

Controle \mathcal{H}_∞ chaveado para sistemas não lineares incertos considerando uma região de operação expandida

Diogo Ramalho de Oliveira * Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira **
 Edvaldo Assunção ** Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves ***
 Edson Italo Mainardi Junior * Lucas Rangel de Oliveira *

* Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS, Campus Três Lagoas, MS, (e-mail: diogo.ramalho@ifms.edu.br, edson.mainardi@ifms.edu.br, lucas.rangel@ifms.edu.br)

** Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS, Universidade Estadual Paulista - UNESP, SP (e-mail: marcelo.minhoto@unesp.br, edvaldo.assuncao@unesp.br)

*** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná - IFPR, Campus Jacarezinho, PR, (e-mail: uiliam.alves@ifpr.edu.br)

Abstract: This work presents a local \mathcal{H}_∞ switched control design for a class of uncertain nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy models. The presented methodology is based on an extended state vector, composed by the state vector and the control signal. In addition, the switched control law eliminates the necessity of finding the membership function expressions to implement the control law and the design conditions guarantee that the state trajectory and the control signal remain within a region of operation of the system. Finally, the control scheme eliminates the possibility of a discontinuity in the control signal.

Resumo: Um projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado para uma classe de sistemas não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno é apresentado neste trabalho. A metodologia apresentada baseia-se na construção de um vetor de estado expandido, formado pelo vetor de estado e pelo sinal de controle. Além disso, a lei de controle chaveada elimina a necessidade de usar as funções de pertinência na sua implementação e as condições de projeto garantem a permanência das trajetórias dos estados e do sinal de controle dentro de uma região de operação do sistema. Por fim, o esquema de controle elimina a possibilidade de uma descontinuidade no sinal de controle.

Keywords: Switched control; \mathcal{H}_∞ Control; Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model; Control signal saturation; Unknown membership functions; Linear matrix inequality (LMI).

Palavras-chaves: Controle chaveado; Controle \mathcal{H}_∞ ; Modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S); Saturação do sinal de controle; Funções de pertinência desconhecidas; Desigualdade matricial linear (LMI).

1. INTRODUÇÃO

É possível representar uma grande variedade de sistemas não lineares através de modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) (Takagi and Sugeno (1985); Taniguchi et al. (2001)), combinando os modelos locais lineares por meio dos pesos normalizados das funções de pertinência. Os projetos de controle envolvendo sistemas não lineares *fuzzy* T-S, normalmente consideram que as funções de pertinência são conhecidas. Entretanto, quando o sistema não linear também possui incertezas, essas funções podem não ser precisamente calculadas, dificultando a sua utilização na implementação da lei de controle. Além disso, a representação via modelos *fuzzy* T-S é válida em uma região limitada no espaço de estados, denominada região de operação ou domínio de validade. Outras condições operacionais, como a limitação do atuador e restrições físicas do sistema,

podem ser incorporadas à região de operação. Já o controle \mathcal{H}_∞ é aplicado com o propósito de diminuir a influência de um distúrbio externo na saída do sistema.

Este trabalho apresenta uma abordagem ao problema de controle \mathcal{H}_∞ , proposto em de Oliveira (2017), no qual considera-se um vetor de estado expandido, composto pelo vetor de estado e pelo sinal de controle. O projeto de controle assegura um custo garantido \mathcal{H}_∞ e garante que as trajetórias do vetor de estado e do sinal de controle permanecem dentro de limites previamente estabelecidos. Dessa forma, esta abordagem é uma alternativa para tratar do problema da saturação do sinal de controle e é uma das principais contribuições deste trabalho. Além disso, o esquema de controle proposto utiliza um integrador que elimina uma possível descontinuidade do sinal de controle chaveado, apresentando vantagem em relação ao esquema

de controle proposto em de Oliveira et al. (2018) Por fim, a lei de controle chaveada não utiliza as funções de pertinência, possibilitando uma implementação prática em uma suspensão ativa.

Por conveniência, adota-se as seguintes notações: $\mathbb{K}_r = \{1, 2, \dots, r\}$, $r \in \mathbb{N}$. I representa uma matriz identidade com dimensão apropriada. $\text{diag}\{M_1, M_2, \dots, M_r\}$ representa uma matriz bloco diagonal formada pelas matrizes M_1, M_2, \dots, M_r . $M > 0$ ($M < 0$, $M \geq 0$ e $M \leq 0$) significa que a matriz M é definida positiva (definida negativa, semi-definida positiva e semi-definida negativa, respectivamente). Finalmente, M_z representa uma matriz genérica, tal que

$$M_z = \sum_{i=1}^r \alpha_i M_i \quad \text{com} \quad \alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_r]^T \in \Lambda_r \quad (1a)$$

$$\Lambda_r = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^r : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, i \in \mathbb{K}_r \right\}. \quad (1b)$$

2. PRELIMINARES

Considere um sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador e distúrbio externo:

$$\dot{x}(t) = f_1(z(t))x(t) + f_2(z(t))\text{sat}(u(t)) + f_3(z(t))w(t), \quad (2a)$$

$$y(t) = g_1(z(t))x(t) + g_2(z(t))\text{sat}(u(t)) + g_3(z(t))w(t), \quad (2b)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada exógena com energia limitada e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saída. A dinâmica do sistema não linear incerto é dada pelas funções não lineares $f_1(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $f_2(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $f_3(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ e a saída do sistema é dada pelas funções não lineares $g_1(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $g_2(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ e $g_3(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$. $z(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor cujos os elementos $z_l(t)$, $l \in \mathbb{K}_q$, são as variáveis de premissa que dependem do vetor de estado $x(t)$ e de parâmetros incertos ou variáveis desconhecidas, e $\text{sat}(u(t)) = [\text{sat}(u_1(t)) \dots \text{sat}(u_{n_u}(t))]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle sujeita à saturação, tal que $\text{sat}(u_k(t)) = \text{sgn}(u_k(t)) \min\{\rho_k, |u_k(t)|\}$, sendo que ρ_k , $k \in \mathbb{K}_{n_u}$, são constantes positivas com valores conhecidos. Observe que $\text{sat}(u_k(t)) = u_k(t)$ se $|u_k(t)| \leq \rho_k$, $k \in \mathbb{K}_{n_u}$. Logo, a região de operação para a entrada de controle é definida como

$$\mathcal{U} := \{u(t) \in \mathbb{R}^{n_u} : |u_k(t)| \leq \rho_k, k \in \mathbb{K}_{n_u}\}. \quad (3)$$

