

# Algoritmo Super-Twisting Adaptativo Multivariável de Camada Dupla<sup>\*</sup>

Jair Luiz de Azevedo Filho<sup>\*</sup> Eduardo Vieira Leão Nunes<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, (e-mail: [jair.azevedo@ufrj.br](mailto:jair.azevedo@ufrj.br); [eduardo@coep.ufrj.br](mailto:eduardo@coep.ufrj.br)).

---

**Abstract:** In this paper, we propose a novel multivariable super-twisting-like structure with adaptive gains and an additional time-varying term. By exploiting information extracted from the equivalent control the magnitudes of the adaptive terms increase and decrease as appropriate so that they are as small as possible and yet are large enough to enforce a second-order sliding mode. Thus, the proposed controller avoids a conservative overestimation of the disturbance, which is important to mitigate the undesirable effects of chattering.

**Resumo:** Neste trabalho, é proposta uma nova estrutura multivariável do tipo Super-Twisting com ganhos adaptativos e um termo adicional variante no tempo. Explorando as informações extraídas do controle equivalente, as magnitudes dos termos adaptativos aumentam e diminuem conforme apropriado, de modo que sejam tão pequenas quanto possível e, ainda assim, grandes o suficiente para impor um modo deslizante de segunda ordem. Dessa forma, o controlador proposto evita uma estimação muito conservadora da perturbação, o que é importante para mitigar os efeitos indesejáveis do chattering.

*Keywords:* Sliding mode control; Lyapunov Methods; higher-order sliding modes; multivariable control; disturbance rejection; nonlinear adaptive control.

*Palavras-chaves:* Controle por modos deslizantes; métodos de Lyapunov; modos deslizantes de ordem superior; controle multivariável; rejeição de perturbações; controle adaptativo não-linear.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Controle por modos deslizantes é um método eficaz para controle robusto de sistemas incertos sujeitos a perturbações. No entanto, o problema de *chattering* que consiste de oscilações indesejadas, causadas pelo chaveamento em alta frequência da ação de controle pode degradar o desempenho do sistema (Utkin, 1992; Shtessel et al., 2014).

Em (Levant, 1993) o conceito de modos deslizantes de ordem superior foi proposto visando a eliminar o problema de *chattering* e preservar as principais vantagens do controle por modos deslizantes convencional. No entanto, em sistemas reais, imperfeições estão sempre presentes, e consequentemente esta abordagem pode apenas atenuar o efeito do *chattering* (Boiko and Fridman, 2005).

O Algoritmo Super-Twisting (STA) recebeu atenção considerável da comunidade de controle por modos deslizantes por ser a única abordagem baseada em modos deslizantes de ordem superior que pode ser implementada sem utilizar a derivada da variável de deslizamento (Levant, 2003). Recentemente, através da abordagem por função de Lyapunov introduzida em (Moreno and Osorio, 2008), novos algoritmos baseados no STA foram desenvolvidos, incluindo esquemas adaptativos para ajuste dos ganhos.

Diversos autores consideraram leis adaptativas que possibilitam o crescimento dos ganhos do STA de modo a

---

<sup>\*</sup> Este trabalho foi financiado pelas seguintes agências de fomento à pesquisa: CAPES, CNPq e FAPERJ.

assegurar o surgimento e a preservação do modo deslizante de segunda ordem (Plestan et al., 2010; Shtessel et al., 2012; Alwi and Edwards, 2013; Bartolini et al., 2013). Entretanto, nesses trabalhos os ganhos não decrescem, resultando em certo conservadorismo e contribuindo para o problema de *chattering*. Para lidar com essa questão, foi proposto em (Utkin and Poznyak, 2013) um esquema adaptativo que usa informação sobre a perturbação/incerteza extraída do controle equivalente para forçar o modo deslizante enquanto reduz a amplitude da ação de controle. Entretanto, nessa abordagem, apenas um dos ganhos é adaptado, enquanto o outro é escolhido grande o suficiente.

Seguindo o mesmo paradigma, foi proposto em (Edwards and Shtessel, 2016) uma modificação na estrutura do algoritmo Super-Twisting convencional junto ao uso do esquema adaptativo de camada dupla, permitindo que ambos os ganhos sejam adaptados. Esse esquema adaptativo também é baseado no conhecimento do controle equivalente e visa a obtenção dos menores valores possíveis para os ganhos capazes de manter o modo deslizante. No entanto, como em (Utkin and Poznyak, 2013), o esquema proposto em (Edwards and Shtessel, 2016) também era restrito à sistemas SISO.

Em (Zhao et al., 2019), uma estratégia de controle tolerante à falhas foi desenvolvida para garantir um rastreamento de atitude preciso e em tempo finito para aeronaves rígidas. Um algoritmo adaptativo de camada dupla baseado no controle equivalente foi proposto, combinado com

o algoritmo Super-Twisting Multivariável. No entanto, assim como em (Utkin and Poznyak, 2013), a estratégia proposta adapta um único ganho, e o outro é escolhido suficientemente grande.

A principal contribuição deste artigo é propor um novo algoritmo Super-Twisting Multivariável não-desacoplado com ganhos adaptativos. Embora um formalismo generalizado seja usado para apresentar o algoritmo, o desenvolvimento é restrito a um caso particular semelhante a versão SISO proposta em (Edwards and Shtessel, 2016). Para auxiliar em uma possível generalização para uma classe de algoritmos baseados no Super-Twisting, um parâmetro adicional foi introduzido no esquema adaptativo de camada dupla. Ambos os ganhos são adaptados usando a informação extraída do controle equivalente, de forma a manter o modo deslizante enquanto evita o uso de ganhos conservadores, mitigando assim, o efeito do *chattering*. Convergência global em tempo finito é garantida por uma abordagem de Lyapunov. O método proposto é aplicado ao problema de detecção e reconstrução de ciber-ataques em sistemas de potência. Os resultados teóricos são ilustrados por meio de simulações numéricas.

*Preliminares:* A norma euclidiana de um vetor  $\mathbf{y}$  e a correspondente norma induzida de uma matriz  $\mathbf{A}$  são descritas por  $\|\mathbf{y}\|$  e  $\|\mathbf{A}\|$ , respectivamente. O autovalor máximo e mínimo de uma matriz  $\mathbf{A}$  são descritos por  $\lambda_{max}(\mathbf{A})$  e  $\lambda_{min}(\mathbf{A})$ , respectivamente.  $I_n$  representa a matriz identidade de ordem  $n$ . Considere que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ , e  $\mathbf{D}$  são matrizes com dimensões compatíveis. Portanto, de (Bernstein, 2009), as seguintes propriedades do produto de Kronecker são satisfeitas

- (P1).  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$
- (P2).  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}$
- (P3).  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$

Aqui, a definição de Fillipov para a solução de equações diferenciais descontínuas é assumida (Filippov, 1964).

