta desigualdade pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\xi_a[k]' \begin{bmatrix} 0_{(2n+r)} & 0_{(2n+r) \times (3n+r+1+m)} \\ * & \alpha \Psi_1 \end{bmatrix} \xi_a[k] \leq 0. \quad (32)$$

Assim, se (32) é satisfeita, a partir de (31) podemos concluir que

$$\xi_a[k]' \begin{bmatrix} P & 0_{(2n+r) \times (3n+r+1+m)} \\ * & -\Psi_o \end{bmatrix} \xi_a[k] < f(\cdot), \quad (33)$$

é verificada.

Considerando agora uma função quadrática candidata a função de Lyapunov, dada por $V(x[k]) = x[k]' P x[k]$ e sua variação entre instantes de amostragem $\Delta V(x[k]) = V(x[k+1]) - V(x[k])$, temos que:

$$\Delta V(x[k]) = \xi_a[k]' \begin{bmatrix} P & 0_{(2n+r) \times (3n+r+1+m)} \\ * & -\Psi_o \end{bmatrix} \xi_a[k], \quad (34)$$

logo, se a desigualdade (20) for satisfeita, então $\Delta V(x[k]) < f(\delta_x[k], \delta_d[k], x_o[k])$.

Suponha agora que $n_{i+1} - n_i \geq 1$ e $k \in [n_i, n_{i+1})$. Então, pelo Algoritmo 1, temos que $f(\delta_x[k], \delta_d[k], x_o[k]) \leq 0$, e segue que $\Delta V(x[k]) < 0$. Por outro lado, suponha que em um determinado instante k , $f(\delta_x[k], \delta_d[k], x_o[k]) > 0$, então, pelo Algoritmo 1 um evento ocorre, e segue que $\delta_x[k] = 0$ e $\delta_d[k] = 0$, logo, $f(\delta_x[k], \delta_d[k], x_o[k]) = -x_o[k] Q_\sigma x_o[k] < 0$, o que implica em $\Delta V(x[k]) < 0$, o que garante que $x[k] \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. \square

5. ESTRATÉGIA ETC COM RELAXAÇÃO

Uma vez que é garantida a convergência assintótica das trajetórias do sistema em malha fechada para a origem, o Teorema 1 assegura rejeição perfeita de perturbação em regime permanente. Este fato pode levar a estratégia ETC ao comportamento periódico em regime permanente, (*i.e.*, $n_{i+1} - n_i = 1$ para $k \rightarrow \infty$) quando aplicada uma perturbação não constante (*e.g.* sinais senoidais ou periódicos). A fim de evitar este comportamento, será apresentado um critério de relaxação para o problema em

questão. O critério de relaxação considera uma constante real $\gamma > 0$ adicional na função de disparo, de modo que um evento seja gerado quando $f_\gamma > 0$ com $f_\gamma = f - \gamma$. Desta forma, admite-se que as trajetórias dos estados não convirjam para a origem como anteriormente, mas fiquem confinadas dentro de um conjunto positivamente invariante elipsoidal, dado por:

$$\mathcal{E}(P, \eta) = \{x \in \mathbb{R}^{2n+r}, x'Px \leq \eta\}. \quad (35)$$

Essa ideia é formalizada no seguinte teorema:

Teorema 2. Se existir uma matriz $L \in \mathbb{R}^{(5n+2r+1+m) \times (2n+r)}$, matrizes simétricas definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{(2n+r) \times (2n+r)}$, $Q_{\delta_x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_{\delta_d} \in \mathbb{R}$, $\bar{Q}_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e escalares positivos α , τ e $\bar{\gamma}$, tais que

$$\begin{bmatrix} M + L\Pi_a + \Pi_a'L & U_a \\ * & -\bar{Q}_\sigma \end{bmatrix} < 0, \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} -\eta\tau & 1 \\ 1 & -\bar{\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

sejam verificadas, sendo

$$M = \begin{bmatrix} P & 0_{(2n+r) \times (3n+r+1+m)} \\ * & -(1-\tau)\Psi_o - \alpha\Psi_1 - \Psi_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