Consequentemente, para $u(t) \in \mathcal{U}$ a entrada de controle opera na região linear da saturação, ou seja, $\text{sat}(u(t)) = u(t)$. Logo, o sistema não linear incerto (2) pode ser representado por

$$\dot{x}(t) = f_1(z(t))x(t) + f_2(z(t))u(t) + f_3(z(t))w(t), \quad (4a)$$

$$y(t) = g_1(z(t))x(t) + g_2(z(t))u(t) + g_3(z(t))w(t), \quad (4b)$$

Considere o esquema de controle proposto na Figura 1 e o vetor de estado expandido, definido como

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x + n_u}. \quad (5)$$

Para $u(t) \in \mathcal{U}$, $\forall t \geq 0$, observe que a derivada temporal da lei de controle $u(t)$ é dada por $v(\tilde{x}(t))$, tal que

$$v(\tilde{x}(t)) = v(x(t), u(t)) = \dot{u}(t). \quad (6)$$

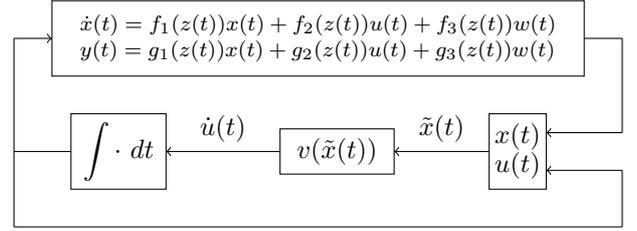


Figura 1. Esquema de controle com realimentação do vetor de estado expandido.

2.1 Representação exata do sistema não linear incerto através do modelo fuzzy T-S

Dada a região de operação no espaço de estados

$$\mathcal{X} := \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |R_{(h)}x(t)| \leq \phi_h, h \in \mathbb{K}_p\}, \quad (7)$$

sendo que a matriz $R = [R_{(1)}^T \dots R_{(p)}^T]^T \in \mathbb{R}^{p \times n_x}$ e o vetor $\phi = [\phi_1 \dots \phi_p]^T \in \mathbb{R}^p$ são conhecidos, e a região de operação para a entrada de controle \mathcal{U} , sendo $\rho = [\rho_1 \dots \rho_{n_u}]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$. A partir destas duas regiões de operação, pode-se estabelecer uma região de operação $\mathcal{S} = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ que será denominada de região de operação expandida.

Considerando o vetor de estado expandido $\tilde{x}(t)$, a região de operação expandida \mathcal{S} é definida como

$$\mathcal{S} := \{\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x + n_u} : |S_{(m)}\tilde{x}(t)| \leq \vartheta_m, m \in \mathbb{K}_{p+n_u}\}, \quad (8)$$

sendo que $S = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n_u} \end{bmatrix} = [S_{(1)}^T \dots S_{(p+n_u)}^T]^T \in \mathbb{R}^{(p+n_u) \times (n_x+n_u)}$ e $\vartheta = [\phi^T \ \rho^T]^T \in \mathbb{R}^{p+n_u}$, são parâmetros conhecidos a partir de \mathcal{X} e \mathcal{U} . Na região de operação \mathcal{S} o sistema não linear incerto sujeito à saturação, dado em (2), pode ser exatamente descrito pelo modelo fuzzy T-S como descrito em (9) e (10):

Regra i : SE $z_1(t)$ é μ_{i1} e ... e $z_q(t)$ é μ_{iq} ,

$$\text{ENTÃO} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + H_i w(t), \\ y(t) = C_i x(t) + D_i u(t) + G_i w(t), \end{cases} \quad (9)$$

A partir de Tanaka et al. (1998), das definições dadas em (1) e (9), $\dot{x}(t)$ e $y(t)$ podem ser escritos como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + H_i w(t)) \\ &= A_z x(t) + B_z u(t) + H_z w(t), \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t) + G_i w(t)) \\ &= C_z x(t) + D_z u(t) + G_z w(t), \end{aligned} \quad (10b)$$

sendo $\alpha_i(z(t)) = \frac{\mu_{i1}(z_1(t)) \times \dots \times \mu_{iq}(z_q(t))}{\sum_{i=1}^r (\mu_{i1}(z_1(t)) \times \dots \times \mu_{iq}(z_q(t)))}$, e $\mu_{il}(z_l(t))$ é a função de pertinência, em termos de variáveis desconhecidas ou parâmetros incertos, correspondente ao conjunto fuzzy μ_{il} , $i \in \mathbb{K}_r$ e $l \in \mathbb{K}_q$. O elemento α_i do vetor $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]^T \in \Lambda_r$ dado em (1) é o peso normalizado de cada modelo local do sistema ($A_i, B_i, C_i, D_i, G_i, H_i$) definido em (9), para $i \in \mathbb{K}_r$.

Utilizando o esquema de controle com realimentação do vetor de estado expandido, dado na Figura 1, e conside-

rando a representação do sistema não linear incerto dada em (10), pode-se representar a dinâmica do vetor de estado expandido, tal que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{\dot{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_z & B_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_z} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} v(\tilde{x}(t)) + \underbrace{\begin{bmatrix} H_z \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{H}_z} w(t), \quad (11a)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C_z & D_z \end{bmatrix}}_{\tilde{C}_z} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(t)} + \underbrace{G_z}_{\tilde{G}_z} w(t). \quad (11b)$$

2.2 Candidata a função de Lyapunov e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$

Considere a candidata a função de Lyapunov quadrática

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t), \quad (12)$$

sendo que $P \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$ é uma matriz simétrica definida positiva. Para uma dada constante positiva v_0 , define-se o seguinte conjunto elipsoidal

$$\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) := \{\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x+n_u} : \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t) \leq v_0\}. \quad (13)$$

O lema a seguir é apresentado com o propósito de expandir o volume do conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, 1)$.