## 2. ALGORITMO SUPER-TWISTING ADAPTATIVO MULTIVARIÁVEL

Considere o Algoritmo Super-Twisting Adaptativo Multivariável (*Multivariable Adaptive Super-Twisting Algorithm* - MASTA) proposto a seguir.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) &= -\alpha(t)\boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{\phi}_1) + \mathbf{z}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) &= -\beta(t)\boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}, t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_0 \sqrt{L(t)}, \quad \beta(t) = \beta_0 L(t), \\ \boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{\phi}_1) &= -\frac{\dot{L}}{2L} \left( \frac{d\boldsymbol{\phi}_1}{d\boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} \boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{\sigma}), \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n$  são as variáveis de deslizamento,  $L(t) \in \mathbb{R}$  é um ganho adaptativo que será definido posteriormente,  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  são constantes positivas e  $\mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}, t) \in \mathbb{R}^n$  é uma perturbação de entrada que satisfaz a restrição  $\|\mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}, t)\| < a_1$ , onde  $a_1$  é uma constante positiva porém desconhecida. As funções  $\boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{\sigma})$  e  $\boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{\sigma})$  são definidas de modo que a seguinte propriedade seja satisfeita:

$$\boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{d\boldsymbol{\phi}_1}{d\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{\sigma}), \quad \forall \boldsymbol{\sigma}(t) \neq \mathbf{0} \quad (3)$$

A fim de representar adequadamente uma versão multiva-

riável do algoritmo proposto em (Edwards and Shtessel, 2016), essas funções foram escolhidas como

$$\boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|^{\frac{1}{2}}}, \quad \boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \quad (4)$$

Neste caso, a matriz jacobiana  $\boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é dada por

$$\boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{d\boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{\sigma})}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\sigma}\|^{\frac{1}{2}}} \mathbf{I}_n - \frac{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T}{2\|\boldsymbol{\sigma}\|^{\frac{5}{2}}} \quad (5)$$

Além disso, a forma quadrática associada com  $\boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma})$  é dada por

$$\mathbf{v}^T \frac{d\boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{\sigma})}{d\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{v} = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{\|\boldsymbol{\sigma}\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{(\mathbf{v}^T \boldsymbol{\sigma})^2}{2\|\boldsymbol{\sigma}\|^{\frac{5}{2}}} \quad (6)$$

onde, para cada  $\boldsymbol{\sigma}(t) \neq \mathbf{0}$ , o valor mínimo é alcançado no valor máximo de  $\mathbf{v}^T \boldsymbol{\sigma}$ . Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para produtos internos, tem-se que  $\mathbf{v}^T \boldsymbol{\sigma} \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\boldsymbol{\sigma}\|$ . Logo, a seguinte propriedade é satisfeita para  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{v} &\geq \lambda_{min}(\boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma})) \|\mathbf{v}\|^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \lambda_{min}(\boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma})) &= \frac{1}{2\|\boldsymbol{\sigma}(t)\|^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Logo,  $\forall \boldsymbol{\sigma}(t) \neq \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma})$  é uma matriz simétrica positiva definida (S.P.D.). A igualdade em (7) é satisfeita quando  $\mathbf{v}$  é linearmente dependente de  $\boldsymbol{\sigma}$ . O valor máximo da forma quadrática ocorre quando  $\mathbf{v}$  é ortogonal à  $\boldsymbol{\sigma}$ , isto é,  $\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v} = 0$ . Logo, a seguinte desigualdade é satisfeita para todo  $\boldsymbol{\sigma}(t) \neq \mathbf{0}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{v} &\leq \lambda_{max}(\boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma})) \|\mathbf{v}\|^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \|\boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma})\| &= \lambda_{max}(\boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma})) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\sigma}(t)\|^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Note que com  $n = 1$ , para todo  $\sigma \neq 0$ ,  $\boldsymbol{\phi}'_1(\sigma) = \frac{1}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}}$  é um escalar. Por (4) e (8), pode-se verificar que

$$\boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda_{min}(\boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma})) \boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{\sigma}), \quad \forall \boldsymbol{\sigma}(t) \neq \mathbf{0} \quad (11)$$

É válido frisar que as propriedades (3), (7), (9), e (11) são satisfeitas para outras variações do Algoritmo Super-Twisting, como pode-se verificar em (Vidal et al., 2017). Logo, é possível que os resultados obtidos nesse trabalho possam ser estendidos para uma classe generalizada de algoritmos baseados no Super-Twisting Multivariável.

A estratégia proposta aqui é dividida em duas etapas: Primeiro, mostra-se que, se  $L(t) > \|\mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}, t)\|$ , então o modo deslizante é alcançado com uma escolha apropriada de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ . Logo, temporariamente considera-se a seguinte hipótese:

Hipótese 1. A função  $L(t)$  é absolutamente contínua e satisfaz a seguinte desigualdade para todo  $t \in \mathbb{R}^+$ :

$$L(t) > \begin{cases} l_0, & \forall 0 < t < t_s \\ \max(\|\mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}, t)\|, \epsilon), & \forall t \geq t_s \end{cases} \quad (12)$$

onde  $l_0$  e  $\epsilon$  são constantes positivas que serão definidas durante o projeto de adaptação de  $L(t)$ , assim como o tempo  $t_s$ .

As propriedades de estabilidade e convergência do Algoritmo Super-Twisting Multivariável proposto são apresentadas no Teorema a seguir.

**Teorema 1.** Considere o sistema (1) e assuma que a Hipótese 1 é satisfeita. Então, para qualquer condição inicial

$(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{z}_0)$ , as trajetórias do sistema são globalmente limitadas e o modo deslizante de segunda ordem  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  ocorre em tempo finito, se os ganhos  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  são escolhidos tais que

$$\frac{\alpha_0^2 \beta_0^2}{\alpha_0^2 + \beta_0 + 2} > \frac{\kappa^2}{\kappa - 1}, \quad (13)$$

onde  $\kappa > 1$  é um parâmetro de projeto.

**Prova.** Considere a seguinte função candidata de Lyapunov para o sistema (1):

$$V(t, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{z}) = p_1 \|\boldsymbol{\sigma}\| L(t) - 2p_2 \frac{\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{z}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|^{\frac{1}{2}}} L(t)^{\frac{1}{2}} + p_3 \|\mathbf{z}\|^2 \quad (14)$$

onde  $p_1, p_2$  e  $p_3$  são constantes positivas que garantem que a matriz simétrica

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & -p_2 \\ -p_2 & p_3 \end{bmatrix} > \mathbf{0}.$$

Agora, considerando a seguinte notação

$$\boldsymbol{\zeta} = [\boldsymbol{\zeta}_1^T \quad \boldsymbol{\zeta}_2^T]^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^T \sqrt{L(t)} \\ \|\boldsymbol{\sigma}\|^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \mathbf{z}^T \quad (15)$$

a função de Lyapunov (14) pode ser reescrita como

$$V = \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{P}_n \boldsymbol{\zeta}, \quad \mathbf{P}_n = \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_n \quad (16)$$

Uma vez que  $L(t) > 0$ , e  $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n^T > 0$ , segue que  $V(t, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{z})$  é uma função positiva definida, contínua e radialmente ilimitada com relação à  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{z})$ , e sua derivada pode ser descrita em termos de  $\dot{\boldsymbol{\zeta}}$  da seguinte forma

$$\dot{V} = \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{P}_n \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \dot{\boldsymbol{\zeta}}^T \mathbf{P}_n \boldsymbol{\zeta} \quad (17)$$

De (1), segue que, no subespaço  $S = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{2n} | \boldsymbol{\sigma} \neq \mathbf{0}\}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_1 = \frac{\dot{L}}{2\sqrt{L}} \boldsymbol{\phi}_1 + \sqrt{L} \boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_1 = \frac{\dot{L}}{2\sqrt{L}} \boldsymbol{\phi}_1 + \sqrt{L} \boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma}) (-\alpha \boldsymbol{\phi}_1 + \mathbf{z} + \boldsymbol{\Phi})$$

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_1 = \left( \frac{\dot{L}}{2\sqrt{L}} \boldsymbol{\phi}_1 + \sqrt{L} \boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\Phi} \right) + \sqrt{L} \boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma}) (-\alpha \boldsymbol{\phi}_1 + \mathbf{z})$$

Definindo  $\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{\phi}_1)$  e  $\alpha(t)$  como em (2), e usando a notação proposta em (15), segue que

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_1 = \sqrt{L} \left( -\alpha_0 \boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\zeta}_1 + \frac{d\boldsymbol{\phi}_1}{d\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\zeta}_2 \right) \quad (18)$$