e Ψ_o , Ψ_1 , Ψ_2 , Π_a e U_a definidas em (21), (22), (23), (25) e (27) respectivamente, então as trajetórias do sistema (15) em malha fechada, sob a estratégia de controle baseado em eventos proposta no Algoritmo 1, com a função de disparo dada por

$$f_\gamma(\delta_x[k], \delta_d[k], x_o[k]) = \delta_x[k]'Q_{\delta_x}\delta_x[k] + \delta_d[k]'Q_{\delta_d}\delta_d[k] - x_o[k]'Q_\sigma x_o[k] - \gamma, \quad (39)$$

sendo $Q_\sigma = \bar{Q}_\sigma^{-1}$ e $\gamma = \bar{\gamma}^{-1}$, convergem em tempo finito para o conjunto positivamente invariante $\mathcal{E}(P, \eta)$.

Prova. Para mostrar que as trajetórias convergem para $\mathcal{E}(P, \eta)$ em tempo finito, é suficiente garantir que

$$\Delta V(x[k]) < 0, \forall x[k] \notin \mathcal{E}(P, \eta). \quad (40)$$

Note que se $x[k] \notin \mathcal{E}(P, \eta)$, então $x[k]'Px[k] - \eta > 0$, logo, uma condição suficiente para garantir (40), $\forall x[k] \notin \mathcal{E}(P, \eta)$ pode ser feita via S-Procedure, se existir um escalar positivo τ , tal que:

$$\Delta V(x[k]) - f_\gamma(\cdot) + \tau x[k]'Px[k] - \tau\eta < 0. \quad (41)$$

Considerando que $\gamma = \bar{\gamma}^{-1}$, através do complemento de Schur aplicado a (37) garantimos que:

$$-\tau\eta + \gamma < 0. \quad (42)$$

Por outro lado, seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 1, podemos mostrar que (36) implica que $\Delta V(x[k]) - f(\cdot) + \tau x[k]'Px[k] < 0$. Assim, considerando $f_\gamma(\cdot) = f(\cdot) - \gamma$, com $f(\cdot)$ definida em (11), podemos concluir que (41) é satisfeita se as desigualdades matriciais (36) e (37) são verificadas.

Para mostrar que $\mathcal{E}(P, \eta)$ é um conjunto positivamente invariante com relação ao sistema em malha fechada, consideramos primeiramente que (41) é satisfeita, logo:

$$x[k+1]'Px[k+1] - x[k]'Px[k] - f(\cdot) + \tau x[k]'Px[k] + \gamma - \tau\eta < 0. \quad (43)$$

Fazendo $\tau_1 = (1 - \tau)$ e isolando τ , *i.e.*, $\tau = 1 - \tau_1$ em (43), temos:

$$x[k+1]'Px[k+1] - \tau_1 x[k]'Px[k] - f(\cdot) + \gamma + \tau_1\eta - \eta < 0. \quad (44)$$

Como $f_\gamma = f - \gamma \leq 0, \forall k > 0$, segue que:

$$x[k+1]'Px[k+1] - \eta - \tau_1(x[k]'Px[k] - \eta) < 0, \quad (45)$$

e portanto

$$x[k+1]'Px[k+1] - \eta < \tau_1(x[k]'Px[k] - \eta). \quad (46)$$

Assim, como para todo $x[k] \in \mathcal{E}(P, \eta)$, temos que $x[k]'Px[k] - \eta \leq 0$, é possível concluir que:

$$x[k+1]'Px[k+1] - \eta < 0, \quad (47)$$

e portanto $x[k+1] \in \mathcal{E}(P, \eta)$, o que prova a invariância positiva do conjunto $\mathcal{E}(P, \eta)$. \square

6. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Na seção 4, foi proposta uma função de disparo $f(\cdot)$ que garante a estabilidade do sistema em malha fechada (12) e (13), sob a estratégia de controle baseado em eventos, fazendo com que os estados da planta convirjam para zero quando $k \rightarrow \infty$, obtendo-se assim a rejeição robusta à perturbação.