Lema 1. O conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, 1)$ pode ser expandido ao inserir a restrição $\{\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x+n_u} : \tilde{x}(t)^T \tilde{x}(t) \leq \beta\} \subset$

$\tilde{\mathcal{E}}(V, 1)$, que é imposta se a LMI $\begin{bmatrix} \beta^{-1} I & I \\ I & X \end{bmatrix} \geq 0$ for factível, sendo que $X = P^{-1}$ e β é uma constante positiva e pode ser utilizada como uma variável a ser maximizada, de forma a obter uma estimativa menos conservadora do conjunto de condições iniciais $\tilde{\mathcal{E}}(V, 1)$.

Prova. A demonstração do Lema 1 é similar à demonstração apresentada em Lee et al. (2015).

2.3 Lei de controle utilizando o vetor de estado expandido

A seguir, duas leis de controle distintas serão apresentadas.

Lei de controle dependente das funções de pertinência:

Primeiramente, baseada na compensação distribuída paralela, considere a seguinte lei de controle dependente do parâmetro α :

$$\begin{aligned} \text{Regra } i: & \text{ SE } z_1(t) \text{ é } \mu_{i1} \text{ e } \dots \text{ e } z_q(t) \text{ é } \mu_{iq}, \\ & \text{ ENTÃO } v_z(\tilde{x}(t)) = -K_i \tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

e a partir das definições dadas em (1) e (14), $v_z(\tilde{x}(t))$ pode ser escrita como segue:

$$v_z(\tilde{x}(t)) = -\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i \tilde{x}(t) = -K_z \tilde{x}(t). \quad (15)$$

Lei de controle chaveada: Baseando-se em Souza et al. (2013), considere a lei de controle chaveada utilizando o vetor de estado expandido, dada por:

$$v_\sigma(\tilde{x}(t)) = -K_\sigma \tilde{x}(t), \quad \sigma = \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)\}, \quad (16)$$

sendo que $\arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)\}$ denota o menor índice σ , tal que

$$-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_\sigma \tilde{x}(t) = \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)\}. \quad (17)$$

O procedimento proposto utiliza a regra de chaveamento σ , dada em (16), tal que o produto $-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)$, $i \in \mathbb{K}_r$, é utilizado para determinar o valor do índice σ . Este índice σ seleciona um ganho do controlador de realimentação do vetor de estado expandido, que pertence ao conjunto de ganhos $\{K_i \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x+n_u)}, i \in \mathbb{K}_r\}$. Esta regra de chaveamento σ é projetada com o propósito de eliminar a necessidade de utilizar as funções de pertinência na implementação da lei de controle. A ideia principal parte do fato de que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual do que qualquer combinação convexa dos elementos do conjunto.

2.4 O problema de controle \mathcal{H}_∞ considerando a região de operação expandida

Um importante índice de desempenho é a norma \mathcal{H}_∞ , que está relacionado com a capacidade do sistema de rejeitar distúrbios de energia limitada (Boyd et al. (1994)).

Supor que o distúrbio $w(t)$ possui energia limitada é essencial para o projeto de controle \mathcal{H}_∞ . Além disso, diversos trabalhos que tratam do problema de controle \mathcal{H}_∞ para sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy T-S, não apresentam condições que garantem que o vetor de estado permanecerá dentro da região de operação, para $w(t) \neq 0$. Por esse motivo, o valor máximo da energia do distúrbio $w(t)$ muitas vezes não é utilizado no projeto de controle.

Neste trabalho, para lidar com o problema de controle \mathcal{H}_∞ considerando a região de operação, será atribuído um valor ao limitante da energia do distúrbio, que será dado por uma constante positiva ϵ , tal que $w(t) \in \mathcal{W}$, sendo

$$\mathcal{W} := \left\{ w(t) \in \mathbb{R}^{n_w} : \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq \epsilon \right\}. \quad (18)$$

Além disso, considere a variável de relaxação $\varphi > 0$ e uma constante $\epsilon_0 \geq 0$, tal que $V(\tilde{x}(0)) = \epsilon_0$.

Logo, o problema de controle \mathcal{H}_∞ para um sistema não linear, considerando a região de operação expandida \mathcal{S} , consiste em determinar uma lei de controle que satisfaça os seguintes requisitos:

- (1) para $w(t) = 0$, $t \geq 0$, a origem $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (11) e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração (ou seja, se $\tilde{x}(0)$ pertence ao conjunto $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$, então todas as trajetórias de $\tilde{x}(t)$, $t > 0$, também irão permanecer dentro deste conjunto). A Figura 2 ilustra esta propriedade.
- (2) para $w(t) \in \mathcal{W}$, qualquer trajetória com condição inicial dentro de $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0)$ (ou seja, $\tilde{x}(0)^T P \tilde{x}(0) \leq \epsilon_0$) não irá escapar do conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$, para todo $t \geq 0$. Esta propriedade é ilustrada na Figura 3.
- (3) para $w(t) \in \mathcal{W}$ e $\tilde{x}(0) = 0$, o sistema realimentado (11) possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma > 0$, satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$\|y(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w(t)\|_2^2, \quad \forall \alpha \in \Lambda_r. \quad (19)$$

- (4) A relação de inclusão $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \subset \mathcal{S}$ deve ser garantida, pois se $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$ for um conjunto

positivamente invariante do domínio de atração, então a restrição $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \subset \mathcal{S}$ garante que:

- o sinal de controle sujeito a saturação $\text{sat}(u(t))$ está confinado dentro da região linear da saturação, podendo ser representado por $\text{sat}(u(t)) = u(t)$. Ou seja, se $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$, consequentemente $\tilde{x}(t) \in \mathcal{S}$, logo $u(t) \in \mathcal{U}$ e o sistema não linear incerto (2) é dado por (4).
- o sistema não linear incerto (4) pode ser exatamente descrito pelo modelo fuzzy T-S dado em (10). Ou seja, se $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$, consequentemente $\tilde{x}(t) \in \mathcal{S}$, logo $u(t) \in \mathcal{U}$ e $x(t) \in \mathcal{X}$ e o sistema não linear incerto, dado em (2), pode ser representado por (10).