De (2) e (3), e como  $\boldsymbol{\zeta}_2(t) = \mathbf{z}(t)$ , verifica-se que

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_2 = \sqrt{L} \left( -\beta_0 \boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{\sigma}) \sqrt{L} + \frac{d(\boldsymbol{\sigma}, t)}{\sqrt{L}} \right) \quad (19)$$

Reescrevendo (19) usando (15), tem-se que

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_2 = \sqrt{L} (-\beta_0 \boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{\Delta}) \quad (20)$$

onde

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{d(\boldsymbol{\sigma}, t)}{\sqrt{L}}. \quad (21)$$

Note que (18) e (20) podem ser reescritas de forma compacta

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \sqrt{L} (\bar{\mathbf{A}}_0 \boldsymbol{\zeta} + \bar{\mathbf{B}}_0 \boldsymbol{\Delta}) \quad (22)$$

onde  $\bar{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0 \otimes \boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma})$  e  $\bar{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0 \otimes \mathbf{I}_n$ , com

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -\alpha_0 & 1 \\ -\beta_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Reescrevendo (17) com (22), segue que

$$\dot{V} = \sqrt{L} (\boldsymbol{\zeta}^T (\mathbf{P}_n \bar{\mathbf{A}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_0^T \mathbf{P}_n) \boldsymbol{\zeta} + 2\boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{P}_n \bar{\mathbf{B}}_0 \boldsymbol{\Delta}) \quad (24)$$

Definindo  $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{P}_n \bar{\mathbf{A}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_0^T \mathbf{P}_n$  e invocando as propriedades de Kronecker (P1), (P2), e (P3), pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}} &= (\mathbf{P} \mathbf{A}_0) \otimes (\mathbf{I}_n \boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma})) + (\mathbf{A}_0^T \mathbf{P}) \otimes (\mathbf{I}_n \boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma})) \\ \bar{\mathbf{Q}} &= \mathbf{Q} \otimes \boldsymbol{\phi}'_1(\boldsymbol{\sigma}), \end{aligned} \quad (25)$$

onde  $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Visando a simplificar a análise, escolhendo  $p_1 = -\alpha_0 p_2 + \beta_0 p_3$ , segue que:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2((\beta_0 + \alpha_0^2)p_2 - \alpha_0 \beta_0 p_3) & 0 \\ 0 & -2p_2 \end{bmatrix}$$

Caso  $p_3$  seja escolhido tal que

$$p_3 > \frac{\beta_0 + \alpha_0^2}{\alpha_0 \beta_0} p_2, \quad (26)$$

então,  $\mathbf{Q}$  se torna uma matriz negativa definida. Neste caso, por (7) verifica-se que o termo quadrático  $\boldsymbol{\zeta}^T \bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\zeta}$  possui um limitante superior dado por

$$\boldsymbol{\zeta}^T \bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\zeta} \leq \frac{2((\beta_0 + \alpha_0^2)p_2 - \alpha_0 \beta_0 p_3) \|\boldsymbol{\zeta}_1\|^2 - 2p_2 \|\boldsymbol{\zeta}_2\|^2}{2\|\boldsymbol{\sigma}(t)\|^{\frac{1}{2}}} \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\zeta}^T \bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\zeta} \leq \frac{1}{2\|\boldsymbol{\sigma}(t)\|^{\frac{1}{2}}} \bar{\boldsymbol{\zeta}}^T \mathbf{Q} \bar{\boldsymbol{\zeta}}$$

onde  $\bar{\boldsymbol{\zeta}}^T = [\|\boldsymbol{\zeta}_1\| \quad \|\boldsymbol{\zeta}_2\|]^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T < 0$ .

De (16), (21) e (22), o termo  $2\boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{P}_n \bar{\mathbf{B}}_0 \boldsymbol{\Delta}$  satisfaz a seguinte desigualdade

$$2\boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{P}_n \bar{\mathbf{B}}_0 \boldsymbol{\Delta} \leq \frac{2p_2 \|\boldsymbol{\zeta}_1^T \mathbf{d}\|}{\sqrt{L}} + \frac{2p_3 \|\boldsymbol{\zeta}_2^T \mathbf{d}\|}{\sqrt{L}} \quad (28)$$

que possui um limitante superior ainda maior dado por

$$2\boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{P}_n \bar{\mathbf{B}}_0 \boldsymbol{\Delta} \leq \frac{1}{2\|\boldsymbol{\sigma}\|^{\frac{1}{2}}} (4p_2 \|\boldsymbol{\zeta}_1\| + 4p_3 \|\boldsymbol{\zeta}_2\|) \frac{\|\boldsymbol{\sigma}\|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{d}\|}{\sqrt{L}} \quad (29)$$

Como de (15),  $\|\boldsymbol{\zeta}_1\| = \sqrt{L} \|\boldsymbol{\sigma}\|^{\frac{1}{2}}$ , e, uma vez que de acordo com a Hipótese 1,  $L(t) > \|\mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}, t)\| \forall t \geq t_s$ , pode-se concluir que

$$2\boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{P}_n \bar{\mathbf{B}}_0 \boldsymbol{\Delta} \leq \frac{1}{2\|\boldsymbol{\sigma}\|^{\frac{1}{2}}} (4p_2 \|\boldsymbol{\zeta}_1\|^2 + 4p_3 \|\boldsymbol{\zeta}_2\| \|\boldsymbol{\zeta}_1\|) \quad (30)$$

Usando (27) e (30), verifica-se que, para  $t \geq t_s$ , a função  $\dot{V}$  possui um limitante superior dado por

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{\sqrt{L}}{2\|\boldsymbol{\sigma}(t)\|^{\frac{1}{2}}} \left( \bar{\boldsymbol{\zeta}}^T \begin{bmatrix} 2(\alpha_0 \beta_0 p_3 - p_2(\alpha_0^2 + \beta_0 + 2)) - 2p_3 \\ -2p_3 \\ 2p_2 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\zeta}} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{L}}{2\|\boldsymbol{\sigma}(t)\|^{\frac{1}{2}}} (\bar{\boldsymbol{\zeta}}^T \mathbf{W} \bar{\boldsymbol{\zeta}}) \end{aligned} \quad (31)$$

Note que ao definir  $p_3 = \frac{\kappa p_2}{\alpha_0 \beta_0} (\alpha_0^2 + \beta_0 + 2)$  com  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  satisfazendo (13), a matriz  $\mathbf{W}$  se torna positiva definida. Adicionalmente, note que essa escolha de  $p_3$  também satisfaz (26).

Portanto, no subespaço  $S = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{2n} | \boldsymbol{\sigma} \neq \mathbf{0}\}$ ,  $\dot{V}$  é negativa definida, o que garante a limitação das variáveis de deslizamento. Pela desigualdade de Rayleigh, segue que  $\lambda_{\min}(\mathbf{W}) \|\bar{\boldsymbol{\zeta}}\|^2 \leq \bar{\boldsymbol{\zeta}}^T \mathbf{W} \bar{\boldsymbol{\zeta}} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}_n) \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 = \lambda_{\max}(\mathbf{P}_n) \|\bar{\boldsymbol{\zeta}}\|^2$ . Logo, a função  $\dot{V}$  possui um limitante superior dado por

$$\dot{V} \leq -\sqrt{L} \frac{1}{2\|\boldsymbol{\sigma}(t)\|^{\frac{1}{2}}} \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{W})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_n)} V \quad (32)$$

De (16) e uma vez que  $\|\zeta\| \geq \|\zeta_1\| = \sqrt{L}\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}$ , segue que  $\sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_n)}\|\zeta_1\| = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_n)}\sqrt{L}\|\sigma\|^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{V}$ . Portanto, como pela Hipótese 1  $L(t) > \min(l_0, \varepsilon) \forall t > 0$ , o seguinte resultado pode ser obtido

$$\dot{V} \leq -\frac{L}{2} \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{W})\sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_n)}}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_n)}\sqrt{V} \leq -\kappa\sqrt{V}, \quad (33)$$

onde  $\kappa = \frac{\min(l_0, \varepsilon)}{2} \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{W})\sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_n)}}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_n)} > 0$  é uma constante conhecida.