As matrizes Q_{δ_x} , Q_{δ_d} e \bar{Q}_σ são variáveis livres na LMI (20). Assim, o objetivo consiste em calcular os parâmetros Q_{δ_x} , Q_{δ_d} e $Q_\sigma = \bar{Q}_\sigma^{-1}$ da função de disparo (11), de modo a reduzir o número de eventos gerados. Com base nas ideias apresentadas por (Moreira et al., 2019), um critério adequado para o cálculo destes parâmetros pode ser o seguinte:

$$\text{minimizar } \text{tr}(Q_{\delta_x}) + \text{tr}(Q_{\delta_d}) + \text{tr}(\bar{Q}_\sigma).$$

Neste caso, é implicitamente considerada a “minimização” das matrizes de ponderação Q_{δ_x} e Q_{δ_d} e a “maximização” de Q_σ . Então, o seguinte problema de otimização pode ser formulado:

PO 1:

$$\text{minimizar } \text{tr}(Q_{\delta_x}) + \text{tr}(Q_{\delta_d}) + \text{tr}(\bar{Q}_\sigma) \quad (48)$$

sujeito a: (20).

Note que PO 1 é convexo, pois (20) é uma LMI nas variáveis de decisão. Por outro lado, para a condição de disparo relaxada (39), além das matrizes Q_{δ_x} , Q_{δ_d} e Q_σ , o parâmetro γ deve ser escolhido de forma apropriada. Lembrando que neste caso é possível garantir somente que as trajetórias de (12) e (13) convergirão para um conjunto invariante $\mathcal{E}(P, \eta)$, ou equivalentemente, a saída não irá convergir para zero, mas será limitada. Portanto, um compromisso entre o valor relativamente pequeno para a saída do sistema e a redução das atualizações de controle deve ser estabelecido. Com esse objetivo, consideramos a seguinte restrição:

$$P - \eta \begin{bmatrix} \sigma C' C & 0_{n \times (n+r)} \\ * & 0_{(n+r)} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (49)$$

Essa restrição garante que $\mathcal{E}(P, \eta) \subset \mathcal{S}_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^{2n+r}; x' C_o' C_o x \leq \sigma^{-1}\}$, o que implica que a trajetória da saída em regime permanente dada por $y = y_o = C_o x = C x_o$ ficará confinada em uma bola de raio $\sqrt{\sigma^{-1}}$, *i.e.*, a rejeição prática à perturbação em regime permanente pode ser regulada pelo valor de σ .

A ideia é, portanto, levar em conta no critério, além da minimização de matrizes Q_{δ_x} , Q_{δ_d} e \bar{Q}_σ , a maximização de γ , ou equivalentemente, a minimização de $\bar{\gamma}$, garantindo que a restrição (49) seja verificada para uma dada tolerância σ . Para isso, propomos o seguinte problema de otimização:

PO 2:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \text{tr}(Q_{\delta_x}) + \text{tr}(Q_{\delta_d}) + \text{tr}(\bar{Q}_\sigma) + \bar{\gamma} \\ & \text{sujeito a: (36), (37) e (49).} \end{aligned} \quad (50)$$

Deve-se entretanto observar que PO 2 não é convexo devido às multiplicações de $\eta\tau$ e τP em (36) e (37) respectivamente. Por outro lado, como τ é um escalar, a solução das *LMI*s pode ser obtida através de uma busca iterativa considerando valores de τ predefinidos.

Os resultados obtidos para estes problemas de otimização serão discutidos nos exemplos numéricos a seguir.

7. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para ilustrar o método, considera-se um sistema instável em malha aberta, descrito na forma de espaço de estados em tempo contínuo, através das seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1,1 & 2 \\ 0 & -0,8 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,8 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= [1 \ 0]. \end{aligned} \quad (51)$$

Considerando a discretização do modelo descrito em (51), através de um retentor de ordem zero (*ZOH*) com um período de amostragem $T = 0,1s$, podemos representar este sistema na forma (1) com as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1,1163 & 0,2033 \\ 0 & 0,9231 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,0081 \\ 0,0769 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0]. \quad (52)$$

Considerando ainda uma perturbação senoidal e de frequência $\omega = 0,25\pi$ rad/s, gerada pelo sistema exógeno (2) com:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0,9969 & 0,0785 \\ -0,0785 & 0,9969 \end{bmatrix}, C_d = [1 \ 0],$$

temos que os ganhos estabilizantes obtidos sob uma estratégia de controle periódica para garantir a rejeição assintótica de perturbação, são descritos por:

$$\begin{aligned} K_c &= [-5,4497 \ -4,8817], \\ K_{o1} &= \begin{bmatrix} 1,2332 \\ 1,9315 \end{bmatrix}, K_{o2} = \begin{bmatrix} 5,8274 \\ 3,755 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para a avaliação do efeito da incerteza no sistema, consideramos $D = \beta I_n$ e $E = I_n$, onde β é um escalar que representa o limite de incerteza e $\Delta[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o que implica que $m = n$. Desta forma, considerando o Teorema 1 e solucionando PO 1, foram obtidas as matrizes apresentadas na Tabela 1. As simulações do sistema em

Tabela 1. Matrizes obtidas para $f(\cdot)$.

β	Q_{δ_x}	Q_{δ_d}	Q_σ
0,001	$\begin{bmatrix} 11,084 & 9,929 \\ 9,929 & 8,894 \end{bmatrix}$	2,73	$\begin{bmatrix} 0,773 & 0,964 \\ 0,964 & 1,97 \end{bmatrix}$
0,02	$\begin{bmatrix} 11,225 & 10,055 \\ 10,055 & 9,007 \end{bmatrix}$	2,765	$\begin{bmatrix} 0,875 & 1,155 \\ 1,155 & 2,308 \end{bmatrix}$
0,03	$\begin{bmatrix} 11,411 & 10,221 \\ 10,221 & 9,156 \end{bmatrix}$	2,81	$\begin{bmatrix} 0,852 & 1,112 \\ 1,112 & 2,214 \end{bmatrix}$

malha fechada com a função $f(\cdot)$ parametrizada pelas matrizes da Tabela 1, são mostradas nas Figuras 1, 2 e 3, respectivamente. As condições iniciais utilizadas foram $x[0] = [10 \ 0]'$ e $x_o[0] = [0 \ 0]'$. Uma perturbação senoidal com frequência constante igual a $\omega = 0,25\pi$ rad/s e amplitude 5 foi aplicada no instante $k = 120$. O último gráfico

apresenta os instantes em que ocorreram eventos, sendo o número de instantes transcorridos desde a última atualização de controle representado pela altura das marcações, podendo ser interpretado como o intervalo entre eventos. A linha horizontal tracejada corresponde a um instante de amostragem. Nota-se que quando há aumento na incerteza, ocorre um aumento no número de eventos gerados e consequentemente uma redução no intervalo entre eventos. Este fato já ilustra a eficiência da estratégia, pois mesmo em um pior cenário, onde a incerteza é maior, observa-se uma redução das atualizações do sinal de controle com relação a um controlador periódico. Conforme esperado, quando a perturbação é aplicada, a rejeição perfeita ocorre, porém a estratégia passa a realizar atualizações periódicas do controle em regime permanente. Devido a este comportamento periódico, é interessante relaxar a condição de disparo, de modo que a estratégia volte a realizar atualizações aperiódicas do sinal de controle. Para tanto, considerando o Teorema 2 e solucionando PO 2 para $\sigma = 0,7$, foram obtidas as matrizes apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2. Matrizes obtidas para $f_\gamma(\cdot)$.