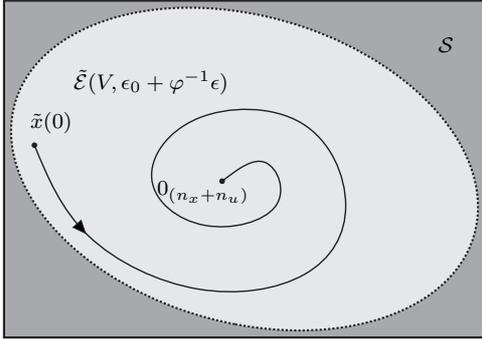


Figura 2. Relações de inclusão entre os conjuntos \mathcal{S} e $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$, e a trajetória do vetor de estado $\tilde{x}(t)$ para $w(t) = 0$ e $t \geq 0$.

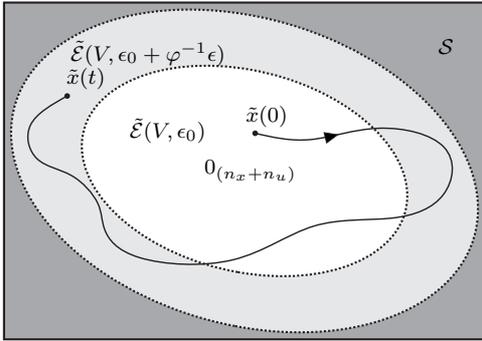


Figura 3. Relações de inclusão entre os conjuntos \mathcal{S} , $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$ e $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0)$, e a trajetória do vetor de estado $\tilde{x}(t)$ para $w(t) \in \mathcal{W}$ e $t \geq 0$.

2.5 Relação de inclusão entre os conjuntos da região de operação expandida

A partir dos problemas de controle apresentados na Seção 2.4, observe que existe uma relação de inclusão entre os conjuntos \mathcal{S} e $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$ que deve ser garantida. O Lema 2 apresenta uma condição que garante esta relação de inclusão.

Lema 2. Considere os conjuntos \mathcal{S} e $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$ dados em (8) e (13), respectivamente. A condição $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$ é assegurada se a seguinte LMI for factível:

$$\begin{bmatrix} v_m^2 v_0^{-1} & * \\ X S_{(m)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (20)$$

para todo $m \in \mathbb{K}_{p+n_u}$, sendo que $X = P^{-1}$.

Prova. A demonstração do Lema 2 é apresentado no Apêndice A.

2.6 Relação entre as derivadas temporais das funções de Lyapunov utilizando a lei de controle dependente do parâmetro α e a lei de controle chaveada

O Lema 3, apresentado a seguir, possibilita projetar os ganhos $K_i \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x + n_u)}$, $i \in \mathbb{K}_r$, da lei de controle chaveada (16), considerando a lei de controle dependente das funções de pertinência (15).

Lema 3. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t)$, dada em (12), sendo que $P \in \mathbb{R}^{(n_x + n_u) \times (n_x + n_u)}$ é uma matriz simétrica definida positiva. Defina $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t))$ a derivada temporal de $V(\tilde{x}(t))$ para o sistema não linear incerto (2), realimentado pela lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (16). Defina $\dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ a derivada temporal de $V(\tilde{x}(t))$ para o sistema não linear incerto (2), realimentado pela lei de controle $v_z(\tilde{x}(t))$, dada em (15).

Suponha que as condições de projeto garantam que $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$ para $t \geq 0$. A lei de chaveamento $\sigma = \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)\}$, dada em (16), garante que $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$.

Prova. A demonstração do Lema 3 é apresentado no Apêndice B.

3. PROJETO DE CONTROLE \mathcal{H}_∞ CHAVEADO CONSIDERANDO REGIÃO DE OPERAÇÃO EXPANDIDA

Teorema 1. Considere a região de operação \mathcal{S} , na qual o sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador e distúrbio de energia limitada (2) pode ser exatamente descrito por (11), sendo que $\vartheta \in \mathbb{R}^{p+n_u}$, $S \in \mathbb{R}^{(n_x + n_u) \times (n_x + n_u)}$, $\epsilon_0 \geq 0$, $\epsilon > 0$ e $\varphi > 0$ são conhecidos. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{(n_x + n_u) \times (n_x + n_u)}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x + n_u)}$ e um escalar $\mu > 0$, tais que o seguinte problema de otimização seja factível:

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} \tilde{A}_i X + X \tilde{A}_i^T - \tilde{B} M_i - M_i^T \tilde{B}^T & \tilde{H} & X \tilde{C}_i \\ & \tilde{H}_i^T & -\varphi^{-1} I \\ & \tilde{C}_i X & \tilde{G}_i & -\varphi \mu I \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\vartheta_m^2}{\epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon} & S_{(m)} X \\ X S_{(m)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (22)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $m \in \mathbb{K}_{p+n_u}$. Então $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \subset \mathcal{S}$ e o esquema de controle da Figura 1 com a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (16), sendo que $K_i = M_i X^{-1}$ e $P = X^{-1}$, garante que:

- (1) para $w(t) = 0$, $t \geq 0$, a origem $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (11) e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$ é um conjunto positivamente

invariante do domínio de atração (ou seja, se $\tilde{x}(0)$ pertence ao conjunto $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$, então todas as trajetórias de $\tilde{x}(t)$, $t > 0$, irão permanecer dentro deste conjunto). A Figura 2 ilustra esta propriedade;

- (2) para $w(t) \in \mathcal{W}$, se $\tilde{x}(0) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0)$, então $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$, para todo $t \geq 0$. A Figura 3 ilustra esta propriedade;
- (3) para $w(t) \in \mathcal{W}$, se $\tilde{x}(0) = 0$, então o sistema não linear incerto (11) possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\mu} > 0$, tal que $\|y(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2$, e $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varphi^{-1}\epsilon)$, para todo $t \geq 0$.

Prova. A demonstração do Teorema 1 é apresentado no Apêndice C.

4. IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA UTILIZANDO UM SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA DE BANCADA COM FALHA NO ATUADOR

Considere o sistema de suspensão ativa de um veículo, fabricado pela Quanser[®], apresentado na Figura 4. O seu modelo esquemático está representado na Figura 5. O propósito deste exemplo é projetar e implementar uma lei de controle \mathcal{H}_∞ chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, utilizando a realimentação do vetor de estado expandido. A descrição do sistema de suspensão ativa e os valores dos parâmetros podem ser encontrados em de Oliveira (2017).