Note que  $V(t, \sigma, z)$ , definida em (14) é contínua e diferenciável no conjunto  $S = \{(\sigma, z) \in \mathbb{R}^{2n} | \sigma \neq \mathbf{0}\}$ . No conjunto complementar  $\bar{S} = \{(\sigma, z) \in \mathbb{R}^{2n} | \sigma = \mathbf{0}\}$ , as trajetórias de (1) não podem permanecer em  $\bar{S}/\{\mathbf{0}\}$ , uma vez que  $z \neq \mathbf{0} \implies \dot{\sigma} \neq \mathbf{0}$ . Logo,  $V$  é uma função continuamente decrescente e pelos resultados obtidos em (Deimling, 1992) para inclusões diferenciais, o ponto de equilíbrio  $(\sigma, z) = \mathbf{0}$  é alcançado em tempo finito. Por (1), se  $\sigma = z = \mathbf{0}$ , então pode-se verificar que  $\dot{\sigma}(t) = 0$  em tempo finito.

Para concluir a análise é necessário demonstrar que as trajetórias do sistema são globalmente limitadas e que para  $t < t_s$  não ocorre escape em tempo finito. Tais resultados são apresentados no Apêndice A.

É válido destacar que os resultados obtidos acima assumem que a Hipótese 1 seja válida. Portanto, o problema torna-se escolher uma lei de adaptação apropriada para  $L(t)$ . O esquema adaptativo considerado aqui é uma variação da estratégia proposta em (Edwards and Shtessel, 2016), onde o conceito de controle equivalente é considerado, permitindo que  $L(t)$  seja projetado como uma função limitante superior não-conservadora para  $\mathbf{d}(\sigma, t)$ . Para tal fim, o sinal descontínuo  $\frac{\beta(t)}{2} \frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|}$  é usado.

Durante o modo deslizante,  $\sigma = \mathbf{0}$  e  $\dot{\sigma} = z = \mathbf{0}$ , logo

$$\frac{\beta(t)}{2} \frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|} \Big|_{eq} = \mathbf{d}(\sigma, t) \quad (34)$$

onde  $\frac{\beta(t)}{2} \frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|} \Big|_{eq}$  é um sinal contínuo equivalente capaz de substituir  $\frac{\beta(t)}{2} \frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|}$  e ainda manter o modo deslizante.

Para mais detalhes sobre o conceito de controle equivalente, favor consultar (Utkin, 1992, 2013).

Embora este conceito seja uma abstração, seu valor teórico pode ser aproximado em tempo-real através de um filtro passa-baixas

$$\dot{\mathbf{u}}_{eq}(t) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\tau_i} \right\} \left( -\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t) + \frac{\beta(t)}{2} \frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|} \right) \quad (35)$$

onde  $\bar{\mathbf{u}}_{eq} \in \mathbb{R}^n$ , e  $\tau_i > 0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  são constantes (pequenas).

Portanto, durante o modo deslizante,  $\mathbf{d}(\sigma, t)$  pode ser estimado em tempo real através de  $\bar{\mathbf{u}}_{eq}$ .

Embora  $\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)$  forneça uma aproximação do controle equivalente somente após o deslizamento ser alcançado, este sinal filtrado ainda será empregado na estratégia adaptativa durante a fase de alcance.

Observação 1. Note que, durante o modo deslizante, a diferença entre  $\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)$  e o controle equivalente real,  $\mathbf{u}_{eq}(t)$ , pode ser reduzida tornando  $\tau_i$  menor. Entretanto, con-

forme  $\tau_i$  diminui, frequências mais altas passam pelo filtro, tornando o sinal  $\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)$  mais ruidoso.

Considere a seguinte variável escalar

$$\delta(t) = L(t) - \frac{b}{a\beta_0} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)\| - \epsilon \quad (36)$$

onde  $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$ ,  $1 > a > 0 \in \mathbb{R}$  e  $b \geq 1$  são variáveis de projeto e  $a$  é escolhido tal que  $a\beta_0 < 1$ . Por sua vez, a variável escalar  $b$  deve ser escolhida de forma que, para todo  $\sigma(t) \neq \mathbf{0}$ ,  $b\|\phi_2(\sigma)\| \geq 1$ .

Note que, diferente do esquema proposto em (Edwards and Shtessel, 2016), um parâmetro adicional  $b$  foi introduzido na definição da variável auxiliar (36), de modo a lidar com diferentes valores que a norma de  $\phi_2(\sigma)$  poderia assumir para outras escolhas de  $\phi_1(\sigma)$  e  $\phi_2(\sigma)$  em (4). Logo,  $\delta(t)$  pode ser modificado para permitir diferentes escolhas de  $\phi_2(\sigma)$ , facilitando uma possível generalização para uma classe mais ampla de algoritmos baseados no Super-Twisting Multivariável. Assim como no esquema original, as demais variáveis de projeto, a saber,  $a$  e  $\epsilon$ , devem ser interpretadas como margens de segurança responsáveis por garantir que

$$\frac{b}{a\beta_0} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}\| + \frac{\epsilon}{2} \geq \frac{1}{a\beta_0} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}\| + \frac{\epsilon}{2} > \|\mathbf{u}_{eq}\| \quad (37)$$

A função adaptativa  $L(t)$  é definida como

$$L(t) = l(t) + l_0 \quad (38)$$

onde  $l_0 > 0 \in \mathbb{R}$  é um parâmetro de projeto constante, e  $l(t)$  é uma função escalar com derivada temporal dada por

$$\dot{l}(t) = -\rho(t) \text{sign}(\delta(t)), \quad (39)$$

com  $\rho(t) = r_0 + r(t)$  e

$$\dot{r}(t) = \gamma|\delta(t)|, \quad (40)$$

onde  $\gamma, r_0 > 0 \in \mathbb{R}$ . Dado o esquema de camada dupla proposto, pode-se apresentar o segundo resultado desse trabalho.

**Teorema 2.** Considere o sistema (1) sujeito à perturbação de entrada  $\mathbf{d}(\sigma, t)$ , que satisfaz a restrição  $\|\mathbf{d}(\sigma, t)\| < a_1$ , onde a constante positiva  $a_1$  é finita, porém desconhecida. Então, o esquema adaptativo de camada dupla (35), (36), (38)–(40) garante  $L(t) > \|\mathbf{d}(\sigma, t)\|$  em tempo finito.