β	Q_{δ_x}	Q_{δ_d}	Q_σ	γ
0,001	$\begin{bmatrix} 12,627 & 11,311 \\ 11,311 & 10,132 \end{bmatrix}$	3,111	$\begin{bmatrix} 0,779 & 0,997 \\ 0,997 & 2,081 \end{bmatrix}$	0,268
0,02	$\begin{bmatrix} 12,796 & 11,462 \\ 11,462 & 10,268 \end{bmatrix}$	3,152	$\begin{bmatrix} 0,904 & 1,234 \\ 1,234 & 2,513 \end{bmatrix}$	0,2611
0,03	$\begin{bmatrix} 13,029 & 11,671 \\ 11,671 & 10,454 \end{bmatrix}$	3,209	$\begin{bmatrix} 0,829 & 1,094 \\ 1,094 & 2,223 \end{bmatrix}$	0,251

Considerando as mesmas condições iniciais e características do sinal de perturbação das simulações anteriores e a função $f_\gamma(\cdot)$, parametrizada pelas matrizes da Tabela 2, temos as simulações para o sistema em malha fechada mostradas nas Figuras 4, 5 e 6, respectivamente. Nota-se um comportamento semelhante ao caso anterior, *i.e.*, quando se aumenta a incerteza do modelo da planta, o intervalo entre eventos diminui e consequentemente o número de eventos gerados aumenta. Quando a perturbação é aplicada, ocorre uma rejeição prática, pois o erro em regime permanente limita-se à tolerância predefinida, resultando em uma redução no número de atualizações do sinal de controle em regime permanente, e não permitindo que a estratégia *ETC* se torne periódica.

A Tabela 3 apresenta uma comparação do número de eventos gerados ou atualizações do controle para cada critério de disparo e em cada limite de incerteza considerado, sendo $\sigma = 0,7$. Destaca-se que o projeto da função de disparo através do PO 1, garante uma redução no número de atualizações entre 4% e 31%, enquanto que o projeto da função de disparo através do PO 2 garante uma redução entre 27,3% e 49,3%, ambos comparados à estratégia de amostragem periódica.

Tabela 3. Número de atualizações do controle para cada limite de incerteza.

β	PO 1	PO 2	Periódica
0,001	207	152	
0,02	250	169	300
0,03	288	218	

Estes resultados ilustram de forma clara que o número de atualizações do sinal de controle é reduzido. Além disso, existe um compromisso entre uma determinada tolerância ao erro em regime permanente e a redução das atualizações do sinal de controle para perturbações não constantes.

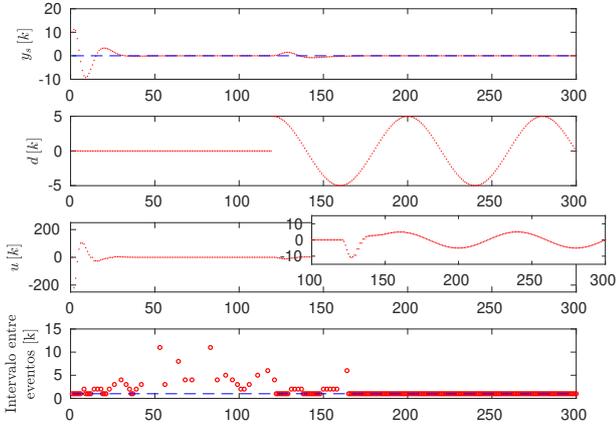


Figura 1. Simulação com critério não relaxado e $\beta = 0,001$.

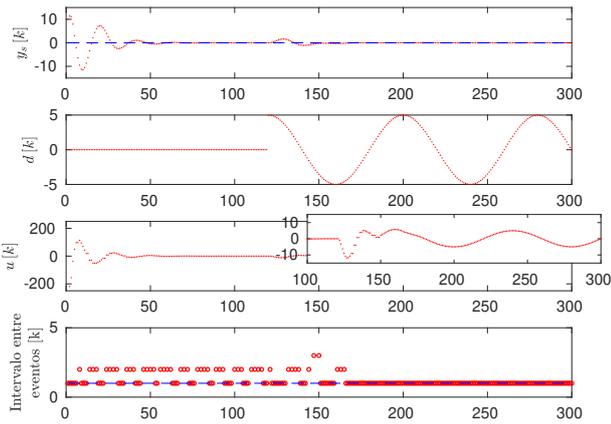


Figura 2. Simulação com critério não relaxado e $\beta = 0,02$.

8. CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos o projeto de uma estratégia *ETC* aplicada a sistemas lineares incertos em tempo discreto, considerando uma lei de controle baseada em observadores para rejeição de perturbações. Condições descritas na forma de *LMI*s foram propostas com objetivo de garantir a rejeição perfeita e prática de perturbação mesmo na presença de incertezas de modelo. Problemas de otimização convexos com foco na redução da atualização do controle foram propostos a fim de calcular os parâmetros das funções de disparo. Os exemplos de simulações ilustram a eficiência da estratégia proposta, mesmo com parâmetros incertos na planta, podendo ser estabelecido um compromisso entre a tolerância admitida para o erro em regime permanente e a redução das atualizações de controle. Está sendo desenvolvido um estudo que considera uma abordagem robusta para o caso de seguimento

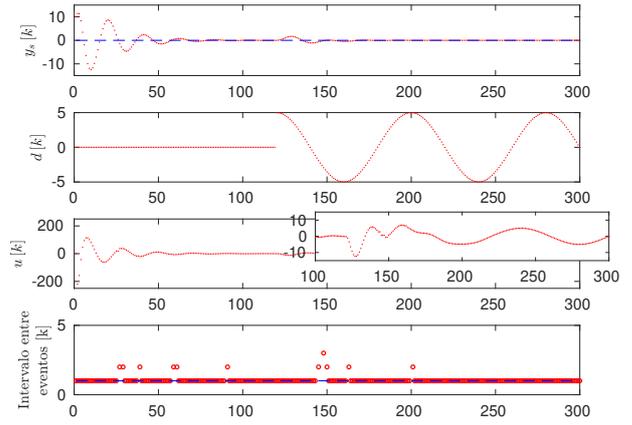


Figura 3. Simulação com critério não relaxado e $\beta = 0,03$.

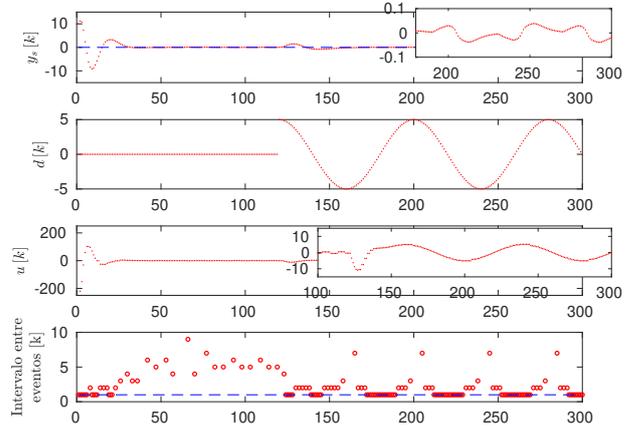


Figura 4. Simulação com critério relaxado e $\beta = 0,001$.

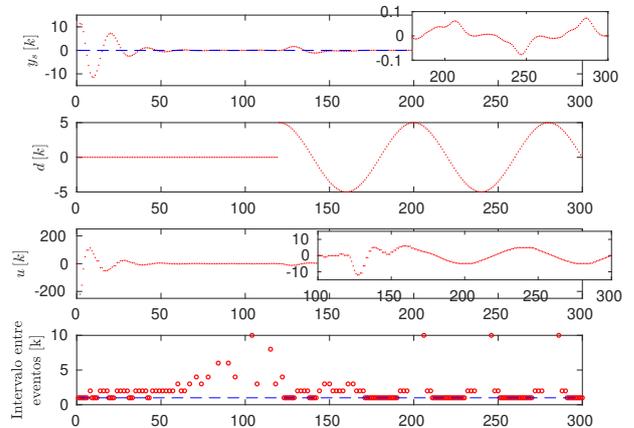


Figura 5. Simulação com critério relaxado e $\beta = 0,02$.