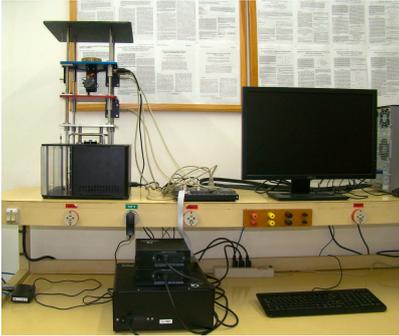


Figura 4. Sistema de suspensão ativa da Quanser[®] pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle da UNESP Ilha Solteira.

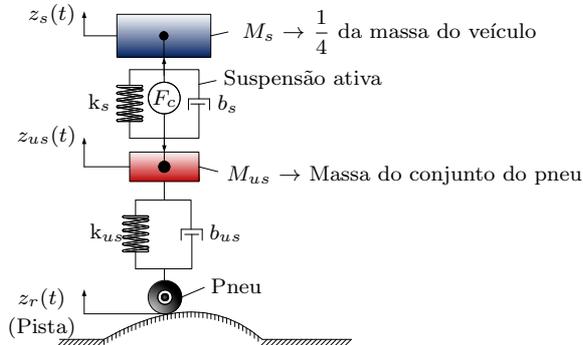


Figura 5. Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.

Com base na modelagem apresentada em de Oliveira (2017), considerando o vetor das variáveis de premissa $z(t) = [x(t)^T \Delta k_{us} k_{falha}]^T$, o modelo dinâmico do sistema de suspensão ativa pode ser representado por

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & f_{43}(z(t)) & -\frac{(b_s + b_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{falha}(t)}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{k_{falha}(t)}{M_{us}} \end{bmatrix} \text{sat}(u(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} w(t), \quad (23)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s(t) \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us}(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t),$$

$$w(t) = \dot{z}_r, \quad f_{43}(z(t)) = -\frac{k_{us0}(1 + \Delta k_{us} |z_{us} - z_r|)}{M_{us}}.$$

Para encontrar os modelos locais do sistema, os valores máximos e mínimos das funções $k_{falha}(t)$ e $f_{43}(z(t))$ devem ser obtidos. Neste caso, a metodologia proposta em Santim et al. (2012) será utilizada. Considerando que a falha no atuador pode diminuir 20% da potência do atuador, então $0,8 \leq k_{falha}(t) \leq 1$. Devido a restrição física relacionada ao comprimento da mola, a variável de estado $z_{us} - z_r$ é limitada no intervalo $-0,02 \leq z_{us} - z_r \leq 0,02\text{m}$. Assim, o domínio D da função não linear $f_{43}(z(t))$ e de $k_{falha}(t)$ é

$$D = \left\{ z(t) = [x(t)^T \Delta k_{us} k_{falha}]^T \in \mathbb{R}^6 : 0 \leq \Delta k_{us} \leq 2, -0,02 \leq z_{us} - z_r \leq 0,02, 0,8 \leq k_{falha}(t) \leq 1 \right\}, \quad (24)$$

lembrando que, de (23), tem-se que $z_{us} - z_r = x_3(t)$.

Adotando a representação do sistema não linear incerto (2) através do modelo fuzzy T-S em função do vetor de estado expandido, apresentado em (11), observe que é possível obter os modelos locais expandidos $\tilde{A}_i, \tilde{B}, \tilde{H}_i, \tilde{C}_i, \tilde{G}_i$, $i \in \mathbb{K}_4$, dados em de Oliveira (2017) (p.90).

Tem-se que a região de operação \mathcal{X} tem $p = 1$, $h \in \mathbb{K}_1$, $R = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$ e $\phi = 0,02$. O sinal de controle $F_c(t)$ é limitado entre os valores de $\pm 39,2\text{N}$, de acordo com as sugestões do fabricante e as restrições físicas do equipamento. Então, a região \mathcal{U} tem $n_u = 1$, $k \in \mathbb{K}_1$ e $\rho = 39,2$. A partir destas informações, a região de operação expandida \mathcal{S} tem $m \in \mathbb{K}_2$ e $S = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\vartheta = [\phi \ \rho]^T = [0,02 \ 39,2]^T$. Para a implementação, considerou-se que o sinal de referência $z_r(t)$, que altera o perfil da pista, reproduz um sinal senoidal com amplitude de $0,0015\text{m}$ e frequência ($f = 1 + t$)Hz para $0,5 \leq t \leq 9,5\text{s}$, ou seja, a frequência varia linearmente de $1,5$ até $10,5\text{Hz}$. Já para $0 \leq t < 0,5\text{s}$ e $9,5 < t \leq 10\text{s}$ a amplitude de $z_r(t)$ é igual a zero. Observe que $w(t)$ possui energia limitada. Então, considere que $\tilde{x}(0) = 0$, $\tilde{x}(0)^T P \tilde{x}(0) = 0$ e $\int_0^{10} w(t)^T w(t) dt \leq \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq 0,02$, tal que $\epsilon_0 = 0$ e $\epsilon = 0,02$.

Finalmente, para $\varphi = 10$ e $\beta = 0,01$, que foram escolhidos pelo projetista após alguns testes, o problema de otimização apresentado no Teorema 1, em conjunto com a LMI do Lema 1, foi resolvido. A solução do problema de otimização apresentou um custo garantido \mathcal{H}_∞ de $\gamma = 0,1004$. Obteve-se também os seguintes ganhos dos controladores

K_i , $i \in \mathbb{K}_4$, e a matriz simétrica definida positiva P :

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} 145535,26 & 32085,69 & -486188,57 & -9545,71 & 403,44 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= \begin{bmatrix} 149182,43 & 32771,99 & -497010,64 & -9748,03 & 411,79 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= \begin{bmatrix} 380365,66 & 69746,19 & -1022867,76 & -18555,93 & 843,55 \end{bmatrix}, \\ K_4 &= \begin{bmatrix} 383780,10 & 70393,10 & -1033146,69 & -18748,25 & 851,43 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$P = \begin{bmatrix} 22,02 & 2,73 & -33,97 & -0,46 & 0,02 \\ 2,73 & 0,40 & -5,52 & -0,08 & 0,004 \\ -33,97 & -5,52 & 84,71 & 1,34 & -0,064 \\ -0,46 & -0,08 & 1,34 & 0,02 & -0,001 \\ 0,02 & 0,004 & -0,06 & -0,001 & 0,00005 \end{bmatrix}.$$