**Prova.** Esta demonstração segue passos similares aos considerados em (Edwards and Shtessel, 2016, Proposição 3.2).

Considere a seguinte variável auxiliar

$$e(t) = \frac{bqa_1}{a\beta_0} - r(t), \quad (41)$$

onde  $q > 1$  representa uma margem de segurança e é usada para garantir que  $\left| \frac{d}{dt} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)\| \right| \leq \|\dot{\bar{\mathbf{u}}}_{eq}(t)\| < qa_1$ . De (40), a derivada temporal de (41) é dada por

$$\dot{e}(t) = -\gamma|\delta(t)| \quad (42)$$

Por sua vez, de (36), segue que

$$\dot{\delta}(t) = \dot{l}(t) - \frac{b}{a\beta_0} \frac{d}{dt} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)\|. \quad (43)$$

Conhecida as dinâmicas de  $\delta(t)$  e  $e(t)$ , a seguinte função candidata de Lyapunov será usada para analisar a limitação dessas variáveis.

$$V(\delta, e) = \frac{\delta^2(t)}{2} + \frac{e^2(t)}{2\gamma} \quad (44)$$

Note que a função de Lyapunov escolhida é positiva definida e radialmente ilimitada com relação à  $\delta(t)$  e  $e(t)$ . Por (44), pode-se verificar que

$$\dot{V} = \delta\dot{\delta} + \frac{e\dot{e}}{\gamma} \quad (45)$$

Usando (43) e (39), segue que

$$\delta\dot{\delta} = -\rho|\delta| - \frac{b\delta}{a\beta_0} \frac{d}{dt} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}\| \leq -\rho|\delta| + \frac{b|\delta|}{a\beta_0} \left| \frac{d}{dt} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}\| \right| \quad (46)$$

Uma vez que  $\left| \frac{d}{dt} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)\| \right| < qa_1$  e  $\rho = r_0 + r(t)$ , (46) pode ser reescrito como

$$\delta\dot{\delta} \leq -r_0|\delta| + \left( \frac{bqa_1}{a\beta_0} - r(t) \right) |\delta| = -r_0|\delta| + e(t)|\delta| \quad (47)$$

De forma semelhante, usando (42), pode-se mostrar que

$$\frac{e\dot{e}}{\gamma} = -e(t)|\delta| \quad (48)$$

Então, substituindo (47) e (48) em (45), o seguinte limitante superior pode ser obtido para  $\dot{V}$ :

$$\dot{V} \leq -r_0|\delta(t)| \quad (49)$$

Como  $\dot{V} \leq 0$ , garante-se que  $\delta(t)$  e  $e(t)$  são sinais limitados. Além disso, por (41), observa-se que a limitação de  $e(t)$  resulta na limitação de  $r(t)$ .

Note que de (43) um limitante superior para  $|\dot{\delta}|$  pode ser obtido:

$$|\dot{\delta}(t)| \leq |\dot{l}(t)| + \frac{b}{a\beta_0} \left| \frac{d}{dt} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)\| \right| \leq \rho(t) + \frac{bqa_1}{a\beta_0}$$

Como  $r(t)$  é limitado, verifica-se que  $\rho(t)$  também é. Consequentemente,  $|\dot{\delta}(t)|$  é um sinal limitado e portanto  $\delta(t)$  é absolutamente contínuo. De (49), a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$r_0 \int_0^t |\delta(t)| dt \leq V(0) \quad (50)$$

Visto que  $|\delta(t)|$  é absolutamente contínuo, pelo Lema de Barbalat (Khalil (2002)) segue que  $\delta(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ . Portanto, há um tempo finito  $t_1$  onde  $|\delta(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ ,  $\forall t > t_1$ .

Usando (36), conclui-se que a função adaptativa  $L(t)$  satisfaz a seguinte desigualdade, de  $t > t_1$  em diante

$$\left| L(t) - \frac{b}{a\beta_0} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)\| - \epsilon \right| = |\delta| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Consequentemente

$$L(t) - \frac{b}{a\beta_0} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)\| - \epsilon \geq -\frac{\epsilon}{2} \quad (51)$$

Uma vez que, por definição,  $a\beta_0 < 1$  e  $b \geq 1$ , por (37), tem-se que

$$L(t) \geq \frac{b}{a\beta_0} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)\| + \frac{\epsilon}{2} > \|\mathbf{u}_{eq}(t)\| = \|\mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}, t)\| \quad (52)$$

completando, assim, a demonstração.

**Observação 2.** O Teorema 2 impõe somente restrição sobre a derivada temporal da perturbação de entrada. É válido frisar que o esquema adaptativo proposto pode lidar com uma classe de perturbações ilimitadas, ao custo de ganhos ilimitados.

Este resultado estende a aplicabilidade do esquema de camada dupla proposto em (Edwards and Shtessel, 2016) para uma classe mais ampla de perturbações. Note que

embora  $L(t)$  possa ser um sinal ilimitado, as variáveis de deslizamento  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  e  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t)$  permanecem limitadas, de acordo com o Teorema 1. Por sua vez, se a perturbação de entrada for limitada, pode-se concluir de forma direta que  $L(t)$  também será limitado.

Combinando os Teoremas 1 e 2, o principal resultado desse trabalho é alcançado. Note que o modo deslizante ocorre em tempo finito apesar do termo de perturbação externa  $\mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}, t)$ . Conforme  $\delta(t)$  decresce,  $L(t)$  se torna um limitante superior “justo” para  $\|\mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}, t)\|$ , preservando o modo deslizante e prevenindo escolhas conversadoras para os ganhos do Algoritmo Super-Twisting descritos em (1).

**Observação 3.** Durante a fase de alcance, há um intervalo  $[t_a, t_c]$  onde  $\left\| \frac{\boldsymbol{\sigma}(t)}{2\|\boldsymbol{\sigma}(t)\|} \right\| = \frac{1}{2}$  para quase todo  $t \in [t_a, t_c]$ . De (35) e uma vez que  $\tau_i$  são constantes pequenas,  $\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)$  é uma versão filtrada pelo filtro passa-baixas de  $\beta(t)/2$ . Além disso, há um intervalo de tempo  $[t_b, t_c] \subset [t_a, t_c]$  no qual  $\|\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)\| > a\beta(t)/2$ . Portanto, para quase todo  $t \in [t_b, t_c]$ , segue de (2) e (36) que

$$\delta(t) < L(t) - \frac{ab\beta_0 L(t)}{2a\beta_0} - \epsilon$$

Por (4),  $\|\boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{\sigma})\| = \frac{1}{2}$ ,  $\forall \boldsymbol{\sigma}(t) \neq \mathbf{0}$ . Logo, escolhendo  $b = 2$ , pode-se concluir que  $\delta(t) < -\epsilon$ . De (39) e (40), e uma vez que  $\delta(t)$  é negativo para quase todo  $t \in [t_b, t_c]$ , segue que

$$\dot{L}(t) = \dot{l}(t) = r(t) + r_0 > 0, \text{ e } \dot{r}(t) > \gamma\epsilon > 0$$

Portanto,  $L(t)$  cresce, no mínimo, como uma parábola. Uma vez que, no pior caso, a perturbação pode crescer como uma rampa de inclinação  $a_1$ , então  $L(t)$  se tornará maior que a norma da perturbação em um tempo finito  $t_s > 0$ . Note ainda que após o tempo  $t_s$ , a variável  $\delta(t)$  pode assumir valores positivos, fazendo o ganho  $L(t)$  decrescer. No entanto, verifica-se por (36) que o valor mínimo que  $L(t)$  pode alcançar é  $L_m = \frac{b}{a\beta_0} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)\| + \epsilon$ , visto que, se  $L(t) < L_m$ , então  $\delta(t) < 0$ , garantindo que  $L(t)$  cresça novamente.