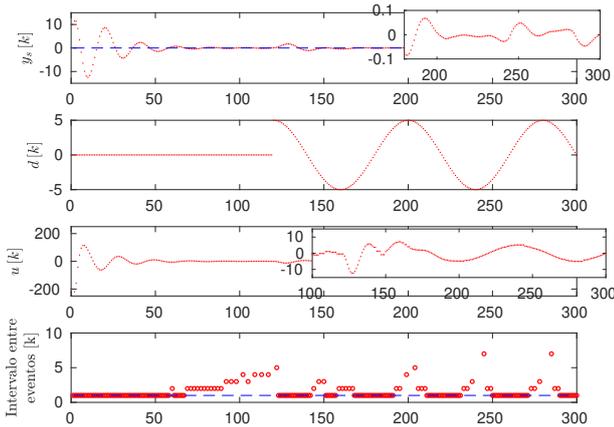


Figura 6. Simulação com critério relaxado e $\beta = 0,03$.

de referência e rejeição de perturbações modeladas por *exosystems*.

REFERÊNCIAS

- Akyildiz, I.F., Su, W., Sankarasubramaniam, Y., and Cayirci, E. (2002). Wireless sensor networks: a survey. *Computer Networks*, 38(4), 393–422.
- Årzén, K.E. (1999). A simple event-based pid controller. *IFAC Proceedings Volumes*, 32(2), 8687–8692.
- Åström, K.J. and Bernhardsson, B. (1999). Comparison of periodic and event based sampling for first-order stochastic systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 32(2), 5006–5011.
- Chen, S., Fan, Y., Chen, H., and Zhu, M. (2019). Optimal event-triggered control method for linear uncertain systems. In *2019 34th Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (YAC)*, 133–137.
- Chen, X. and Hao, F. (2013). Observer-based event-triggered control for certain and uncertain linear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 30(4), 527–542.
- Groff, L.B., Moreira, L.G., Gomes da Silva Jr., J.M., and Sbarbaro, D. (2016). Observer-based event-triggered control: A discrete-time approach. In *2016 American Control Conference (ACC)*, 4245–4250.
- Heemels, W., Johansson, K.H., and Tabuada, P. (2012). An introduction to event-triggered and self-triggered control. In *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 3270–3285.
- Heemels, W. and Donkers, M. (2013). Model-based periodic event-triggered control for linear systems. *Automatica*, 49(3), 698–711.
- Heemels, W., Donkers, M., and Teel, A. (2011). Periodic event-triggered control based on state feedback. In *IEEE Conference on Decision and Control (CDC) 2011, Orlando, USA*, 2571–2576.
- Hespanha, J.P., Naghshtabrizi, P., and Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 138–162.
- Khashooei, B., Antunes, D., and Heemels, W. (2017). Output-based event-triggered control with performance guarantees. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(7), 3646–3652.
- Lian, F.L., Moyne, J.R., and Tilbury, D.M. (1999). Performance evaluation of control networks for manufacturing systems. In *In Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition (Dynamic Systems and Control Division)*, 6–7.
- Moreira, L.G., Groff, L.B., Gomes da Silva Jr., J.M., and Tarbouriech, S. (2019). PI event-triggered control under saturating actuators. *International Journal of Control*, 92(7), 1634–1644.
- Peng, C. and Li, F. (2018). A survey on recent advances in event-triggered communication and control. *Information Sciences*, 457–458, 113–125.
- Saberi, A., Stoorvogel, A., and Sannuti, P. (2003). *Control of Linear Systems with Regulation and Input Constraints*. Springer.
- Sbarbaro, D., Gomes da Silva Jr., J.M., and Moreira, L.G. (2020). Event-triggered tracking control: A discrete-time approach. *IFAC World Congress*.
- Tabuada, P. (2007). Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(9), 1680–1685.
- Yook, J.K., Tilbury, D.M., and Soparkar, N.R. (2002). Trading computation for bandwidth: reducing communication in distributed control systems using state estimators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(4), 503–518.
- Zhang, L., Gao, H., and Kaynak, O. (2013). Network-induced constraints in networked control systems — A Survey. *Industrial Informatics, IEEE Transactions on*, 9, 403–416.