Foram realizadas duas implementações. Na primeira implementação, utilizou-se o sistema em malha aberta ($u(t) = 0$, para $0 \leq t \leq 10$ s). Na segunda, a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, inserindo uma falha de 20% no atuador via *software* MatLab/Simulink®. A resposta dinâmica do sistema de suspensão ativa, realimentado utilizando o esquema de controle da Figura 1 e a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$ é apresentada na Figura 6. Note que o sistema em malha fechada reduziu as amplitudes máximas de z_s e z_{us} , proporcionando conforto e segurança ao possível passageiro do veículo com tal sistema de suspensão.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado para uma classe de sistemas não lineares incertos. As principais vantagens encontradas foram: i) Não é necessário calcular as funções de pertinência para a implementação da lei de controle; ii) Ao utilizar um integrador para obter o sinal de controle, não existe a possibilidade do sinal de controle apresentar descontinuidade; iii) Considerando o vetor de estado expandido, as condições de projeto garantem a permanência do vetor de estado e do sinal de controle na região de operação do sistema; iv) Foi possível realizar uma implementação prática em um sistema de suspensão ativa e observou-se que o controle \mathcal{H}_∞ mitigou a influência da entrada exógena na saída do sistema.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao IFMS, ao IFPR, a CAPES, ao CNPq e a FAPESP (Processo: 2011/17610-0) pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Boyd, S., Ghaoui, L.E., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia.
- de Oliveira, D.R. (2017). *Controle \mathcal{H}_∞ chaveado para sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy T-S considerando região de operação e saturação do sinal de controle*. Ph.D. thesis, UNESP - Ilha Solteira, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.
- de Oliveira, D.R., Teixeira, M.C.M., Alves, U.N.L.T., de Souza, W.A., Assunção, E., and Cardim, R. (2018). On local H_∞ switched controller design for uncertain T-S fuzzy systems subject to actuator saturation with

unknown membership functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 344, 1 – 26.

- Lee, D.H., Park, J.B., Joo, Y.H., and Kim, S.K. (2015). Local \mathcal{H}_∞ controller design for continuous-time T-S fuzzy systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 13(6), 1499–1507.
- Santim, M.P.A., Teixeira, M.C.M., Souza, W.A., Assunção, E., and Cardim, R. (2012). Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, 1–17.
- Souza, W.A., Teixeira, M.C.M., Santim, M.P.A., Cardim, R., and Assunção, E. (2013). On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 10.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, SMC-15*, (1), 116–132.
- Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H.O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2), 250–265.
- Taniguchi, T., K., Ohatake, H., and Wang, H.O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(4), 525–537.

Apêndice A

A demonstração do Lema 2 é apresentado a seguir.

Prova. Primeiramente, multiplicando ambos os lados de (20) por $\text{diag}\{1, P\}$, sendo $P = X^{-1}$, e aplicando o complemento de Schur, obtém-se

$$\begin{aligned} P - S_{(m)}^T \vartheta_m^{-2} v_0 S_{(m)} &\geq 0, \\ P &\geq S_{(m)}^T \vartheta_m^{-2} v_0 S_{(m)}, \\ \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t) &\geq \tilde{x}(t)^T S_{(m)}^T \vartheta_m^{-2} v_0 S_{(m)} \tilde{x}(t). \end{aligned}$$

Sendo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$, de (13) tem-se que $\tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t) \leq v_0$ e assim

$$\begin{aligned} v_0 &\geq \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t) \geq \vartheta_m^{-2} v_0 \tilde{x}(t)^T S_{(m)}^T S_{(m)} \tilde{x}(t), \\ \vartheta_m^2 &\geq \tilde{x}(t)^T S_{(m)}^T S_{(m)} \tilde{x}(t). \end{aligned}$$

Portanto, a partir de (8), para $m \in \mathbb{K}_{p+n_u}$, observe que que $\tilde{x}(t) \in \mathcal{S}$ e, conseqüentemente, $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$.

Apêndice B

A demonstração do Lema 3 é apresentado a seguir.

Prova. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t)$, dada em (12), sendo que $P \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$ é uma matriz simétrica definida positiva. Note que a cada instante de tempo a derivada temporal de $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t)$ pode ser representada por $\dot{V}(\tilde{x}(t)) = 2\tilde{x}(t)^T P \dot{\tilde{x}}(t)$. Defina $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t))$ a derivada temporal de $V(\tilde{x}(t))$ para o sistema não linear incerto (2), realimentado pela lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (16).

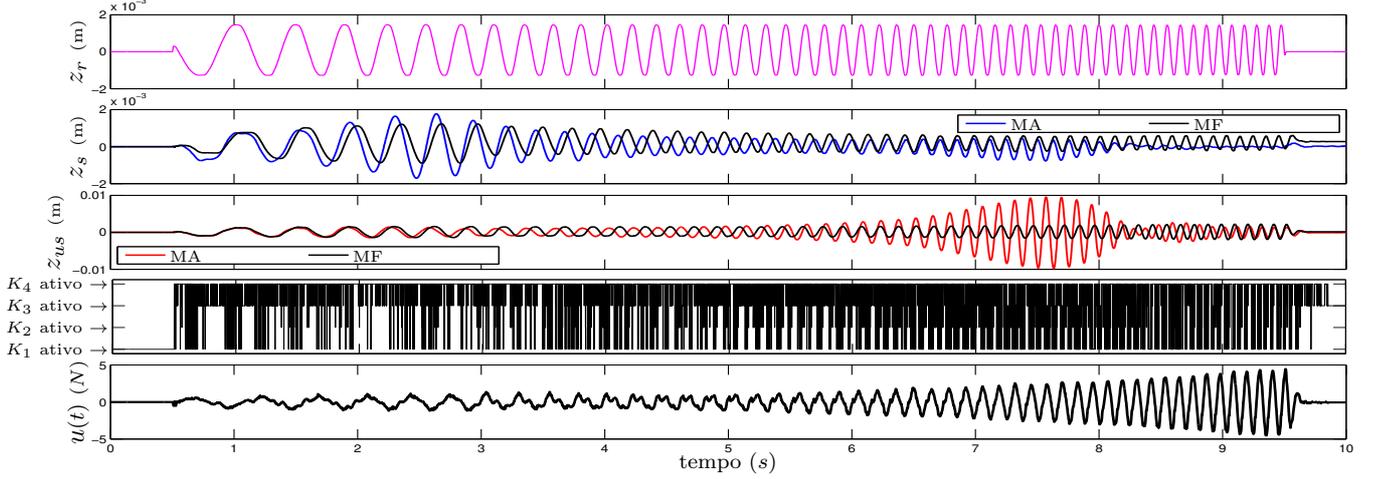


Figura 6. Resposta temporal prática para a varredura em frequência do sistema de suspensão ativa em malha aberta (MA) e em malha fechada (MF), utilizando a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$.