### 3. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Considere o sistema de energia WECC apresentado em (Pasqualetti et al., 2015). Usando a técnica de redução de Kron (Dorfler and Bullo, 2013), esse sistema pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{L}_s & -\mathbf{M}_g^{-1} \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{B}}_f \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) &= \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\xi}(t) + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{B}}_f \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t) \end{aligned} \quad (53)$$

com  $\boldsymbol{\xi}(t) = [\boldsymbol{\theta}(t)^T \ \boldsymbol{\omega}(t)^T]^T$ ,  $\mathbf{L}_s = \mathbf{M}_g^{-1} (\mathbf{L}_{gl} \mathbf{L}_{ll}^{-1} \mathbf{L}_{lg} - \mathbf{L}_{gg})$  e  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{M}_g^{-1} (\mathbf{P}_\omega(t) - \mathbf{L}_{gl} \mathbf{L}_{ll}^{-1} \mathbf{P}_\theta(t))$ , onde  $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbb{R}^3$  e  $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$  denotam os ângulos e as frequências dos rotores dos geradores, respectivamente. O vetor  $\mathbf{f}(t)$  representa um ataque desconhecido e  $\mathbf{u}(t)$  a entrada equivalente. A resistência da linha é descrita pela matriz de susceptibilidade da rede, composta por  $\mathbf{L}_{ll}$ ,  $\mathbf{L}_{gl}$ ,  $\mathbf{L}_{lg}$  e  $\mathbf{L}_{gg}$ . As matrizes  $\mathbf{M}_g$  e  $\mathbf{D}_g$  descrevem a matriz de inércia e os coeficientes de amortecimento, respectivamente.  $\mathbf{P}_\omega(t)$  é a demanda conhecida de potência reativa dos barramentos e  $\mathbf{P}_\theta(t)$  é a potência mecânica controlável para cada gerador. Os valores numéricos para os parâmetros acima são os mesmos considerados em (Corradini and Cristofaro, 2017).

Para esta simulação, considera-se que a saída do sistema é dada por  $\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\boldsymbol{\xi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t)$  e o primeiro e o quarto estados são monitorados, isto é,  $\bar{\mathbf{B}}_f = \bar{\mathbf{C}}$ .

Após uma transformação linear de coordenadas na forma  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\boldsymbol{\xi}(t)$ , o sistema pode ser representado como

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_1(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_2(t)$$

onde  $\mathbf{A}_{11}$  é uma matriz Hurwitz e  $\mathbf{B}$  é uma matriz identidade. A fim de reconstruir o vetor de ataque  $\mathbf{f}(t)$ , o seguinte observador de estados é considerado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_1(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}(t)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{x}}_2(t)$$

Definindo os erros de estimação como  $\mathbf{e}_1(t) = \mathbf{x}_1(t) - \hat{\mathbf{x}}_1(t)$ , e  $\mathbf{e}_2(t) = \mathbf{x}_2(t) - \hat{\mathbf{x}}_2(t)$ , tem-se que

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{e}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{e}_1(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} (\mathbf{f}(t) - \hat{\mathbf{f}}(t)) \quad (54)$$

Note que  $\mathbf{e}_2(t)$  é um sinal mensurável, visto que  $\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{e}_2(t)$ . Uma vez que  $\mathbf{A}_{11}$  é Hurwitz, conclui-se que  $\mathbf{e}_1(t)$  é um sinal limitado que converge exponencialmente para zero. Adicionalmente, definindo  $\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{e}_2(t)$  e

$$\hat{\mathbf{f}}(t) = -\mathbf{B}^{-1} \left( -\alpha(t)\phi_1(\boldsymbol{\sigma}) + \Phi(\boldsymbol{\sigma}, t) - \int_{t_0}^t \beta(t)\phi_2(\boldsymbol{\sigma})dt \right),$$

o erro de observação de saída pode ser escrito como (1), com  $\mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}, t) = \mathbf{A}_{21}\dot{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{B}\hat{\mathbf{f}}(t)$ . Logo, o modo deslizante é alcançado em tempo finito para qualquer perturbação  $\mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}, t)$  que satisfaça a restrição  $\|\dot{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\sigma}, t)\| < a_1$ , onde  $a_1$  é uma constante desconhecida.

Note que após o modo deslizante ocorrer, ( $\boldsymbol{\sigma}(t) = \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathbf{0}$ ),  $\hat{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{e}_1(t) + \mathbf{f}(t)$ . Como  $\mathbf{e}_1(t)$  converge para zero exponencialmente, pode-se concluir que  $\hat{\mathbf{f}}(t)$  também converge exponencialmente para  $\mathbf{f}(t)$ .

Visando a comparação entre ambas as abordagens, os mesmos parâmetros de simulação considerados em (Corradini and Cristofaro, 2017) foram adotados aqui. Para simplificar a notação, o método proposto em (Corradini and Cristofaro, 2017) será referido aqui como *Método 2*.

Assume-se que dois ataques senoidais dados por  $\mathbf{f}(t) = 0.5\sin(t)$  corrompem o primeiro e o quarto estados. Definindo  $\kappa = 2$ , os ganhos constantes do STA foram escolhidos como  $\alpha_0 = 2$  e  $\beta_0 = 3.5$ , a fim de satisfazer (13). Os parâmetros da camada dupla são definidos como  $\tau_i = 0.01$ ,  $i = 1, 2$ ,  $r_0 = l_0 = 0.1$ ,  $a = 0.56$ ,  $\epsilon = 0.01$ , e  $\gamma = 8$ .

Observe que o Método 2 requer o conhecimento de um limitante superior para  $\mathbf{f}(t)$  e sua derivada temporal. Logo, para fins de implementação, considera-se que as constantes  $\rho_1 = 0.8$  e  $\rho_2 = 0.8$  são limitantes superiores conhecidos para  $\mathbf{f}(t)$  e  $\dot{\mathbf{f}}(t)$ , respectivamente. É válido frisar que a estratégia proposta aqui requer somente que a restrição  $\|\dot{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\sigma}, t)\| < a_1$ , apresentada no Teorema 2 seja satisfeita.

A condição inicial para a simulação é dada por  $\mathbf{e}_1(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0 \ 0]^T$ , e  $\boldsymbol{\sigma}(0) = [0 \ -0.1]^T$ . Os resultados de simulação são mostrados nas seguintes figuras.

Note na Figura 1 que a estratégia proposta garante o modo deslizante de segunda ordem ( $\boldsymbol{\sigma}(t) = \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathbf{0}$ ) em tempo finito, além de fornecer uma reconstrução exata de ambos os ataques, como pode ser observado na Figura 2. Como descrito em (Corradini and Cristofaro, 2017), o Método 2 garante apenas a limitação dos sinais  $\|\boldsymbol{\sigma}(t)\|$  e  $\|\mathbf{f}(t) - \hat{\mathbf{f}}(t)\|$ , logo, a reconstrução do ataque não é exata (veja Figura 2). Note ainda que enquanto o Método 2 requer dois monitores, a estratégia proposta utiliza apenas um.

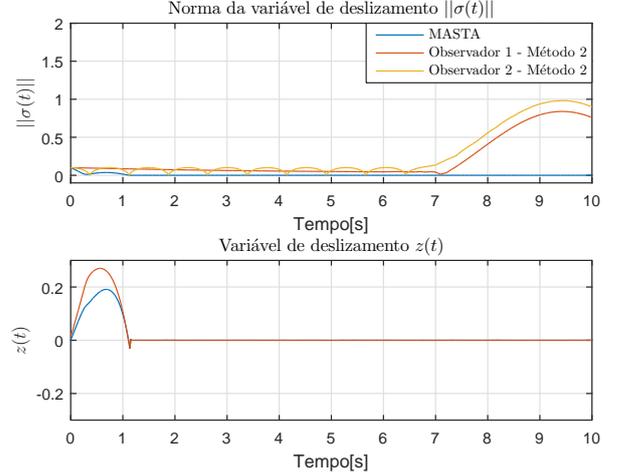


Figura 1. Variáveis de deslizamento.