Suponha que as condições de projeto garantam que $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$ para $t \geq 0$. Logo, o modelo fuzzy T-S (11) descreve exatamente a dinâmica do sistema não linear incerto (2) e tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) &= 2\tilde{x}(t)^T P \left(\tilde{A}_z \tilde{x}(t) + \tilde{B} v_\sigma(\tilde{x}(t)) + \tilde{H}_z w(t) \right) \\ &= 2\tilde{x}(t)^T P \left(\tilde{A}_z \tilde{x}(t) + \tilde{H}_z w(t) \right) - 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_\sigma \tilde{x}(t) \\ &= 2\tilde{x}(t)^T P \left(\tilde{A}_z \tilde{x}(t) + \tilde{H}_z w(t) \right) \\ &\quad + 2 \min_{i \in \mathbb{K}_r} \left\{ \tilde{x}(t)^T P \tilde{B} (-K_i) \tilde{x}(t) \right\}. \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

A partir de (1), lembrando que $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, tem-se a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} \min_{i \in \mathbb{K}_r} \left\{ \tilde{x}(t)^T P \tilde{B} (-K_i) \tilde{x}(t) \right\} \\ \leq \tilde{x}(t)^T P \tilde{B} \left(-\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i \right) \tilde{x}(t). \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

Agora, defina $\dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ a derivada temporal de $V(\tilde{x}(t))$ para o sistema não linear incerto (2), realimentado pela lei de controle dependente de parâmetro $v_z(\tilde{x}(t))$, dada em (15). Então, a partir de (1), (B.1) e (B.2), obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) &= 2\tilde{x}(t)^T P \left(\tilde{A}_z \tilde{x}(t) + \tilde{B} v_\sigma(\tilde{x}(t)) + \tilde{H}_z w(t) \right) \\ &= 2\tilde{x}(t)^T P \left(\tilde{A}_z \tilde{x}(t) + \tilde{H}_z w(t) \right) - 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_\sigma \tilde{x}(t) \\ &= 2\tilde{x}(t)^T P \left(\tilde{A}_z \tilde{x}(t) + \tilde{H}_z w(t) \right) \\ &\quad + 2 \min_{i \in \mathbb{K}_r} \left\{ \tilde{x}(t)^T P \tilde{B} (-K_i) \tilde{x}(t) \right\} \\ &\leq 2\tilde{x}(t)^T P \left(\tilde{A}_z \tilde{x}(t) + \tilde{H}_z w(t) \right) \\ &\quad + 2 \left\{ \tilde{x}(t)^T P \tilde{B} \left(-\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i \right) \tilde{x}(t) \right\} \\ &= 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{A}_z \tilde{x}(t) - 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_z \tilde{x}(t) + 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{H}_z w(t) \\ &= 2\tilde{x}(t)^T P \left(\tilde{A}_z \tilde{x}(t) + \tilde{B} v_z(\tilde{x}(t)) + \tilde{H}_z w(t) \right) \\ &= \dot{V}_z(\tilde{x}(t)). \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$.

Apêndice C

A demonstração do Teorema 1 é apresentado a seguir.

Inicialmente, observe que para o caso particular em que o distúrbio externo é nulo ($w(t) = 0$), o sistema não linear (11) pode ser reescrito como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\tilde{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_z & B_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_z} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} v(\tilde{x}(t)) \quad (\text{C.1a})$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C_z & D_z \end{bmatrix}}_{\tilde{C}_z} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(t)}. \quad (\text{C.1b})$$

Prova. Considere a candidata a função de Lyapunov dada em (12) e as definições de $\dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ e $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t))$ apresentadas no Lema 3. Primeiramente, de acordo com o Lema 2, observe que (22) garante que $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \subset \mathcal{S}$.

Agora, a partir de (1), pré e pós multiplicando (21) por $\text{diag}\{X^{-1}, I, I\}$, substituindo $X^{-1} = P$ e $M_i = K_i X$ e multiplicando o resultado por $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e realizando o somatório de $i = 1$ até r , obtém-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_z^T P + P \tilde{A}_z - P \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P & * & * \\ \tilde{H}_z^T P & -\varphi^{-1} I & * \\ \tilde{C}_z & \tilde{G}_z & -\varphi \mu I \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{C.2})$$

e conseqüentemente

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_z^T P + P \tilde{A}_z - P \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P & * \\ \tilde{H}_z^T P & -\varphi^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{C.3})$$

$$\tilde{A}_z^T P + P \tilde{A}_z - P \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P < 0. \quad (\text{C.4})$$

- Primeira propriedade:

Para demonstrar a primeira propriedade, considere que $w(t) = 0$ para $t \geq 0$. A partir de (C.4), para $\tilde{x}(t) \neq 0$, tem-se que

$$\tilde{x}(t)^T \left\{ \tilde{A}_z^T P + \tilde{P} \tilde{A}_z - \tilde{P} \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P \right\} \tilde{x}(t) < 0. \quad (\text{C.5})$$

Note que neste caso, para $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \subset \mathcal{S}$, o modelo fuzzy T-S (C.1) descreve exatamente a dinâmica do sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador (2). A partir de (C.1) e (12), lembrando que $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \subset \mathcal{S}$, a desigualdade (C.5) implica que $\dot{V}_z(\tilde{x}(t)) < 0$, para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \setminus \{0\}$. De acordo com o Lema 3, observe que a lei de chaveamento $\sigma = \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)\}$, dada em (16), garante que $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \subset \mathcal{S}$. Consequentemente, a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (16), garante que a origem $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (C.1) e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração, ou seja, toda a trajetória do vetor de estado iniciada em $\tilde{x}(0) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$ permanece na região de operação \mathcal{S} .