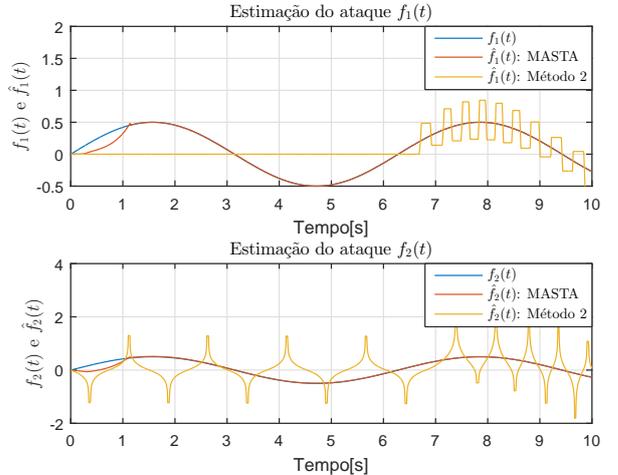


Figura 2. Ataque aos estados real  $\mathbf{f}(t)$  e estimado  $\hat{\mathbf{f}}(t)$  usando ambos os métodos.

Pela Figura 3, verifica-se o comportamento esperado das variáveis da camada dupla  $\delta(t)$  e  $\rho(t)$  e do ganho adaptativo  $L(t)$ , uma vez que  $L(t) > \|\mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}, t)\|$  em tempo finito,  $\delta(t)$  converge para zero e  $\rho(t)$  se torna constante.

Considere agora que o seguinte vetor de ataques ilimitado é aplicado ao sistema ciber-físico apresentado em (53):  $\mathbf{f}(t) = [t^2 \ 0 \ 0 \ \sin(t) \ 0 \ 0]^T$ . Além disso, por se tratar de um sinal cujo perfil é desconhecido, assume-se que um limitante superior para o mesmo não seja conhecido. Desta forma, o método proposto em (Corradini and Cristofaro, 2017) não pode ser implementado. Por sua vez, a estratégia proposta aqui pode ser implementada diretamente, pois apenas a restrição  $\|\dot{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\sigma}, t)\| < a_1$  deve ser satisfeita.

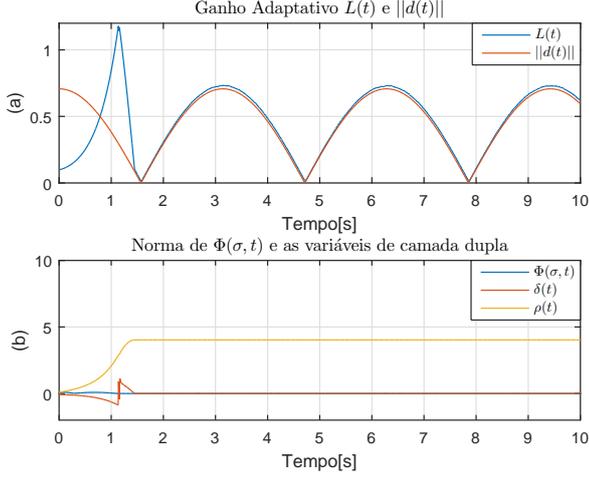


Figura 3. (a) Ganho adaptativo  $L(t)$  e perturbação  $\|d(t)\|$ . (b)  $\|\Phi(t, \sigma)\|$  e as variáveis da camada dupla  $\delta(t)$ ,  $\rho(t)$ .

Para fins de simulação, a condição inicial, os ganhos constantes do STA e os parâmetros da camada dupla escolhidos na simulação anterior serão adotados novamente. Os resultados são mostrados a seguir

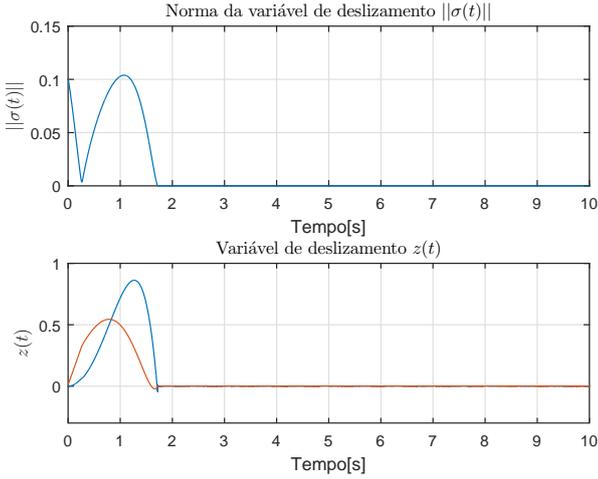


Figura 4. Variáveis de deslizamento.

Note pela Figura 4 que o método proposto garante o modo deslizante de segunda ordem em tempo finito, mesmo com ataques ilimitados. Observe ainda na Figura 5 que o ataque é reconstruído exponencialmente, uma vez que por (54) verifica-se que  $e_1(t)$  converge exponencialmente para zero.

Por sua vez, note pela Figura 6 que após um tempo finito, o ganho  $L(t)$  se torna um limitante superior para a norma da perturbação, como esperado, uma vez que a variável auxiliar  $\delta(t)$  converge para zero exponencialmente. Portanto, verifica-se que ao custo de ganhos ilimitados, o algoritmo proposto é capaz de lidar com certas classes de ataques ilimitados.

#### 4. CONCLUSÃO

Neste artigo, foi proposto um Algoritmo Super-Twisting Adaptativo Multivariável não-desacoplado. Uma extensão

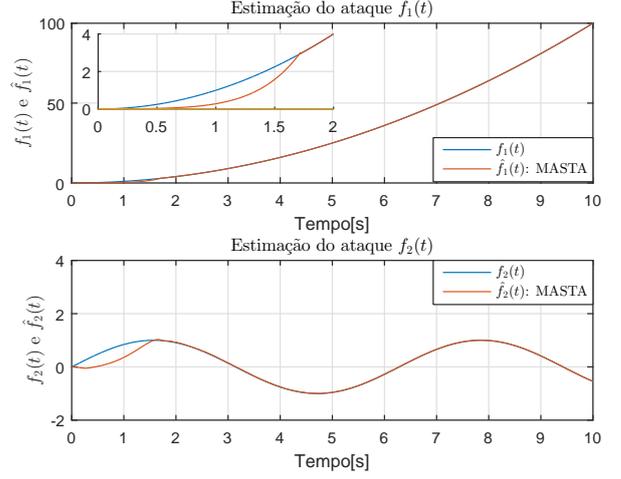


Figura 5. Ataque aos estados real  $f(t)$  e estimado  $\hat{f}(t)$  usando o método proposto.

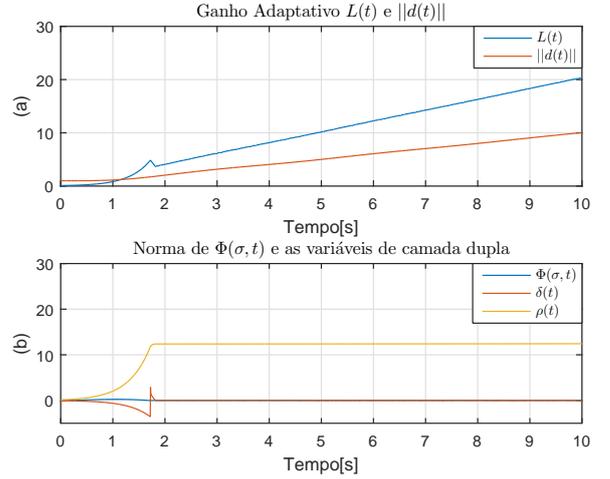


Figura 6. (a) Ganho adaptativo  $L(t)$  e perturbação  $\|d(t)\|$ . (b)  $\|\Phi(t, \sigma)\|$  e as variáveis da camada dupla  $\delta(t)$ ,  $\rho(t)$ .

multivariável semelhante à versão SISO apresentada em (Edwards and Shtessel, 2016) foi considerada, usando uma formulação generalizada. No entanto, foram destacadas importantes propriedades que podem permitir que uma generalização para uma classe de algoritmos baseados no STA seja desenvolvida. Para a classe de perturbações considerada, verificou-se que o esquema de camada dupla garante que o ganho adaptativo se torne um limitante superior para a norma da perturbação, após um tempo finito. Em (Edwards and Shtessel, 2016), assumiu-se que este limitante é válido para todo o tempo, o que não ocorre, como foi verificado nos resultados de simulação. Portanto, uma análise de escape em tempo finito foi proposta, assegurando que as trajetórias do sistema são globalmente limitadas. Além disso, verificamos que a estratégia adaptativa é capaz de lidar com uma classe de perturbações mais ampla, garantindo a rejeição de perturbações ilimitadas ao custo de ganhos ilimitados.