- Segunda propriedade:

Agora, na demonstração da segunda propriedade, considere que $w(t) \in \mathcal{W}$. A partir de (C.3), para $\tilde{x}(t) \neq 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &> \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_z^T P + P \tilde{A}_z - P \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P & * \\ \tilde{H}_z^T P & -\varphi^{-1} I \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &= \tilde{x}(t)^T \left\{ \tilde{A}_z^T P + P \tilde{A}_z - P \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P \right\} \tilde{x}(t) \\ &\quad + \tilde{x}(t)^T P \tilde{H}_z w(t) + w(t)^T \tilde{H}_z^T P \tilde{x}(t) - w(t)^T \varphi^{-1} w(t). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Observe que, para $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \subset \mathcal{S}$, o modelo fuzzy T-S (11) descreve exatamente a dinâmica do sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador (2). A partir de (11) e (12), lembrando que $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \subset \mathcal{S}$, a desigualdade (C.6) implica que

$$\dot{V}_z(\tilde{x}(t)) - \varphi^{-1} w(t)^T w(t) < 0, \quad (\text{C.7})$$

para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \setminus \{0\}$. De acordo com o Lema 3, observe que a lei de chaveamento $\sigma = \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)\}$, dada em (16), garante que

$\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \subset \mathcal{S}$. Consequentemente, a partir de (C.7), a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (16), garante que

$$\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t)) < \varphi^{-1} w(t)^T w(t), \quad (\text{C.8})$$

para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \setminus \{0\}$. Considerando $\tilde{x}(0) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0)$ e a partir de (18), tem-se que $V(\tilde{x}(0)) \leq \epsilon_0$ e $\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq \epsilon$, respectivamente. Logo, integrando (C.8) de 0 até t_f , obtém-se

$$\begin{aligned} V(\tilde{x}(t_f)) &< V(\tilde{x}(0)) + \varphi^{-1} \int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt \\ &\leq V(\tilde{x}(0)) + \varphi^{-1} \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \\ &\leq V(\tilde{x}(0)) + \varphi^{-1} \epsilon \leq \epsilon_0 + \varphi^{-1} \epsilon, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

concluindo que $V(\tilde{x}(\infty)) < \epsilon_0 + \varphi^{-1} \epsilon$. Desta forma, a desigualdade (C.9) assegura que qualquer trajetória com condição inicial $\tilde{x}(0) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0)$ irá permanecer dentro do conjunto $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1} \epsilon) \setminus \partial \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1} \epsilon)$, para todo $t \geq 0$, sendo que $\partial \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1} \epsilon)$ é a fronteira de $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1} \epsilon)$.

- Terceira propriedade:

Novamente, na demonstração da terceira propriedade, considere $w(t) \in \mathcal{W}$. Aplicando o complemento de Schur em (C.2), sendo que $\mu = \gamma^2$, obtém-se

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \tilde{A}_z^T P + P \tilde{A}_z - P \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P & * \\ \tilde{H}_z^T P & -\varphi^{-1} I \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \tilde{C}_z^T \\ \tilde{G}_z^T \end{bmatrix} \varphi^{-1} \gamma^{-2} I \begin{bmatrix} \tilde{C}_z \\ \tilde{G}_z \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

A partir de (C.10), para $\tilde{x}(t) \neq 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &> \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{A}_z^T P + P \tilde{A}_z - P \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P & * \\ \tilde{H}_z^T P & -\varphi^{-1} I \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \tilde{C}_z^T \\ \tilde{G}_z^T \end{bmatrix} \varphi^{-1} \gamma^{-2} I \begin{bmatrix} \tilde{C}_z \\ \tilde{G}_z \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &= \tilde{x}(t)^T \left\{ \tilde{A}_z^T P + P \tilde{A}_z - P \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P \right\} \tilde{x}(t) \\ &\quad + \tilde{x}(t)^T P \tilde{H}_z w(t) + w(t)^T \tilde{H}_z^T P \tilde{x}(t) - w(t)^T \varphi^{-1} w(t) \\ &\quad + \varphi^{-1} \gamma^{-2} \left(\tilde{C}_z \tilde{x}(t) + \tilde{G}_z w(t) \right)^T \left(\tilde{C}_z \tilde{x}(t) + \tilde{G}_z w(t) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

A partir da segunda propriedade do Teorema 1, se $w(t) \in \mathcal{W}$ e $\tilde{x}(0) = 0$, então $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varphi^{-1} \epsilon) \subset \tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1} \epsilon) \subset \mathcal{S}$, para todo $t \geq 0$. Logo, o modelo fuzzy T-S (11) descreve exatamente a dinâmica do sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador (2). A partir de (11) e (12), a desigualdade (C.11) implica que

$$\dot{V}_z(\tilde{x}(t)) + \varphi^{-1} \gamma^{-2} y(t)^T y(t) - \varphi^{-1} w(t)^T w(t) < 0, \quad (\text{C.12})$$

para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varphi^{-1} \epsilon) \setminus \{0\}$. De acordo com o Lema 3, observe que a lei de chaveamento σ , dada em (16), garante que $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varphi^{-1} \epsilon) \subset \mathcal{S}$. Consequentemente, a partir de (C.12), a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (16), garante que

$$\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t)) < -\varphi^{-1} \gamma^{-2} y(t)^T y(t) + \varphi^{-1} w(t)^T w(t), \quad (\text{C.13})$$

para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varphi^{-1} \epsilon) \setminus \{0\}$.

Considerando $\tilde{x}(0) = 0$ e integrando (C.13) de 0 até ∞ , obtém-se

$$\begin{aligned} &\varphi^{-1} \gamma^{-2} \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt - \varphi^{-1} \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \\ &\quad < V(\tilde{x}(0)) - V(\tilde{x}(\infty)) \leq V(\tilde{x}(0)) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Portanto

$$\begin{aligned} &\varphi^{-1} \gamma^{-2} \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt - \varphi^{-1} \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt < 0 \\ &\quad \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \\ &\quad \|y(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

demonstrando que o sistema não linear incerto (2) possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\mu} > 0$.