## REFERÊNCIAS

- Alwi, H. and Edwards, C. (2013). An adaptive sliding mode differentiator for actuator oscillatory failure case reconstruction. *Automatica*, 49(2), 642–651.
- Bartolini, G., Levant, A., Plestan, F., Taleb, M., and Punta, E. (2013). Adaptation of sliding modes. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 30(3), 285–300.
- Bernstein, D.S. (2009). *Matrix mathematics: theory, facts, and formulas*. Princeton university press.
- Boiko, I. and Fridman, L. (2005). Analysis of chattering in continuous sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(9), 1442–1446.
- Corradini, M.L. and Cristofaro, A. (2017). Robust detection and reconstruction of state and sensor attacks for cyber-physical systems using sliding modes. *IET Control Theory & Applications*, 11(11), 1756–1766.
- Deimling, K. (1992). *Multivalued Differential Equations, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*. Walter de Gruyter Berlin, Germany.
- Dorfler, F. and Bullo, F. (2013). Kron reduction of graphs with applications to electrical networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 60(1), 150–163.
- Edwards, C. and Shtessel, Y. (2016). Adaptive dual-layer super-twisting control and observation. *International Journal of Control*, 89(9), 1759–1766.
- Filippov, A.F. (1964). Differential equations with discontinuous right-hand side. *Amer. Math. Soc. Trans.*, 42, 199–231.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems; 3rd ed.* Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10), 924–941.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6), 1247–1263.
- Moreno, J.A. and Osorio, M. (2008). A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *2008 47th IEEE conference on decision and control*, 2856–2861. IEEE.
- Pasqualetti, F., Dorfler, F., and Bullo, F. (2015). Control-theoretic methods for cyberphysical security: Geometric principles for optimal cross-layer resilient control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 35(1), 110–127.
- Plestan, F., Shtessel, Y., Bregeault, V., and Poznyak, A. (2010). New methodologies for adaptive sliding mode control. *International Journal of Control*, 83(9), 1907–1919.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2014). *Sliding Mode Control and Observation*. Control Engineering. Birkhäuser.
- Shtessel, Y., Taleb, M., and Plestan, F. (2012). A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller: Methodology and application. *Automatica*, 48(5), 759–769.
- Utkin, V.I. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag.
- Utkin, V.I. and Poznyak, A.S. (2013). Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: Equivalent control method. *Automatica*, 49(1), 39–47.
- Utkin, V.I. (2013). *Sliding modes in control and optimization*. Springer Science & Business Media.
- Vidal, P.V., Nunes, E.V., and Hsu, L. (2017). Output-feedback multivariable global variable gain super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(6), 2999–3005.
- Zhao, X., Zong, Q., Tian, B., Shao, S., You, M., and Liu, W. (2019). Adaptive multivariable finite-time continuous fault-tolerant control of rigid spacecraft. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(10), 2927–2940.

## Apêndice A. LIMITAÇÃO GLOBAL DAS TRAJETÓRIAS

Visando a assegurar que as trajetórias do sistema (1) são globalmente limitadas, deve-se primeiro demonstrar que não ocorre escape em tempo finito. Para tal, note que (24) possui um limitante superior dado por

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq (2p_2 \|\zeta_1\| + 2p_3 \|\zeta_2\|) \|\mathbf{d}\| \\ &\leq (2p_2 + 2p_3) \|\zeta\| \|\mathbf{d}\| \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Como por hipótese,  $\|\dot{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\sigma}, t)\| < a_1 \forall t \geq t_0$ , pode-se mostrar que  $\|\mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}, t)\| \leq a_1 t + d_0, \forall t \geq t_0$ , onde  $a_1$  e  $d_0 = \|\mathbf{d}(\boldsymbol{\sigma}(t_0), t_0)\|$  são constantes positivas desconhecidas.

Substituindo essa desigualdade em (A.1), segue que

$$\dot{V} \leq (2p_2 + 2p_3)(a_1 t + d_0) \|\zeta\| \quad (\text{A.2})$$

Uma vez que pela desigualdade de Rayleigh,  $\sqrt{V} \geq \sqrt{\lambda_{\min}(P_n)} \|\zeta\|$ , é possível reescrever (A.2) em função do seguinte limitante superior

$$\dot{V} \leq k^* \sqrt{V} (a_1 t + d_0), \quad k^* = \frac{2p_2 + 2p_3}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_n)}} > 0 \quad (\text{A.3})$$

Resolvendo a equação de comparação  $\dot{v} = k^* \sqrt{v} (a_1 t + d_0)$  com  $v(t_0) = v_0 \geq 0$ , tem-se que

$$v(t) = \frac{1}{16} (\kappa_1 t^4 + 4\kappa_1 \kappa_2 t^3 + \kappa_3 t^2 + \kappa_4 t + \kappa_5), \quad \forall t \geq t_0$$

onde  $\kappa_1 = k^* a_1$ ,  $\kappa_2 = k^* d_0$ , e

$$\kappa_3 = 4\kappa_2^2 - 4\kappa_1 \kappa_2 t_0 + 2\kappa_1^2 t_0^2 + 8\kappa_1 v_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\kappa_4 = -8\kappa_2 t_0 - 4\kappa_1 \kappa_2 t_0^2 + 16\kappa_2 v_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\kappa_5 = 4\kappa_2^2 t_0^2 + 4\kappa_1 \kappa_2 t_0^3 + \kappa_1^2 t_0^4 - 16\kappa_2 t_0 v_0^{\frac{1}{2}} - 8\kappa_1 t_0^2 v_0^{\frac{1}{2}} + 16v_0$$

Portanto, pode-se concluir que  $v(t)$  não diverge em tempo finito. Desta forma, através do princípio da comparação, verifica-se que a função candidata em questão é limitada por  $V(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{z}, t) \leq v(t), \forall t \geq t_0 \geq 0$ , garantindo que as variáveis de deslizamento  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  e  $\mathbf{z}(t)$  não divergem em tempo finito.

De acordo com os resultados acima, conclui-se que as trajetórias do sistema são limitadas superiormente por um polinômio de quarta ordem,  $\forall t < t_s$ . Após esse tempo, por (31) verifica-se que  $\dot{V}(t)$  se torna uma função negativa definida, de modo que  $V(t) \leq V(t_s) \leq v(t_s), \forall t$ . Logo, limitantes superiores para  $\|\boldsymbol{\sigma}\|$  e  $\|\mathbf{z}\|$  podem ser obtidos com o conhecimento da condição inicial de  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{z})$  em um tempo  $t \in (t_0, t_s)$ . Portanto,  $\left\| \left[ \boldsymbol{\sigma}^T(t_0) \quad \mathbf{z}^T(t_0) \right]^T \right\| \leq \kappa_a \implies \left\| \left[ \boldsymbol{\sigma}^T(t) \quad \mathbf{z}^T(t) \right]^T \right\| \leq \kappa_b, \forall t \geq t_0 \geq 0$  e um  $\kappa_a > 0 \in \mathbb{R}$  arbitrariamente grande. Logo, as soluções do sistema (1) são globalmente limitadas (Khalil, 2002).